Тема 8

Липшицевы отображения.

8.1 Определение и простейшие свойства

Важным классом отображений между метрическими пространствами являются *липшицевы отображения*, т.е. такие $f\colon X \to Y$, что $|f(x)f(y)| \le C|xy|$ для любых x, y и некоторого числа C, не зависящего от x и y, называемого *константой Липшица*. Наименьшая константа Липшица называется *растяжением* отображения f и обозначается через $\operatorname{dil} f$.

Напомним, что отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется *равномерно-непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых x, $x' \in X$, удовлетворяющих $|xx'| < \delta$, выполняется $\bigl|f(x)f(x')\bigr| < \varepsilon$. Каждое равномерно-непрерывное отображение является непрерывным.

Лемма 8.1.

(1) *Каждое липшицево отображение является равномерно-непрерывным.*

(2) *Свойство липшицевости сохраняется при композиции, причем*

$$\operatorname{dil}(g\circ f) \le \operatorname{dil} f \cdot \operatorname{dil} g.$$

(3) *Множество липшицевых отображений из метрического пространства в нормированное пространство замкнуто относительно линейных комбинаций и, потому, образуют векторное пространство, на котором растяжение является полунормой (полунорма ненулевого вектора может равняться нулю).*

Доказательство. (1) Пусть $f\colon X \to Y$ — липшицево отображение метрических пространств с растяжением C. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta = \varepsilon/C$ выполняется следующее условие: для любых x, $x' \in X$ таких, что $|xx'| < \delta$, выполняется

$$\bigl|f(x)f(x')\bigr| \le C|xx'| < C\delta = \varepsilon,$$

а это означает равномерную непрерывность.

(2) Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — липшицевы отображения метрических пространств с растяжениями $C_f = \operatorname{dil} f$ и $C_g = \operatorname{dil} g$ соответственно. Тогда для любых x, $x' \in X$ имеем

$$\bigl|(g\circ f)(x)\,(g\circ f)(x')\bigr| \le C_g\bigl|f(x)f(x')\bigr| \le C_gC_f|xx'|,$$

поэтому C_gC_f является константой Липшица для $g\circ f$ и, так как $\operatorname{dil}(g\circ f)$ — наименьшая из констант Липшица, получаем требуемое.

(3) Пусть f, $g\colon X \to Y$ — два липшицевых отображения, и пусть a и b — вещественные числа. Тогда для любых $x, x' \in X$ имеем

$$\bigl|af(x) + bg(x) - af(x') - bg(x')\bigr| \le |a|\bigl|f(x) - f(x')\bigr| + |b|\bigl|g(x) - g(x')\bigr| \le \bigl(|a|\operatorname{dil} f + |b|\operatorname{dil} g\bigr)|xx'|,$$

откуда $af(x) + bg(x)$ — липшицево отображение, для которого растяжение не превосходит $|a|\operatorname{dil} f + |b|\operatorname{dil} g$. Тем самым, растяжение является неотрицательной субаддитивной функцией, и $\operatorname{dil}(af) \le |a|\operatorname{dil} f$. Покажем, что, на самом деле, имеет место равенство $\operatorname{dil}(af) = |a| \operatorname{dil} f$. Действительно, если это не так, то $a \neq 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\operatorname{dil}(af) = |a|(\operatorname{dil} f - \varepsilon)$, поэтому для любых $x, x' \in X$ выполняется

$$\bigl|af(x) - af(x')\bigr| \le |a|(\operatorname{dil} f - \varepsilon)\,|xx'|,$$

но тогда при всех $x, x' \in X$ имеем $\bigl|f(x) - f(x')\bigr| \le (\operatorname{dil} f - \varepsilon)\,|xx'|$, что противоречит определению $\operatorname{dil} f$. Таким образом, dil является полунормой. $\square$

8.2 Плотности и аппроксимативная непрерывность

Напомним некоторые необходимые определения и обозначения (см. лекцию 7).

Для произвольного семейства $\mathcal{F} \subset 2^X$ и $Y \subset X$ положим $\mathcal{F}(Y) = \{A \in \mathcal{F} : A \cap Y \neq \emptyset\}$. Если $Y = \{x\}$, то для краткости будем писать $\mathcal{F}(x)$ вместо $\mathcal{F}\bigl(\{x\}\bigr)$. Кроме того, если X — метрическое пространство, то для каждого $x \in X$ и $r > 0$ положим $\mathcal{F}_r(x) = \bigl\{A \in \mathcal{F}(x) : A \subset B_r(x)\bigr\}$, где, напомним, $B_r(x)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x.

Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{F}$ — произвольное семейство его подмножеств, $f\colon 2^X \xrightarrow{\text{p}} [-\infty, \infty]$ — частично определенная функция. Имея в виду соглашение $\inf\emptyset = \infty$ и $\sup\emptyset = -\infty$, положим

$$(\mathcal{F})\limsup_x f = (\mathcal{F})\limsup_{A\to x} f(A) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \sup\bigl\{f(A) : A \in \mathcal{F}_\varepsilon(x) \cap \operatorname{dom} f\bigr\}.$$

Аналогично определяется $(\mathcal{F})\liminf_x f$. Если $(\mathcal{F})\limsup_x f = (\mathcal{F})\liminf_x f$, то вместо них пишут $(\mathcal{F})\lim_x f$.

Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств метрического пространства X называется *сгущающимся в точке* x, если для каждого $r > 0$ существует такое $A \in \mathcal{F}$, что $x \in A \subset B_r(x)$. Таким образом, $\mathcal{F}$ сгущается в x, если и только если $\mathcal{F}_r(x) \neq \emptyset$ при каждом $r > 0$.

Определение 8.2. Пусть на метрическом пространстве X задана внешняя мера μ. Семейство $\mathcal{V}$ подмножеств X называется *μ-покрытием Витали*, если

(1) $X = \cup\mathcal{V}$ (семейство $\mathcal{V}$ является покрытием),

(2) $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}(X)$ (все множества семейств $\mathcal{V}$ — борелевские),

(3) семейство $\mathcal{V}$ сгущается в каждой точке $x \in X$, и

(4) для любого $Z \subset X$ и для любого $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ таких, что $\mathcal{C}(Z)$ сгущается в каждой точке $z \in Z$, в $\mathcal{C}$ имеется не более чем счетное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{D}$, для которого $\mu(Z \setminus \sqcup\mathcal{D}) = 0$.

Пример 8.3. Пусть μ — продолжение Лебега n-мерной меры Лебега и $\delta > 0$. Тогда $\mathcal{V}$, составленное из всех замкнутых невырожденных шаров, радиусы которых не превосходят δ, является μ-покрытие Витали в силу теоремы 2.28 (проверьте).

Всюду ниже в этом разделе, если не оговорено противное, X — метрическое пространство, μ — борелевски регулярная внешняя мера такая, что μ-мера каждого ограниченного множества конечна, и $\mathcal{V}$ — μ-покрытие Витали на X.

Для произвольного подмножества $Y \subset X$ и любой точки $x \in X$ определим *верхнюю и нижнюю* $(\mu, \mathcal{V})$-*плотности множества* Y *в точке* x, положив соответственно

$$\Theta^*(Y, \mu, \mathcal{V})(x) = (\mathcal{V})\limsup_{A\to x} \frac{\mu(A\cap Y)}{\mu(A)} \quad\text{и}\quad \Theta_*(Y, \mu, \mathcal{V})(x) = (\mathcal{V})\liminf_{A\to x} \frac{\mu(A\cap Y)}{\mu(A)}.$$

Если верхняя и нижняя плотности совпадают, то определен предел

$$\Theta(Y, \mu, \mathcal{V})(x) = (\mathcal{V})\lim_{A\to x} \frac{\mu(A\cap Y)}{\mu(A)},$$

который называется просто $(\mu, \mathcal{V})$-*плотностью множества* Y *в точке* x.

Замечание 8.4. Заметим, что $\Theta(Y, \mu, \mathcal{V})(x) = D(\mu|_Y, \mu, \mathcal{V})(x)$, поэтому, в силу 7.16, $(\mu, \mathcal{V})$-плотность определена и конечна μ-почти всюду (не превосходит 1 в силу монотонности внешней меры).

Соглашение 8.5. Так как в данном разделе мы рассматриваем только плотности относительно μ и $\mathcal{V}$, то для упрощения обозначений будем писать $\Theta^*(Y)(x)$, $\Theta_*(Y)(x)$ и $\Theta(Y)(x)$ вместо $\Theta^*(Y,\mu,\mathcal{V})(x)$, $\Theta_*(Y,\mu,\mathcal{V})(x)$ и $\Theta(Y,\mu,\mathcal{V})(x)$ соответственно.

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 8.6. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и $B\subset A\subset X$ такие, что $\mu(A\setminus B)=0$. Тогда $\mu(A)=\mu(B)$.*

Доказательство. Действительно, в силу полуаддитивности внешней меры, имеем $\mu(A)\le\mu(A\setminus B)+\mu(B)=\mu(B)$. С другой стороны, в силу монотонности внешней меры, выполняется $\mu(A)\ge\mu(B)$. □

Следствие 8.7. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и $A,B\subset X$ такие, что $\mu(A\setminus B)=0$. Тогда $\mu(A)\le\mu(B)$.*

Доказательство. Действительно, так как $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$, то, в силу 8.6 и монотонности внешней меры, имеем $\mu(A)=\mu(A\cap B)\le\mu(B)$. □

Лемма 8.8. *Пусть множество $Y\subset X$ является μ-измеримым, тогда $\Theta(Y)\overset{п.в.}{=}\chi_Y$, где χ_Y характеристическая функция множества Y.*

Доказательство. Покажем, что плотность равна 1 почти всюду на Y (то, что она равна 0 почти всюду на $X\setminus Y$ доказывается точно так же). Положим

$$Y_\delta=\Big\{x\in Y:(\mathcal{V})\liminf_{A\to x}\frac{\mu(A\cap Y)}{\mu(A)}<1-\delta\Big\}.$$

В силу 8.4, достаточно проверить, что $\mu(Y_\delta)=0$ при каждом $\delta>0$. Предположим противное, т.е. что найдется такое $\delta_0>0$, для которого $\mu(Y_{\delta_0})=m_0>0$.

Так как внешняя мера μ — борелевски регулярная и μ-мера каждого ограниченного множества конечна, то все пространство X, а, значит, и каждое его подмножество, покрывается не более чем счетным семейством открытых шаров конечной меры. Поэтому применимо упражнение 3.39, в силу которого найдется такое открытое $U\subset X$, что $Y\subset U$ и $\mu(U\setminus Y)<\delta_0m_0$. С другой стороны, для каждой точки $x\in Y_{\delta_0}$ найдется такая последовательность $B_{r_i(x)}(x)\subset U$, $r_i(x)\to0$, и $A_i(x)\in\mathcal{V}$, $A_i(x)\subset B_{r_i(x)}(x)$, что

$$\frac{\mu(A_i(x)\cap Y)}{\mu(A_i(x))}<1-\delta_0$$

для всех i. Рассмотрим семейство $\mathcal{C}=\big\{A_i(x)\mid x\in Y_{\delta_0},i=1,2,\dots\big\}$. Оно сгущается к каждой точке $x\in Y_{\delta_0}$, поэтому из него можно выделить счетное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{D}=\{A_i\}$, для которого $\mu(Y_{\delta_0}\setminus\cup\mathcal{D})=0$. Далее, так как множество Y измеримо, то $\mu(A_i\cap Y)+\mu(A_i\setminus Y)=\mu(A_i)$, откуда

$$\mu(A_i\setminus Y)=\mu(A_i)-\mu(A_i\cap Y)>\mu(A_i)-(1-\delta_0)\mu(A_i)=\delta_0\mu(A_i),$$

поэтому

$$\mu(U\setminus Y)\ge\sum\mu(A_i\setminus Y)\ge\delta_0\sum\mu(A_i)=\delta_0\mu(\cup\mathcal{D})\ge\delta_0\mu(Y_{\delta_0})=\delta_0m_0,$$

противоречие. Здесь третье с конца соотношение (равенство) вытекает из μ-измеримости всех A_i, а второе с конца (неравенство) — из 8.7. □

Упражнение 8.9. Проверить справедливость обратного утверждения.

Определенная выше плотность позволяет следующим полезным образом обобщить понятия предела отображения и непрерывности. Пусть на подмножестве Y метрического пространства X задано отображение $f\colon Y\to Z$ в топологическое пространство Z.

Определение 8.10. Точка $z\in Z$ называется *аппроксимативным пределом отображения f в точке $x_0\in X$ относительно меры μ и покрытия $\mathcal{V}$*, если для любой окрестности $W\subset Z$ точки z выполняется

$$\Theta^*\big(X\setminus f^{-1}(W)\big)(x_0)=0.$$

Замечание 8.11. Легко видеть, что в определении 8.10 можно ограничиться открытыми окрестностями W.

Замечание 8.12. Если f непрерывно в точке x_0, то $z = f(x_0)$ является аппроксимативным пределом. Действительно, для любой окрестности $W \subset Z$ точки z множество $U = f^{-1}(W)$ представляет собой окрестность точки x_0, поэтому для достаточно малого $r > 0$ выполняется $B_r(x_0) \subset U$, следовательно, для каждого $Y \in \mathcal{V}_r(x_0)$ имеем $Y \cap (X \setminus U) = \emptyset$, откуда $\Theta^*\big(X \setminus U\big)(x_0) = 0$. Таким образом, аппроксимативный предел является обобщением топологического предела функции.

Предложение 8.13. *Предположим, что пространство Z — хаусдорфово. Тогда в каждой точке x_0 существует не более одного аппроксимативного предела.*

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке x_0 имеется как минимум два разных аппроксимативных предела z_1 и z_2. В силу хаусдорфовости пространства Z, у точек z_i имеются непересекающиеся окрестности W_i, поэтому множества $U_i = f^{-1}(W_i)$ также не пересекаются. Так как $\Theta^*\big(X \setminus U_i\big)(x_0) = 0$, то при каждом $\varepsilon > 0$ существует такое $A \in \mathcal{V}(x_0)$, что

$$\mu\big(A \cap (X \setminus U_i)\big) < \varepsilon\mu(A)$$

одновременно для $i = 1$ и $i = 2$. Субаддитивность внешней меры дает

$$\mu(A) \le \mu\big(A \cap (X \setminus U_1)\big) + \mu(A \cap U_1) < \varepsilon\mu(A) + \mu(A \cap U_1),$$

откуда $(1-\varepsilon)\mu(A) < \mu(A \cap U_1)$. С другой стороны, $A \cap U_1 \subset A \cap (X \setminus U_2)$, так как $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, поэтому

$$(1-\varepsilon)\mu(A) < \mu(A \cap U_1) \le \mu\big(A \cap (X \setminus U_2)\big) < \varepsilon\mu(A),$$

что не выполняется при $\varepsilon < 1/2$. □

Обозначение 8.14. Если Z — хаусдорфово пространство, то единственный аппроксимативный предел, если существует, обозначается через $(\mathcal{V})\operatorname{ap\,lim}_{x \to x_0} f(x)$.

Определение 8.15. Для хаусдорфова пространства Z, отображение $f\colon Y \to Z$ называется *аппроксимативно непрерывным в точке* $x_0 \in X$ (относительно μ и $\mathcal{V}$), если

$$(\mathcal{V})\operatorname{ap\,lim}_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Замечание 8.16. Из 8.12 вытекает, что отображение f, непрерывное в данной точке, является также аппроксимативно непрерывным в этой точке.

Ниже нам понадобится следующее усиление результата 8.16.

Лемма 8.17. *Пусть $f\colon X \to Z$ — μ-измеримое отображение в хаусдорфово топологическое пространство и $Y \subset X$. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in Y$ выполняются следующие условия:*

(1) *отображение $f|_Y$ непрерывно в x_0, и*

(2) $\Theta(Y)(x_0) = 1$.

Тогда f аппроксимативно непрерывно в x_0.

Доказательство. Мы должны показать, что $(\mathcal{V})\operatorname{ap\,lim}_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это, в силу 8.11, означает, что для любой открытой окрестности $W \subset Z$ точки $f(x_0)$, $D = f^{-1}(W)$, выполняется $\Theta^*(X \setminus D)(x_0) = 0$. Последнее равносильно следующему условию: при каждом $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что для каждого $A \in \mathcal{V}_r(x_0)$ имеем $\mu\big(A \cap (X \setminus D)\big) < \varepsilon\mu(A)$. Именно это мы и будем доказывать.

Так как $f|_Y$ непрерывно в x_0, то $D \cap Y$ — окрестность точки $x_0 \in Y$ в индуцированной на Y топологии, т.е. существует такая окрестность U точки x_0 в топологии пространства X, что $D \cap Y = U \cap Y$. Так как U — окрестность точки x_0, существует $r > 0$, для которого $B_r(x_0) \subset U$.

По условию, $\Theta(Y)(x_0) = 1$, поэтому r можно выбрать столь малым, чтобы для каждого $A \in \mathcal{V}_r(x_0)$ выполнялось $\mu(A \cap Y) > (1-\varepsilon)\mu(A)$. Заметим, что $A \cap Y \subset U \cap Y = D \cap Y$, откуда $A \cap Y \subset A \cap D \cap Y \subset A \cap D$, поэтому $\mu(A \cap D) > (1-\varepsilon)\mu(A)$. Так как f — μ-измеримо, а W — открыто, то $D \in \sigma(\mu)$, поэтому $\mu(A) = \mu(A \cap D) + \mu\big(A \cap (X \setminus D)\big)$, откуда

$$\mu\big(A \cap (X \setminus D)\big) = \mu(A) - \mu(A \cap D) < \mu(A) - (1-\varepsilon)\mu(A) = \varepsilon\mu(A).$$

□

Утверждение 8.18. *Любое μ-измеримое отображение $f\colon X \overset{n.в.}{\to} Z$ со значениями в сепарабельном метрическом пространстве Z является μ-почти всюду аппроксимативно непрерывным.*

Доказательство. Так как утверждение касается μ-почти всех точек, будем, без ограничения общности, сразу считать, что f определена на всем X.

Фиксируем произвольную точку $x \in X$ и покроем X шарами $B_n(x)$. Так как, по условию, $\mu\big(B_n(x)\big) < \infty$, применима теорема Лузина 4.13, в силу которой при любом $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $C_n^\varepsilon \subset B_n(x)$ такое, что $\mu\big(B_n(x) \setminus C_n^\varepsilon\big) < \varepsilon$ и $f|_{C_n^\varepsilon}$ непрерывна.

По 8.8, существует такое μ-измеримое подмножество $D_n^\varepsilon \subset C_n^\varepsilon$, что $C_n^\varepsilon \overset{\text{п.в.}}{=} D_n^\varepsilon$ и при каждом $x_0 \in D_n^\varepsilon$ имеем $\Theta(C_n^\varepsilon)(x_0) = 1$. По 8.17, функция f является аппроксимативно непрерывной в x_0.

Положим $D = \cup_{n\in\mathbb{N},\varepsilon>0} D_n^\varepsilon$. В силу доказанного выше, функция f аппроксимативно непрерывна во всех точках из D. Тривиально проверяется, что $D \overset{\text{п.в.}}{=} X$ (сделайте это). □

Упражнение 8.19. Проверить справедливость обратного утверждения.

Следствие 8.20. *Пусть $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — локально ограниченная μ-измеримая функция. Тогда в каждой точке $x \in X$, в которой функция f аппроксимативно непрерывна, выполнено*:
$$f(x) = (\mathcal{V}) \lim_{A\to x} \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\,d\mu.$$

Доказательство. Действительно, по утверждению 8.18, достаточно рассмотреть точки x аппроксимативной непрерывности функции f, и для малых $r > 0$ оценить сверху выражение
$$\sup\Big\{\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - f(x)|\,d\mu : A \in \mathcal{V}_r(x)\Big\}.$$

Аппроксимативная непрерывность f в x означает, что для любой окрестности W точки $f(x)$, $D = f^{-1}(W)$, и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что для каждого $A \in \mathcal{V}_r(x)$ выполнено $\mu\big(A \cap (X \setminus D)\big) < \varepsilon\mu(A)$. Для $\alpha > 0$ положим $W_\alpha = \big[f(x) - \alpha, f(x) + \alpha\big]$, тогда $D_\alpha = f^{-1}(W_\alpha) = \big\{t \in X : |f(t) - f(x)| \le \alpha\big\}$, и $A_\alpha = A \cap (X \setminus D_\alpha) = \big\{t \in A : |f(t) - f(x)| > \alpha\big\}$, откуда $\mu(A_\alpha) < \varepsilon\mu(A)$. Далее, в силу локальной ограниченности f, для достаточно малых r существует константа M, для которой $\big|f(t)\big| \le M$ при всех $t \in A \in \mathcal{V}_r(x)$. Имеем:
$$\int_A |f - f(x)|\,d\mu = \int_{A_\alpha} |f - f(x)|\,d\mu + \int_{A\setminus A_\alpha} |f - f(x)|\,d\mu \le 2M\mu(A_\alpha) + \alpha\mu(A \setminus A_\alpha) \le 2M\varepsilon\mu(A) + \alpha\mu(A).$$

Выбрав $\alpha = \varepsilon$ и положив $\varepsilon' = \varepsilon/(2M + 1)$, заключаем, что
$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - f(x)|\,d\mu < \varepsilon',$$
поэтому супремум сколь угодно мал при $A \to x$. □

Следствие 8.21. *Пусть $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — локально ограниченная μ-измеримая функция. Тогда соотношение*
$$f(x) = (\mathcal{V}) \lim_{A\to x} \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\,d\mu$$
выполнено почти всюду.

Справедлив следующий общий результат.

Теорема 8.22 (A. Denjoy, Н. Лузин)**.** *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ измерима и почти всюду конечна, тогда и только тогда, когда она почти всюду аппроксимативно непрерывна на P.*

8.3 Необходимые свойства интеграла Лебега

Некоторые свойства интеграла Лебега уже были перечислены в 5.26. Нам понадобится еще несколько.

Пусть μ — внешняя мера на X, $Y \subset X$ — произвольное подмножество, и $f\colon Y \to \mathbb{R}$ — функция, измеримая относительно меры μ_Y. Тогда величина

$$\int_Y f\, d\mu_Y$$

называется *интегралом от функции f по подмножеству Y*. В частности, если функция f определена и измерима на всем X, и Y — измеримое подмножество, то $f|_Y$ измерима относительно $\mu|_Y$, и определен интеграл от f по Y. В этом случае (проверьте)

$$\int_Y f|_Y\, d\mu_Y = \int_X f\chi_Y\, d\mu.$$

Упражнение 8.23. Пусть μ — внешняя мера на X, $Y \subset X$ — измеримое подмножество, и $f\colon X \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция. Проверить, что интеграл по мере μ обладает следующими свойствами:

(1) Для любого измеримого подмножества $A \subset Y$ имеет место аддитивность по множествам:

$$\int_Y f\, d\mu = \int_{Y\setminus A} f\, d\mu + \int_A f\, d\mu.$$

(2) Для любой ограниченной интегрируемой функции $f\colon Y \to \mathbb{R}$, $\bigl|f(x)\bigr| \le M$, $x \in Y$, выполнено

$$\Bigl|\int_Y f\, d\mu\Bigr| \le M\mu(Y).$$

(3) Для любого не более чем счетного дизъюнктного семейства измеримых множеств $\{Y_i\}$, $Y_i \subset X$, $Y = \cup_i Y_i$, выполнено:

$$\int_Y f\, d\mu = \sum_i \int_{Y_i} f\, d\mu,$$

причем из существования интеграла в правой части вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость интегралов в левой части, и наоборот.

Следующее утверждение обобщает 8.61 (2) и называется теоремой об *абсолютной непрерывности интеграла Лебега.*

Утверждение 8.24. *Пусть f — μ-измеримая функция, суммируемая на $A \subset X$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого подмножества $E \subset A$, $\mu(E) < \delta$ выполнено*

$$\Bigl|\int_A f\, d\mu\Bigr| \le \varepsilon.$$

Доказательство. Если функция f ограничена, то утверждение вытекает из 8.61 (2). В общем случае положим:

$$A_n = \bigl\{x \in A : n \le \bigl|f(x)\bigr| < n+1\bigr\}, \quad B_N = \cup_{n=0}^N A_n, \quad C_N = A \setminus B_N.$$

Заметим, что все указанные множества измеримы. Из 8.61 (3) и 5.26 (9),

$$\int_A \bigl|f(x)\bigr|\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} \bigl|f(x)\bigr|\, d\mu,$$

причем ряд справа сходится. Выберем N так, что

$$\sum_{i=N+1}^\infty \int_{A_i} \bigl|f(x)\bigr|\, d\mu = \int_{C_N} \bigl|f(x)\bigr|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

и выберем $0 < \delta < \varepsilon/(2N+2)$. Тогда, если $\mu(E) < \delta$, то

$$\Bigl|\int_E f\, d\mu\Bigr| \le \int_E |f|\, d\mu = \int_{E\cap B_N} |f|\, d\mu + \int_{E\cap C_N} |f|\, d\mu.$$

Функция f ограничена на B_N, поэтому первый интеграл справа не превосходит $(N+1)\mu(B_N \cap \varepsilon) < \varepsilon/2$ в силу 8.61 (2), а второй — не превосходит интеграла по всему множеству C_N и, значит, тоже не превосходит $\varepsilon/2$. В итоге,

$$\Big|\int_E f\,d\mu\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

8.4 Скорость и длина липшицевой кривой

Пусть X — метрическое пространство. *Кривой* в X называется непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to X$. Конечная последовательность точек $\gamma(t_0),\dots,\gamma(t_k)$, где $t_0,\dots,t_k$ — разбиение отрезка $[a,b]$, называется *пунктиром* кривой γ или *вписанной ломаной*. Величина $\sum_i \big|\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})\big|$ называется *длиной* ломаной или пунктира. *Длина кривой* определяется как супремум длин вписанных ломаных. Будем обозначать длину кривой γ через $\ell(\gamma)$. Кривая называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Упражнение 8.25. Проверить, что так определенная длина кривой обладает следующими свойствами:

(1) Любая липшицева кривая спрямляема.

(2) Для любого $c \in [a,b]$ выполнено: $\ell(\gamma) = \ell\big(\gamma|_{[a,c]}\big) + \ell\big(\gamma|_{[c,b]}\big)$.

(3) Пусть $\tau \in [a,b]$. Тогда функция $f(t) = \ell\big(\gamma|_{[a,t]}\big)$ непрерывна.

(4) При стремлении диаметра разбиения к нулю длина вписанной ломаной стремится к длине кривой.

(5) Длина кривой не меняется при монотонной замене параметризации. Для любой кривой существует *натуральная параметризация*, т.е. такая параметризация $\gamma\colon [0,L] \to X$, что для любого $[a,b] \subset [0,L]$ выполнено $\ell\big(\gamma|_{[a,b]}\big) = b - a$.

Верхней и, соответственно, *нижней скоростью кривой γ в момент* t_0 называются величины

$$\bar{s}_\gamma(t_0) = \limsup_{t\to t_0} \frac{|\gamma(t)\gamma(t_0)|}{|t-t_0|}, \qquad \underline{s}_\gamma(t_0) = \liminf_{t\to t_0} \frac{|\gamma(t)\gamma(t_0)|}{|t-t_0|}.$$

Если $\bar{s}_\gamma(t_0) = \underline{s}_\gamma(t_0)$, то величина

$$s_\gamma(t_0) = \bar{s}_\gamma(t_0) = \underline{s}_\gamma(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{|\gamma(t)\gamma(t_0)|}{|t-t_0|}$$

называется *скоростью кривой γ в момент t_0*.

Утверждение 8.26. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to X$ — липшицева кривая, X — сепарабельное метрическое пространство, и μ — одномерная мера Лебега на $[a,b]$. Тогда функция s_γ определена μ-почти всюду, μ-измерима, и*

$$\ell(\gamma) = \int_{[a,b]} s_\gamma\,d\mu.$$

Доказательство. Верхняя скорость кривой всюду определена (как верхний предел) и ограничена сверху константой Липшица кривой γ. При этом на любом отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ она представима в виде верхнего предела последовательности непрерывных функций

$$\bar{s}_\gamma(t) = \limsup_{\delta\in\mathbb{Q},\,\delta\to 0} \frac{\big|\gamma(t)\gamma(t+\delta)\big|}{|\delta|}, \quad \delta < \varepsilon.$$

Действительно, для каждого t величина $\bar{s}_\gamma(t)$ является пределом последовательности

$$\frac{\big|\gamma(t)\gamma(t+\delta_i)\big|}{|\delta_i|}$$

для некоторой последовательности $\delta_i \to 0$. В силу непрерывности функции $f(\delta) = \big|\gamma(t)\gamma(t+\delta)\big|/|\delta|$ при $\delta \neq 0$, все δ_i можно выбрать рациональными. Остается заметить, что при переходе от последовательности $\{\delta_i\}$ ко всем рациональным числам из окрестности нуля (при любой их нумерации), верхний предел не меняется. Поэтому, в силу 4.8, функция $\bar{s}_\gamma$ измерима на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ при каждом $\varepsilon > 0$. Выбрав $\varepsilon = 1/i$, начиная с достаточно большого i, и продолжив нулем на $[a,b]$ функцию $\bar{s}_\gamma$, определенную на $[a+1/i, b-1/i]$, получим последовательность измеримых на $[a,b]$ функций, которая сходится к $\bar{s}_\gamma$ на интервале (a,b). В силу 4.8, $\bar{s}_\gamma$ измерима на интервале (a,b) и, значит, на отрезке $[a,b]$. Измеримость $\underline{s}_\gamma$ доказывается точно так же. Так как обе эти функции неотрицательны, то они интегрируемы в силу 5.26 (2).

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\int_{[a,b]} \bar{s}_\gamma \, d\mu = \int_{[a,b]} \underline{s}_\gamma \, d\mu = \ell(\gamma).$$

Действительно, так как $\ell(\gamma)$ конечна в силу 8.25 (1), а, значит, конечны интегралы, то применимы результаты 5.26 (3), (5), (10), так что из равенства интегралов следует $\bar{s}_\gamma \overset{\text{п.в.}}{=} \underline{s}_\gamma$. Таким образом, скорость s_γ определена почти всюду, μ-измерима, интегрируема, и интеграл от s_γ равен $\ell(\gamma)$.

Докажем равенство для интеграла от верхней скорости, для нижней доказательство аналогично. По 8.18, измеримая функция $\bar{s}_\gamma$ аппроксимативно непрерывна почти всюду на $[a,b]$ относительно меры Лебега μ и покрытия Витали, порожденного всеми невырожденными отрезками (здесь мы использовали сепарабельность X). Пусть $A \subset [a,b]$ — множество всех точек аппроксимативной непрерывности функции $\bar{s}_\gamma$, а C — некоторая константа Липшица для γ. Фиксируем произвольное положительное ε, и выберем такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что длины вписанных ломаных, соответствующих разбиениям отрезка $[a,b]$ с диаметром меньшим δ, больше чем $\ell(\gamma) - \varepsilon$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{T}(\varepsilon)$, состоящее из невырожденных отрезков $I_{tt'} \subset [a,b]$ с концами в точках t и t' и удовлетворяющих следующим свойствам:

(1) $|t-t'| < \delta$;

(2) $\left|\dfrac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t-t'|} - \bar{s}_\gamma(t)\right| < \varepsilon$;

(3) $\mu\Big(\big\{x \in I_{tt'} : |\bar{s}_\gamma(x) - \bar{s}_\gamma(t)| > \varepsilon\big\}\Big) < \varepsilon|t-t'|$.

Покажем, что семейство $\mathcal{T}(\varepsilon)$ является покрытием множества A отрезками, сгущающимися к каждой точке. Заметим, что, по определению верхнего предела, для каждой точки $t \in [a,b]$ найдется сколь угодно короткий отрезок с концом в t, удовлетворяющий свойствам (1) и (2). Если при этом $t \in A$, то для достаточно коротких отрезков $I_{tt'}$ выполнено и свойство (3), так как плотность множества $D_\varepsilon = \big\{x \in I_{tt'} : |\bar{s}_\gamma(x) - \bar{s}_\gamma(t)| > \varepsilon\big\}$ в точке t равна нулю по определению аппроксимативной непрерывности, поскольку $D_\varepsilon = I_{tt'} \setminus \bar{s}_\gamma^{-1}\big([\bar{s}_\gamma(t)-\varepsilon, \bar{s}_\gamma(t)+\varepsilon]\big)$. Таким образом, семейство $\mathcal{T}(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям 3.42 и, поэтому, является покрытием Витали.

Из измеримости $\bar{s}_\gamma$ следует, что множество D_ε измеримо для каждого отрезка $I_{tt'} \in \mathcal{T}(\varepsilon)$. Кроме того, из ограниченности функции $\bar{s}_\gamma$ вытекает, что интеграл от нее по любому измеримому подмножеству отрезка $[a,b]$ конечен. По 8.61 (1), имеем:

$$\int_{I_{tt'}} \bar{s}_\gamma \, d\mu = \int_{I_{tt'} \setminus D_\varepsilon} \bar{s}_\gamma \, d\mu + \int_{D_\varepsilon} \bar{s}_\gamma \, d\mu,$$

и, в силу 5.26 (6) и (1), первый интеграл отличается от $\bar{s}_\gamma(t)|t-t'|$ не более чем на $\varepsilon|t-t'|$, а второй интеграл не превосходит $C\varepsilon|t-t'|$, так как $0 \le \bar{s}_\gamma \le C$, а $\mu(D_\varepsilon) \le \varepsilon|t-t'|$. В свою очередь, из свойства (2) следует, что $\big||\gamma(t)\gamma(t')| - \bar{s}_\gamma(t)|t-t'|\big| < \varepsilon|t-t'|$, поэтому

$$\Big|\int_{I_{tt'}} \bar{s}_\gamma \, d\mu - \big|\gamma(t)\gamma(t')\big|\Big| \le C\varepsilon|t-t'| + 2\varepsilon|t-t'| = (C+2)\varepsilon|t-t'|.$$

Выберем из покрытия Витали $\mathcal{T}(\varepsilon)$ счетное дизъюнктное семейство, покрывающее почти все A и, значит, почти все $[a,b]$, а в нем — конечный набор $\{I_{t_i t_i'}\}$, сумма длин отрезков которого больше чем $b-a-\varepsilon$. Тогда

$$\Big|\int_{[a,b]} \bar{s}_\gamma \, d\mu - \sum_i \int_{I_{t_i t_i'}} \bar{s}_\gamma \, d\mu\Big| \le C\varepsilon,$$

а, в силу предыдущего неравенства,

$$\Big|\int_{[a,b]} \bar{s}_\gamma\, d\mu - \sum_i \big|\gamma(t_i)\gamma(t_i')\big|\Big| \le C\varepsilon + (C+2)\varepsilon|b-a|.$$

Дополним, если нужно, множество точек $\{t_i, t_i'\}$ до вписанной ломаной такой, что диаметр соответствующего разбиения меньше δ (при этом мы не будем вставлять точки между t_i и t_i'). Длина кривой $\ell(\gamma)$ отличается от длины этой ломаной не больше чем на ε (так мы выбрали δ). С другой стороны, длина этой ломаной отличается от $\sum_i \big|\gamma(t_i)\gamma(t_i')\big|$ не больше чем на εC. Таким образом,

$$\Big|\int_{[a,b]} \bar{s}_\gamma\, d\mu - \ell(\gamma)\Big| \le \big(2C + 1 + (C+2)|b-a|\big)\varepsilon,$$

поэтому, в силу произвольности ε,

$$\int_{[a,b]} \bar{s}_\gamma\, d\mu = \ell(\gamma).$$

□

8.5 Формула Ньютона–Лейбница и интегрирование по частям в интеграле Лебега

Лемма 8.27. *Липшицева функция одного переменного дифференцируема почти всюду.*

Доказательство. Пусть сначала $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая липшицева функция. Отображение f можно рассматривать как липшицеву кривую. Скорость этой кривой в точке t имеет вид

$$s_f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}.$$

В силу утверждения 8.26, этот предел существует почти всюду, а, с другой стороны, этот предел совпадает с классическим определением производной. Поэтому монотонная липшицева функция дифференцируема почти всюду.

В общем случае мы представим произвольную липшицеву функцию f с липшицевой константой C в виде суммы монотонной функции $g(x) := f(x) + 2Cx$ и линейной функции $h(x) := -2Cx$. □

8.5.1 Монотонные функции и теорема Лебега о производной монотонной функции

На самом деле, имеет место более общая теорема.

Теорема 8.28 (Лебег)**.** *Монотонная функция, определенная на отрезке, имеет почти всюду на этом отрезке конечную производную.*

Чтобы доказать эту теорему нам понадобятся некоторые свойства монотонных функций.

Конструкция 8.29. Пусть $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$ — не более чем счетное множество точек, и каждой точке x_n поставлено в соответствие положительное число h_n, причем $\sum_n h_n < \infty$. Положим

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

Построенная функция называется *функцией скачков.*

Упражнение 8.30. Проверить следующие свойства функций скачков.

(1) Функция скачков монотонно неубывающая.

(2) Функция скачков непрерывна слева в каждой точке, множество ее точек разрыва совпадает с множеством $\{x_n\}$, и скачок в x_n равен h_n.

Пример 8.31. Пусть $\{x_n\}$ — множество всех рациональных точек на отрезке $[0,1]$, а $h_n = 1/2^n$. Тогда соответствующая функция скачков разрывна в каждой рациональной и непрерывна в каждой иррациональной точке.

Утверждение 8.32. (1) *Монотонная функция на отрезке измерима, ограничена и, следовательно, интегрируема.*

(2) *Монотонная функция может иметь разрывы только первого рода.*

(3) *Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.*

(4) *Всякая монотонная функция, непрерывная слева, может быть представлена как сумма непрерывной монотонной функции и функции скачков (тоже непрерывной слева), причем единственным образом.*

Доказательство. Пусть f — монотонно неубывающая функция на отрезке $[a,b]$.

(1.) Действительно, прообраз каждого луча или пуст, или представляет собой отрезок ил полуинтервал, т.е. измерим, поэтому f измерима. Ограниченность очевидна: $f(x)$ лежит между $f(a)$ и $f(b)$, отсюда вытекает суммируемость.

(2.) Действительно, пусть $x_0 \in [a,b]$, и $\{x_n\} \subset [a,b]$ — последовательность такая, что $x_n < x_0$ и $x_n \to x_0$. Тогда $\bigl\{f(x_n)\bigr\}$ — ограниченная последовательность, поэтому она имеет предельную точку. Наличие двух предельных точек противоречило бы монотонности (нашлись бы подпоследовательности, значения на которых сходились бы к разным значениям и, поэтому, на объединении этих подпоследовательностей нарушилась бы монотонность), поэтому предельная точка единственна, т.е. существует предел слева $\lim_{x\to x_0-} f(x)$. Аналогично доказывается существование предела справа.

(3.) Действительно, обозначим через $\delta(x_0)$ скачок функции f в точке x_0, т.е. разность правого и левого пределов f в x_0. Тогда сумма $\delta(x_0)$ по всем точкам разрыва не превосходит $f(b) - f(a)$, поэтому множество точек разрыва, в которых величина скачка больше чем $1/n$ конечно для любого n, поэтому множество точек разрыва не более чем счетно.

(4.) Пусть $\{x_i\}$ — точки разрыва функции f, а $h_i = \delta(x_i)$. Положим

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n,$$

тогда $g = f - H$ — непрерывная монотонная функция. □

Для доказательства теоремы Лебега 8.28 удобно ввести следующие обозначения. Положим:

$$\limsup_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \Lambda_+(f), \qquad \liminf_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda_+(f)$$

и

$$\limsup_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \Lambda_-(f), \qquad \liminf_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda_-(f).$$

Очевидно, $\lambda_+(f) \le \Lambda_+(f)$, причем, если эти величины конечны и равны, то их общее значение называется правой производной функции. Для величин с минусом — аналогично. Эти величины называются *верхними* и *нижними левыми* и *правыми производными числами*, соответственно.

Для доказательства теоремы 8.28 достаточно показать, что для монотонной на отрезке функции f почти всюду имеет место соотношение

$$-\infty < \lambda_-(f) = \lambda_+(f) = \Lambda_-(f) = \Lambda_+(f) < \infty.$$

Упражнение 8.33. Выяснить, как связаны производные числа функции $h(x) = -f(x)$ с производными числами функции f. Тот же вопрос для $g(x) = f(-x)$.

Положим

$$g(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} g(x), \qquad g(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} g(x), \qquad g(x_0\pm) = \max\bigl\{g(x_0), g(x_0+), g(x_0-)\bigr\}.$$

Пусть $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая на $[a,b]$ разрывы только первого рода. Точка $x_0 \in [a,b]$ называется *точкой, невидимой справа для функции* g, если существует такая точка $\xi \in (x_0, b]$, что $g(\xi) > g(x_0\pm)$ (неформально,“гора” $g(\xi)$ “заслоняет” $g(x_0)$ от наблюдателя, находящегося справа).

Лемма 8.34 (Riesz). *Для любой функции $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, имеющей на $[a,b]$ разрывы только первого рода, множество точек, невидимых справа, открыто на отрезке $[a,b]$, поэтому оно может быть представлено в виде объединения конечного или счетного семейства попарно непересекающихся открытых шаров (интервалов (a_k, b_k) и, возможно, полуинтервала, содержащего a). При этом, в концевых точках этих интервалов выполнено $g(a_k+) \le g(b_k\pm)$.*

Доказательство. Если x_0 — точка непрерывности функции g, то, так как неравенство $g(\xi) > g(x_0)$, определяющее невидимость, — строгое, то найдется окрестность точки x_0, для каждой точки которой выполнено то же неравенство. Если же x_0 — точка разрыва, то, по условию, это — разрыв первого рода, т.е., существуют левый и правый пределы, каждый из которых, вместе с $g(x_0)$, строго меньше чем $g(\xi)$. Но тогда те же неравенства выполнены в некоторой левой и правой окрестностях точки x_0 и в самой точке x_0, а значит и в некоторой целой окрестности точки x_0. Таким образом, множество невидимых справа точек открыто.

Пусть (a_k, b_k) один из максимальных по включению интервалов, составляющих множество невидимых справа точек.

Предположим, что $g(a_k+) > g(b_k\pm)$. Из существования правого предела g в a_k следует, что существует внутренняя точка $x_0 \in (a_k, b_k)$, для которой $g(x_0) > g(b_k\pm)$. Пусть $x^* = \sup\bigl\{x \in (a_k, b_k) : g(x) \ge g(x_0)\bigr\}$. Тогда $g(x^*-) \ge g(x_0) > g(b_k\pm)$, поэтому $x^* \ne b_k$ и, значит, $x^* \in (a_k, b_k)$ — невидимая справа точка для g. Поэтому, по определению, существует $\xi > x^*$, для которой $g(\xi) > g(x^*\pm) \ge g(x_0)$. При этом точка ξ не может лежать на интервале (a_k, b_k), так как $g(\xi) \ge g(x_0)$, но это противоречит определению x^* как супремуму точек из (a_k, b_k) с таким свойством. С другой стороны, если $\xi > b_k$, то b_k невидима справа, что также невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Упражнение 8.35. Проверьте, что на самом деле для непрерывной функции g выполнено $g(a_k) = g(b_k)$, если $a_k > a$.

Упражнение 8.36. Точка $x_0 \in [a,b]$ называется *точкой, невидимой слева для функции* g, если существует такая точка $\xi \in [a, x_0)$, что $g(\xi) > g(x_0\pm)$. Доказать аналог леммы 8.34 для множества невидимых слева точек функции с разрывами только первого рода (неравенство будет иметь вид $g(a_k\pm) \ge g(b_k-)$).

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы Лебега 8.28. Для определенности, рассмотрим случай непрерывной монотонно неубывающей функции. Как мы уже выяснили, достаточно проверить, что

$$-\infty < \lambda_- = \lambda_+ = \Lambda_- = \Lambda_+ < \infty.$$

Лемма 8.37. *Достаточно проверить, что*

$$\Lambda_+ < \infty, \qquad \text{и} \qquad \lambda_- \ge \Lambda_+.$$

Доказательство. Действительно, наряду с неубывающей функцией $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ рассмотрим функцию $g(x) = -f(-x)$. Тогда $g\colon [-b,-a] \to \mathbb{R}$ — тоже неубывающая функция, причем, см. 8.33, $\Lambda_+(g) = \Lambda_-(f)$ и $\lambda_-(g) = \lambda_+(f)$. Поэтому, если для g имеем: $\lambda_-(g) \ge \Lambda_+(g)$, то $\lambda_-(g) = \lambda_+(f) \ge \Lambda_-(f) = \Lambda_+(g)$, откуда для f (снова в предположении, что $\Lambda_+(f) \le \lambda_-(f)$) заключаем, что

$$\Lambda_+(f) \le \lambda_-(f) \le \Lambda_-(f) \le \lambda_+(f) \le \Lambda_+(f),$$

откуда и вытекает требуемое равенство и конечность всех производных чисел. □

Лемма 8.38. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая функция. Тогда $\Lambda_+(f) < \infty$ почти всюду.*

Доказательство. Так как множество точек разрыва функции f не более чем счетно и, значит, имеет меру ноль, достаточно рассмотреть только точки непрерывности функции f. Пусть x_0 — точка непрерывности функции f, в которой $\Lambda_+ = \infty$. Последнее означает, что для любого $C > 0$ найдется такая точка $\xi > x_0$, что

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > C,$$

т.е.

$$f(\xi) - f(x_0) > C(\xi - x_0),$$

или

$$f(\xi) - C\xi > f(x_0) - Cx_0.$$

Таким образом, точка x_0 невидима справа для функции $g_C(x) = f(x) - Cx$ (мы воспользовались непрерывностью в x_0), поэтому по Лемме Рисса 8.34 множество таких точек открыто, и на концах образующих его интервалов (a_k, b_k) выполнено неравенство

$$f(a_k) - Ca_k = g_C(a_k) \le g(a_k+) \le g(b_k\pm) = f(b_k+) - Cb_k,$$

т.е.,

$$C(b_k - a_k) \le f(b_k+) - f(a_k).$$

Разделим на C, просуммируем по всем интервалам (a_k, b_k), и получим, воспользовавшись монотонностью f:

$$\sum_k (b_k - a_k) \le \sum_k \frac{f(b_k+) - f(a_k)}{C} \le \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

Остается заметить, что C можно выбрать сколь угодно большим, поэтому множество точек x_0 непрерывности функции f, в которых правое верхнее производное число бесконечно, можно покрыть интервалами, сумма длин которых сколь угодно мала. Поэтому, мера этого множества равна нулю. А значит равна нулю и мера объединения этого множества с множеством точек разрыва функции f. Лемма доказана. $\square$

Лемма 8.39. *Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая функция. Тогда $\lambda_-(f) \ge \Lambda_+(f)$ почти всюду.*

Доказательство. Снова ограничимся рассмотрением точек непрерывности функции f и воспользуемся, фактически, тем же трюком с леммой Рисса. Рассмотрим пару рациональных чисел $0 < c < C < \infty$, положим $\rho = c/C < 1$, и $E_{cC} = \big\{x : f \in C(x),\ \lambda_-(f) < c \text{ и } \Lambda_+(f) > C\big\}$. Достаточно показать, что $\mu(E_{cC}) = 0$, так как множество точек непрерывности, где $\lambda_-(f) < \Lambda_+(f)$ представимо в виде не более чем счетного объединения множеств вида E_{cC}.

Лемма 8.40. *Для любого интервала $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ выполнено*

$$\mu\big(E_{cC} \cap (\alpha, \beta)\big) \le \rho(\beta - \alpha).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала множество всех точек непрерывности $x \in (\alpha, \beta)$, для которых $\lambda_-(f) < c$. Для каждой такой x найдется такое $\xi < x$, что

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c, \qquad \text{т.е.} \qquad f(\xi) - f(x) > c(\xi - x),$$

откуда $f(\xi) - c\xi > f(x) - cx$. Это означает, что точка x невидима слева для функции $f(x) - cx$ (см. 8.36), откуда множество таких точек x представимо в виде объединения не более чем счетного семейства попарно непересекающихся интервалов $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$, причем $f(\alpha_k\pm) - c\alpha_k \ge f(\beta_k-) - c\beta_k$, поэтому

$$f(\beta_k-) - f(\alpha_k+) = f(\beta_k-) - f(\alpha_k\pm) \le c(\beta_k - \alpha_k).$$

Теперь на каждом из интервалов (α_k, β_k) рассмотрим множество $G_k = \big\{x \in (\alpha_k, \beta_k) : f \in C(x),\ \Lambda_+(f) > C\big\}$. Для каждой такой точки x найдется такая $\xi > x$, что

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > C, \qquad \text{т.е.} \qquad f(\xi) - f(x) > C(\xi - x),$$

откуда $f(\xi) - C\xi > f(x) - Cx$. Это означает, что точка x невидима справа для функции $f(x) - x$, поэтому множество G_k представимо в виде объединения не более чем счетного семейства попарно не пересекающихся интервалов $(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) \subset (\alpha_k, \beta_k)$, причем $f(\alpha_{kj}+) - C\alpha_{kj} \le f(\beta_{kj}\pm) - C\beta_{kj}$, поэтому

$$f(\beta_{kj}+) - f(\alpha_{kj}+) = f(\beta_{kj}\pm) - f(\alpha_{kj}+) \ge C(\beta_{kj} - \alpha_{kj}).$$

Множество $E_{cC} \cap (\alpha, \beta)$ покрывается системой интервалов $\big\{(\alpha_{kj}, \beta_{kj})\big\}$, причем, так $(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) \subset (\alpha_k, \beta_k)$ для любого j, в силу монотонности имеем: $f(\beta_{kj}+) \le f(\beta_k-)$. Таким образом,

$$\sum_{k,j} (\beta_{kj} - \alpha_{kj}) \le \frac{1}{C} \sum_k \sum_j \big(f(\beta_{kj}+) - f(\alpha_{kj}+)\big) \le \frac{1}{C} \sum_k \big(f(\beta_k-) - f(\alpha_k+)\big) \le \frac{c}{C} \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \le \rho(\beta - \alpha).$$

Лемма доказана. $\square$

Теперь теорема следует из следующего упражнения.

Лемма 8.41. *Пусть измеримое подмножество A отрезка $[a,b]$ обладает следующим свойством: существует такое $0<\rho<1$, что для любого интервала $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ выполнено: $\mu\big(A\cap(\alpha,b)\big)\le\rho(\beta-\alpha)$. Тогда $\mu(A)=0$.*

Доказательство. Пусть $\mu(A)=t$. Тогда, так как мера Лебега борелевски регулярна, для любого $\varepsilon>0$ найдется открытое множество G, $A\subset G$, мера которого меньше чем $t+\varepsilon$. Множество G представляет собой объединение не более чем счетного семейства интервалов (a_k,b_k), при этом $\sum_k(b_k-a_k)<t+\varepsilon$. Положим $t_k=\mu\big(A\cap(a_k,b_k)\big)$. Тогда $t=\sum_k t_k$, а по условию $t_k\le\rho(b_k-a_k)$, откуда

$$t=\sum_k t_k\le\rho\sum(b_k-a_k)<\rho(t+\varepsilon),$$

поэтому, в силу произвольности $\varepsilon>0$, имеем $t\le\rho t$. Так как $\rho<1$ и $t\ge0$, заключаем, что $t=0$. □

□

Упражнение 8.42. Покажите, что производная монотонной функции — почти всюду определенная измеримая функция. (Представьте ее как поточечный предел последовательности)

8.5.2 Интеграл Лебега как функция от верхнего предела

Из абсолютной непрерывности интеграла Лебега 8.24 и теоремы Лебега 8.28 вытекает следующий результат.

Следствие 8.43. *Пусть f — измеримая суммируемая функция на отрезке $[a,b]$. Тогда функция*

$$F(x)=\int_a^x f\,d\mu$$

непрерывна и дифференцируема почти всюду.

Доказательство. Действительно, непрерывность — прямое следствие абсолютной непрерывности интеграла. Для доказательства дифференцируемости представим f в виде разности двух неотрицательных функций, $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$. Тогда F — разность двух монотонных функций, которые почти всюду дифференцируемы по теореме Лебега. □

Теорема 8.44. *Пусть f — измеримая суммируемая функция на отрезке $[a,b]$. Тогда почти всюду на $[a,b]$ имеет место равенство:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f\,d\mu=f(x).$$

Доказательство. Положим

$$F(x)=\int_a^x f\,d\mu.$$

Достаточно проверить, что $f(x)\ge F'(x)$ почти всюду. Действительно, если это неравенство доказано, то, рассмотрев $g(x)=-f(x)$ и заметив, что

$$\int_a^x(-f)\,d\mu=-F(x),$$

мы получим неравенство $-f(x)\ge-F'(x)$, т.е., $f(x)\le F'(x)$, что и требовалось.

Фиксируем рациональные $\alpha<\beta$, и положим

$$E_{\alpha\beta}=\big\{x: f(x)<\alpha<\beta<F'(x)\big\}.$$

Множество $E_{\alpha\beta}$ измеримо, так как измеримы f и F', см. 8.42. Достаточно показать, что мера каждого множества $E_{\alpha\beta}$ равна нулю.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега 8.24, найдется $\delta>0$ такое, что

$$\Big|\int_E f\,d\mu\Big|<\varepsilon$$

для каждого измеримого множества E, для которого $\mu(E) < \delta$.

Так как $E_{\alpha\beta} \subset [a, b]$, а мера μ — борелевская, то существует такое отрытое множество $G \subset [a, b]$, что $E_{\alpha\beta} \subset G$ и $\mu(G) < \mu(E_{\alpha\beta}) + \delta$.

Если $x \in E_{\alpha\beta}$, то $F'(x) > \beta$, поэтому для всех $\xi > x$ достаточно близких к x выполнено

$$\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} > \beta, \qquad \text{т.е.} \qquad F(\xi) - \xi\beta > F(x) - x\beta,$$

другими словами, точка x невидима справа для $F(x) - \beta x$ на любом из интервалов, составляющих G. Снова применим лемму Рисса и построим такое открытое множество $S = \cup_k (a_k, b_k)$, состоящее из попарно непересекающихся интервалов, что $E_{\alpha\beta} \subset S \subset G$ и

$$F(b_k) - \beta b_k \geq F(a_k) - \beta a_k, \qquad \text{т.е.} \qquad F(b_k) - F(a_k) \geq \beta(b_k - a_k),$$

поэтому, из аддитивности интеграла по множествам,

$$\int_{a_k}^{b_k} f\, d\mu \geq \beta(b_k - a_k).$$

Просуммируем по всем интервалам, получим

$$\int_S f\, d\mu \geq \beta\mu(S).$$

С другой стороны,

$$\int_S f\, d\mu = \int_{E_{\alpha\beta}} f\, d\mu + \int_{S \setminus E_{\alpha\beta}} f\, d\mu < \alpha\mu(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon \leq \alpha\mu(S) + \varepsilon,$$

где первое неравенство выполнено, так как $f(x) < \alpha$ на $E_{\alpha\beta}$, и $\mu(S \setminus E_{\alpha\beta}) < \delta$, а был δ выбран выше из условия абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Итак,

$$\alpha\mu(S) + \varepsilon > \int_S f\, d\mu \geq \beta\mu(S), \qquad \text{откуда} \qquad \mu(S) < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

Таким образом, измеримое множество $E_{\alpha\beta}$ можно поместить в открытое множество S сколь угодно малой меры. Поэтому $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$. $\square$

Формула Ньютона–Лейбница, вообще говоря, работает только в виде неравенства.

Утверждение 8.45. *Производная f' монотонно неубывающей на отрезке $[a, b]$ функции f суммируема, и*

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leq f(b) - f(a).$$

Доказательство. Производная функции f в точке x есть, по определению, предел выражения

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

при $h \to 0$ (чтобы это выражение имело смысл при всех $x \in [a, b]$ продолжим функцию f, положив $f(x) = a$ при $x \leq a$ и $f(x) = f(b)$ при $x \geq b$). Функция f монотонна, поэтому измерима и суммируема, значит такими же будут функции $\varphi_h(x)$ при каждом фиксированном h. Проинтегрировав, разбив в сумму интегралов и сделав замену $x + h = t$ в первом интеграле, получим:

$$\int_a^b \varphi_h(x)\, dx = \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)\, dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} f(t)\, dt - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(t)\, dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\, dx$$

Лемма 8.46. *Имеют место следующие соотношения*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f(t)\,dt = f(b), \qquad \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)\,dx = f(a+).$$

Доказательство. Первое равенство очевидно из нашего доопределения функции f вне отрезка. Чтобы доказать второе равенство, заметим, что формула из следствия 8.20 справедлива в точках аппроксимативной непрерывности функции. Переопределим монотонную функцию f в точке a, положив ее значение равным $f(a+)$. Тогда a — точка непрерывности переопределенной функции. Поэтому к ней применима формула из следствия 8.20. Остается заметить, что интегралы, стоящие под пределом, не изменились. $\square$

Применим теорему Фату 5.31 к последовательности функций $\varphi_{1/n}$. По этой теореме интеграл от предельной функции существует и оценивается сверху пределом интегралов. Получим:

$$\int_a^b f'(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_{1/n}(x)\,dx = f(b) - f(a+) \le f(b) - f(a),$$

где последнее неравенство следует из монотонности f. $\square$

Пример 8.47. Рассмотрим $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, определенную так: $f(x) = 0$, $0 \le x \le 1/2$, и $f(x) = 1$, $1/2 < x \le 1$. Тогда $f'(x) = 0$ при $x \ne 1/2$ и

$$0 = \int_a^b f'(x)\,dx < f(b) - f(a) = 1.$$

Упражнение 8.48. Постройте пример непрерывной монотонной функции, для которой производная равна нулю почти всюду, и для всех $x > a$ выполнено строгое неравенство

$$0 = \int_a^x f'(x)\,dx < f(x) - f(a).$$

Определение 8.49. Функция $f\colon [a,b] \to X$ называется *абсолютно непрерывной на отрезке*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $\big\{(a_i,b_i)\big\}_{i=1}^n$, $(a_i,b_i) \subset [a,b]$, суммарная длина которых не превосходит δ, выполнено

$$\sum_{i=1}^n \big|f(b_i) - f(a_i)\big| < \varepsilon.$$

Замечание 8.50. В определении абсолютно непрерывной функции можно заменить конченые суммы на не более чем счетные.

Утверждение 8.51. *Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — суммируемая функция. Тогда функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

рассматриваемая как функция верхнего предела, является абсолютно непрерывной на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $\big\{(a_i,b_i)\big\}_{i=1}^n$ — система непересекающихся интервалов, тогда

$$\sum_{i=1}^n \big|F(b_i) - F(a_i)\big| = \sum_{i=1}^n \Big|\int_{a_1}^{b_i} f(t)\,dt\Big| \le \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_i} \big|f(t)\big|\,dt = \int_{\cup_i (a_i,b_i)} \big|f(t)\big|\,dt.$$

Последнее выражение может быть сделано сколь угодно малым, благодаря абсолютной непрерывности интеграла Лебега 8.24. $\square$

Для доказательства теоремы Лебега 8.56 нам понадобится представить абсолютно непрерывную функцию как разность двух монотонных абсолютно непрерывных функций (Лемма 8.58). Функции, которые допускают представление в виде разности двух монотонных функций также образуют любопытный класс — это так называемые функции с *ограниченным изменением*.

Определение 8.52. Функция $f\colon [a,b] \to X$ со значениями в метрическом пространстве, называется *функцией с ограниченным изменением*, если существует такое C, что для любого разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ выполнено

$$\sum_i \bigl|f(x_i), f(x_{i-1})\bigr| \le C.$$

Точная верхняя грань этих сумм по всевозможным конечным разбиениям называется *полным изменением* функции f на отрезке $[a,b]$ и обозначается через $V_a^b[f]$.

Пример 8.53. Всякая монотонная вещественнозначная функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное изменение, причем $V_a^b[f] = \bigl|f(b) - f(a)\bigr|$.

Упражнение 8.54. Докажите следующие свойства функций с ограниченным изменением.

(1) Линейная комбинация с постоянными коэффициентами функций с ограниченным изменением сама имеет ограниченное изменение, т.е., эти функции образуют линейное пространство.

(2) $V_a^b[f] + V_b^c[f] = V_a^c[f]$.

(3) Функция $v(x) = V_a^x[f]$ монотонно неубывающая.

(4) Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда функция $v(x) - f(x)$ монотонно неубывающая.

(5) Всякая функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ с ограниченным изменением представима в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

Утверждение 8.55. *Абсолютно непрерывные функции обладают следующими свойствами.*

(1) *Линейная комбинация с постоянными коэффициентами абсолютно непрерывных функций есть абсолютно непрерывная функция, т.е., эти функции образуют линейное пространство.*

(2) *Абсолютно непрерывная функция имеет ограниченное изменение.*

(3) *Всякая абсолютно непрерывная функция представима как разность двух монотонно неубывающих абсолютно непрерывных функций (лемма 8.58).*

Доказательство. **(1.)** Первое свойство очевидно. **(2.)** Далее, из абсолютной непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$ вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что на каждом отрезке длины меньше δ полное изменение функции меньше ε. Разбив отрезок $[a,b]$ на конечное число отрезков, длины которых меньше чем δ, заключаем, что полное изменение функции на отрезке конечно (так как сума вариаций на подотрезках равна вариации на целом отрезке).

(3.) Как и всякая функция с ограниченной вариацией, абсолютно непрерывная функция f может быть представлена в виде $f = v - g$, где

$$v(x) = V_a^x[f], \qquad g(x) = v(x) - f(x)$$

неубывающие функции. Покажем, что каждая из этих двух функций абсолютно непрерывна. В силу первого свойства достаточно проверить это для v. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ для этого ε так, как в определении абсолютно непрерывной функции f. Выберем систему из n интервалов (a_k, b_k), суммарная длина которых меньше чем δ, и рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl(v(b_k) - v(a_k)\bigr). \tag{8.1}$$

Эта сумма представляет собой точную верхнюю грань величин

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} \bigl|f(x_{k,l}) - f(x_{k,l-1})\bigr| \tag{8.2}$$

по всевозможным конечным разбиениям $a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,m_i} = b_i$ интервалов (a_i, b_i). Так как сумма длин всех-всех интервалов $(x_{k,l-1}, x_{k,l})$ не превосходит суммы длин интервалов (a_k, b_k) и, значит, не превосходит δ, поэтому сумма (8.2) не превосходит ε в силу абсолютной непрерывности функции f. Таким образом, сумма (8.1), а значит и точная верхняя грань таких сумм, не превосходит ε, откуда v — абсолютно непрерывна. $\square$

Теорема 8.56 (Лебег)**.** *Производная $f = F'(x)$ абсолютно непрерывной функции F, заданной на отрезке $[a, b]$, суммируема на этом отрезке, и для каждого $x \in [a, b]$ выполнено:*

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Доказательство. Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 8.57. *Если производная абсолютно непрерывной монотонно неубывающей функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ равна нулю почти всюду, то эта функция постоянна.*

Доказательство. Так как f — непрерывна и монотонна, ее множество значений равно $\big[f(a), f(b)\big]$. Покажем, что если $f'(x) = 0$ почти всюду, то длина этого отрезка равна нулю.

Положим $E = \big\{x \in [a, b] : f'(x) = 0\big\}$ и $Z = [a, b] \setminus E$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем для него $\delta = \delta(\varepsilon)$ из определения абсолютной непрерывности. По предположению $\mu(Z) = 0$, поэтому его можно поместить в открытое множество меры, меньшей чем δ, а это множество представить в виде объединения не более чем счетной системы непересекающихся интервалов (a_k, b_k), суммарная длина которых меньше δ. Из абсолютной непрерывности f и выбора δ следует, что

$$\sum_k \big|f(b_k) - f(a_k)\big| \le \varepsilon,$$

поэтому $\mu\big(f(Z)\big) = 0$.

Теперь рассмотрим $E = [a, b] \setminus Z$. Пусть $x_0 \in E$. Тогда, так как $f'(x_0) = 0$, то для достаточно близких $x > x_0$ выполнено неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon,$$

откуда следует, что $\varepsilon x - f(x) > \varepsilon x_0 - f(x_0)$, т.е., точка x_0 невидима справа для $g(x) = \varepsilon x - f(x)$. Поэтому множество E можно представить в виде конечного или счетного семейства попарно непересекающихся отрезков (α_k, β_k) так, что $g(\alpha_k) \le g(\beta_k)$, т.е., $\varepsilon\alpha_k - f(\alpha_k) \le \varepsilon\beta_k - f(\beta_k)$, откуда

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \le \varepsilon(\beta_k - \alpha_k)$$

и поэтому

$$\sum_k f(\beta_k) - f(\alpha_k) \le \varepsilon \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \le \varepsilon(b - a).$$

Поэтому $\mu\big(f(E)\big) \le \varepsilon(b - a)$, откуда $\mu\big(f(E)\big) = 0$. Поэтому мы представили отрезок $\big[f(a), f(b)\big]$ в виде объединения двух множеств меры нуль, откуда $f(a) = f(b) = f(x)$ для любого x, что и требовалось. □

Лемма 8.58. *Любая абсолютно непрерывная функция представима в виде разности двух абсолютно непрерывных неубывающих функций.*

Вернемся к доказательству теоремы. В силу леммы 8.58 достаточно ограничиться случаем неубывающей функции. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = F(x) - \int_a^x f(t)\,dt,$$

и заметим, что она тоже не убывает. Действительно, для $b \ge x'' > x' \ge a$ по утверждению 8.45 имеем:

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = F(x'') - F(x') - \int_{x'}^{x''} F'(t)\,dt \ge 0.$$

Кроме того, Φ абсолютно непрерывна как разность двух абсолютно непрерывных функций, и $\Phi'(x) = 0$ почти всюду по теореме 8.44. Поэтому $\Phi(x)$ константа по лемме 8.57, равная, очевидно, $\Phi(a) = F(a)$. Теорема доказана. □

Замечание 8.59. По 8.51 интеграл Лебега, рассматриваемый как функция верхнего предела, абсолютно непрерывен, поэтому абсолютно непрерывные функции представляют собой в точности тот класс функций, производные которых существуют почти всюду, суммируемы, и для которых выполнена формула Ньютона–Лейбница.

Утверждение 8.60. *Каждая липшицева функция на $[a,b]$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $f\colon [a,b] \to X$ — липшицева функция с константой Липшица C. Для $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon/C$. Тогда для произвольного конечного семейства попарно непересекающихся интервалов $\big\{(a_k,b_k)\big\}$ получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \big|f(b_i) - f(a_i)\big| \le \sum_i C|b_i - a_i| \le C \sum_i |b_i - a_i| \le C\delta = \varepsilon.$$

$\square$

Упражнение 8.61. Пусть μ_k — стандартная k-мерная мера Лебега на $\mathbb{R}^k$. Проверьте, что $\mu_k = \mu_p \times \mu_{k-p}$, $1 \le p \le k-1$. Поэтому применима теорема Фубини, и, в частности,

$$\int f(x^1,\dots,x^n)\,d\mu_n = \int \Big(\int f(x^1,\dots,x^n)\,d\mu_1\Big) d\mu_{n-1},$$

где интегрирование во внутреннем интеграле происходит по переменной x^i, а во внешнем — по оставшимся переменным $x^1,\dots,x^{i-1},x^{i+1},\dots,x^n$.