# Тема 7

# Дифференцирование внешних мер.

В этом разделе мы определим операцию дифференцирования одной внешней меры по другой и докажем ряд формул, являющихся аналогами интегрально-дифференциального исчисления из математического анализа.

## 7.1 Первообразные

Мы начнем с определения внешних мер, которые будут играть роль первообразных от определяемых ниже производных одной меры по другой.

**Определение 7.1.** Пусть $X$ — топологическое пространство, а $\mu$ и $\nu$ — произвольные внешние меры на $X$. Положим

$$\nu_\mu(A) = \inf\{\nu(B) : B \in \mathcal{B}(X),\, \mu(A \setminus B) = 0\}.$$

**Замечание 7.2.** Множество в правой части определения 7.1 непусто, так как в качестве $B$ всегда можно выбрать $X$.

**Предложение 7.3.** *Пусть $\mu$ и $\nu$ — произвольные внешние меры на топологическом пространстве $X$. Тогда*

(1) *$\nu_\mu$ — внешняя мера на $X$;*

(2) *если $\mu(A) = 0$, то $\nu_\mu(A) = 0$;*

(3) *если $\mu(A \setminus B) = 0$, то $\nu_\mu(A) = \nu_\mu(A \cap B)$.*

(4) *для каждого $A \subset X$ существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu(A) = \nu(B)$;*

(5) *для каждого $A \in \mathcal{B}(X)$ существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $B \subset A$, $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu(A) = \nu(B)$;*

(6) *если $X$ — метрическое пространство, а $\nu$ — борелевская, то $\nu_\mu$ — также борелевская;*

(7) *если $X$ — метрическое пространство, а $\nu$ — борелевская, $A$ и $B$ — такие, как в (5), то для любого $S \in \mathcal{B}(X)$, $S \subset A$, имеем $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$;*

(8) *если $\mu$ — борелевская, $S \subset X$ — произвольное множество, $T \in \mathcal{B}(X)$, $S \subset T$, $\mu(S) = \mu(T) < \infty$, то $\nu_\mu(S) = \nu_\mu(T)$;*

(9) *если $\nu$ — борелевски регулярная, то $\nu_\mu \le \nu$.*

*Доказательство.* (1) Пусть $A = \emptyset$, тогда в качестве $B$ также можно взять $\emptyset$, поэтому $\nu_\mu(\emptyset) = 0$.

Пусть теперь $A \subset \cup_{i=1} A_i$. Мы должны показать, что $\nu_\mu(A) \le \sum_{i=1}^\infty \nu_\mu(A_i)$. По замечанию 7.2, для каждого $A_i$ имеется такое $B_i \in \mathcal{B}(X)$, что $\mu(A_i \setminus B_i) = 0$. Тогда $\mu\big(\cup_i (A_i \setminus B_i)\big) = 0$, поэтому если положить $B = \cup_i B_i \in \mathcal{B}(X)$, то $A \setminus B \subset \cup_i (A_i \setminus B_i)$ и, значит, $\mu(A \setminus B) = 0$ из монотонности внешней меры. Отсюда с очевидностью вытекает $\sigma$-субаддитивность функции $\nu_\mu$.

(2) Для такого $A$ в определении $\nu_\mu$ можно в качестве $B$ взять $\emptyset$.

(3) По пункту (2), $\nu_\mu(A \setminus B) = 0$, поэтому $\nu_\mu(A) \le \nu_\mu(A \cap B) + \nu_\mu(A \setminus B) = \nu_\mu(A \cap B)$. С другой стороны, $A \supset A \cap B$, поэтому $\nu_\mu(A) \ge \nu_\mu(A \cap B)$.

(4) По определению точной нижней грани, существует такая последовательность множеств $B_i \in \mathcal{B}(X)$, что $\mu(A \setminus B_i) = 0$ при каждом $i$ и $\nu(B_i) \leq \nu_\mu(A) + 1/i$. Положим $B = \cap_{i=1}^\infty B_i$, тогда $B \in \mathcal{B}(X)$ и

$$\mu(A \setminus B) = \mu\big(A \setminus \cap_{i=1}^\infty B_i\big) = \mu\big(\cup_{i=1}^\infty (A \setminus B_i)\big) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A \setminus B_i) = 0,$$

поэтому

$$\nu_\mu(A) \leq \nu(B) \leq \nu(B_i) \leq \nu_\mu(A) + 1/i.$$

Так как это неравенство выполняется для любого $i \in \mathbb{N}$, заключаем, что $\nu_\mu(A) = \nu(B)$.

(5) По пункту (4), существует $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu(A) = \nu(B)$. Так как $A \in \mathcal{B}(X)$, то $B' = A \cap B \subset A$ также принадлежит $\mathcal{B}(X)$. Кроме того, $\mu(A \setminus B') = \mu\big(A \setminus (A \cap B)\big) = \mu(A \cap B) = 0$, поэтому $\nu_\mu(A) \leq \nu(B') \leq \nu(B)$, откуда $\nu_\mu(A) = \nu(B')$, следовательно, $B'$ — искомое.

(6) Для доказательства воспользуемся теоремой 3.38. Пусть произвольные $A$, $B \subset X$ таковы, что $\operatorname{dist}(A, B) = r > 0$. Достаточно показать, что $\nu_\mu(A \sqcup B) = \nu_\mu(A) + \nu_\mu(B)$.

Положим $C = A \sqcup B$. Пусть $0 < \varepsilon < r/2$, тогда открытые $\varepsilon$-окрестности $U_\varepsilon(A)$ и $U_\varepsilon(B)$ множеств $A$ и $B$ не пересекаются. По пункту (4), существует $D \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(C \setminus D) = 0$ и $\nu_\mu(C) = \nu(D)$.

Положим $D_A = D \cap U_\varepsilon(A)$ и $D_B = D \cap U_\varepsilon(B)$, тогда $D_A$, $D_B \in \mathcal{B}(X)$ и $D_A \cap D_B = \emptyset$. Так как $\nu$ — борелевская внешняя мера, то

$$\nu(D) \geq \nu\Big(D \cap \big(U_\varepsilon(A) \sqcup U_\varepsilon(B)\big)\Big) = \nu(D_A \sqcup D_B) = \nu(D_A) + \nu(D_B).$$

Кроме того, $A \setminus D_A \subset C \setminus D$ и $B \setminus D_B \subset C \setminus D$, поэтому, из монотонности, $\mu(A \setminus D_A) \leq \mu(C \setminus D) = 0$ и $\mu(B \setminus D_B) \leq \mu(C \setminus D) = 0$, откуда $\nu_\mu(A) \leq \nu(D_A)$ и $\nu_\mu(B) \leq \nu(D_B)$. Суммируя полученные результаты, заключаем, что

$$\nu(D) = \nu_\mu(C) = \nu_\mu(A \sqcup B) \leq \nu_\mu(A) + \nu_\mu(B) \leq \nu(D_A) + \nu(D_B) \leq \nu(D),$$

откуда и заключаем требуемое.

(7) Заметим сначала, что

$$S \setminus (B \cap S) = S \setminus B \subset A \setminus B \text{ и } (A \setminus S) \setminus (B \setminus S) = (A \setminus B) \setminus S \subset A \setminus B,$$

поэтому, из монотонности, имеем $\mu\big(S \setminus (B \cap S)\big) = \mu\big((A \setminus S) \setminus (B \setminus S)\big) = 0$, откуда

$$\nu_\mu(S) \leq \nu(B \cap S) \text{ и } \nu_\mu(A \setminus S) \leq \nu(B \setminus S) \qquad (*)$$

в силу борелевости $S$. Далее, по пункту (6), внешняя мера $\nu_\mu$ — борелевская, поэтому

$$\nu_\mu(S) + \nu_\mu(A \setminus S) = \nu_\mu(A) = \nu(B) = \nu(B \cap S) + \nu(B \setminus S).$$

В силу неравенств (*), имеем $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$ и $\nu_\mu(A \setminus S) = \nu(B \setminus S)$ (впрочем, последнее равенство получается из предпоследнего заменой $S$ на $A \setminus S$).

(8) По пункту (4), существует $B \in \mathcal{B}(X)$, для которого $\mu(S \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu(S) = \nu(B)$. По упражнению 3.32, множество $T$ является $\mu$-оболочкой множества $S$, поэтому

$$\mu(T \setminus B) = \mu\big(T \cap (T \setminus B)\big) = \mu\big(S \cap (T \setminus B)\big) = \mu(S \setminus B) = 0,$$

поэтому $\nu_\mu(T) \leq \nu(B) = \nu_\mu(S)$. С другой стороны, так как $T \supset S$, имеем $\nu_\mu(T) \geq \nu_\mu(S)$.

(9) Выберем произвольное множество $S \subset X$. Так как $\nu$ — борелевски регулярна, существует такое $T \in \mathcal{B}(X)$, что $S \subset T$ и $\nu(S) = \nu(T)$. По определению $\nu_\mu$, имеем $\nu_\mu(T) \leq \nu(T)$ (так как в качестве $B$ можно выбрать $T$), поэтому $\nu_\mu(S) \leq \nu_\mu(T) \leq \nu(T) = \nu(S)$. □

**Теорема 7.4.** *Пусть $\mu$ и $\nu$ — борелевски регулярные внешние меры на метрическом пространстве $X$, причем $X$ является одновременно счетно $\mu$-измеримым и счетно $\nu$-измеримым. Тогда существует такое $B \in \mathcal{B}(X)$, что $\mu(X \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu = \nu_B$.*

*Доказательство.* Отметим, что для борелевски регулярной внешней меры на счетно измеримом $X$ всегда существует не более чем счетное покрытие $X$, состоящее из борелевских множеств конечной меры. Действительно, если $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ — покрытие $X$, составленное из измеримых множеств конечной меры, то для каждого $A_n$ имеется борелевское множество $B_n \supset A_n$ той же меры, поэтому $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ — искомое покрытие.

Пусть $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A'_n$, где $A_n,\, A'_n \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A_n) < \infty$ и $\nu(A'_n) < \infty$ при каждом $n$. Семейство, составленное из всех непустых $A_n \cap A'_m$, также не более чем счетно, все его элементы — борелевские множества, причем для каждого из них его $\mu$-мера и $\nu$-мера конечны. Тем самым, без ограничения общности, мы будем сразу предполагать, что $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A_n) < \infty$ и $\nu(A_n) < \infty$ при каждом $n$.

Далее, рассмотрим семейство непустых $A'_n = A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$, тогда это семейство дизъюнктно и состоит из борелевских множеств конечной $\mu$-меры, поэтому, без ограничения общности, будем сразу предполагать, что семейство $\{A_i\}$ дизъюнктно. Если мы докажем теорему для каждого $A_n$, найдя такое $B_n \in \mathcal{B}(X)$, что $B_n \subset A_n$, $\mu(A_n \setminus B_n) = 0$ и $(\nu_\mu)_{A_n} = \nu_{B_n}$, то $B = \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n$ будет искомым. Действительно,

$$\mu(X \setminus B) = \mu\big(\sqcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus B_n) = 0,$$

и для любого $S \subset X$, используя 3.20, получаем

$$\nu_\mu(S) = \nu_\mu\big(S \cap \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = (\nu_\mu)_S\big(\sqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_\mu)_S(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_\mu(S \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_\mu)_{A_n}(S) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{B_n}(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(S \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_S(B_n) = \nu_S(\sqcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \nu_S(B) = \nu(S \cap B) = \nu_B(S).$$

Итак, теорему достаточно доказать в предположении, что $\mu(X) < \infty$ и $\nu(X) < \infty$. Пусть эти условия выполняются. По 7.3 (7), существует $B \subset \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(X \setminus B) = 0$ и для любого $S \in \mathcal{B}(X)$ имеем $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$. Нам осталось проверить, что последнее условие выполняется для любого $S \subset X$, без предположения его борелевости.

Итак, выберем произвольное $S \subset X$. Так как $\mu$ и $\nu$ — борелевски регулярные внешние меры, существуют $T_1, T_2 \subset \mathcal{B}(X)$ такие, что $S \subset T_1 \cap T_2$, $\mu(S) = \mu(T_1)$ и $\nu(S) = \nu(T_2)$. Положим $T = T_1 \cap T_2$, тогда, как уже было отмечено, $S \subset T$; кроме того, $T \in \mathcal{B}(X)$ и, в силу монотонности, $\mu(S) = \mu(T)$, а $\nu(S) = \nu(T)$.

Так как $\mu(T) \le \mu(X) < \infty$, то применимо 7.3 (8), в силу которого $\nu_\mu(S) = \nu_\mu(T)$, откуда $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap T)$. Так как $\nu(T) \le \nu(X) < \infty$, то применимо 3.32, в соответствии с которым множество $T$ является $\nu$-оболочкой для $S$, поэтому $\nu(B \cap T) = \nu(S \cap T)$, что и завершает доказательство теоремы. □

**Следствие 7.5.** *Пусть $\mu$ и $\nu$ — борелевски регулярные внешние меры на метрическом пространстве $X$, причем $X$ является счетно $\mu$-измеримым и счетно $\nu$-измеримым. Обозначим через $B$ одноименное множество из теоремы 7.4. Тогда*

(1) *внешняя мера $\nu_\mu$ — борелевски регулярная, и $X$ — счетно $\nu_\mu$-измеримо;*

(2) *функция $\nu - \nu_\mu$ — также борелевски регулярная внешняя мера, причем $\nu - \nu_\mu = \nu_{X \setminus B}$ и $X$ — счетно $(\nu - \nu_\mu)$-измеримо;*

(3) *$\nu = \nu_\mu$, если и только если для любого $A \subset X$ такого, что $\mu(A) = 0$, выполняется $\nu(A) = 0$ (в этом случае говорят, что внешняя мера $\nu$* ***абсолютно непрерывна*** *относительно $\mu$). В частности, $\mu_\mu = \mu$.*

(4) *Если условие счетной измеримости для $\mu$ и $\nu$ заменить на условие того, что обе этих внешних меры конечны на ограниченных множествах, то последнее условие влечет счетную измеримость (а, значит, для таких внешних меры верны все предыдущие утверждения). Более того, внешние меры $\nu_\mu$ и $\nu - \nu_\mu$ также будут конечными на ограниченных множествах.*

*Доказательство.* (1) По теореме 7.4, имеем $\mu(X \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu = \nu_B$. По упражнению 3.47, $\nu_B$ и, значит, $\nu_\mu$ являются борелевски регулярными. Так как $X$ — счетно $\nu$-измеримо, то, как было отмечено в доказательстве теоремы 7.4, существует $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X)$ такое, что $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\nu(A_n) < \infty$ при каждом $n$. Но тогда $\nu_\mu(A_n) = \nu(B \cap A_n) \le \nu(A_n) < \infty$. Кроме того, при каждом $n$ имеем $A_n \sigma(\nu_\mu)$, так как $\nu_\mu$ — борелевская внешняя мера, поэтому $X$ — счетно $\nu_\mu$-измеримо.

(2) Так как $B$ является $\nu$-измеримым и $\nu_\mu$-измеримым, то для любого $S \subset X$ выполняется

$$\nu(S) = \nu(S \cap B) + \nu\big(S \cap (X \setminus B)\big) = \nu_\mu(S) + \nu_{X \setminus B}(S),$$

откуда $\nu_{X \setminus B} = \nu - \nu_\mu$, поэтому, в силу 3.47, $\nu - \nu_\mu$ является борелевски регулярной внешней мерой. То, что $X$ является счетно $(\nu - \nu_\mu)$-измеримым, доказывается так же, как и в пункте (1).

(3) По теореме 7.4, существует такое борелевское множество $B \subset X$, что $\mu(X \setminus B) = 0$ и $\nu_\mu = \nu_B$. Тогда для произвольного $S \subset X$ имеем $\nu(S) = \nu(S \cap B) + \nu\big(S \cap (X \setminus B)\big) = \nu_\mu(S) + \nu\big(S \cap (X \setminus B)\big)$, поэтому условие $\nu = \nu_\mu$ равносильно тому, что для любого $S \subset X$ выполняется $\nu\big(S \cap (X \setminus B)\big) = 0$. Последнее условие равносильно $\nu(X \setminus B) = 0$. Таким образом, если $\nu$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$, то $\nu(X \setminus B) = 0$ и, значит, $\nu_\mu = \nu_B$.

Обратно, если $\nu_\mu = \nu_B$, то $\nu(X \setminus B) = 0$ и, значит, $\nu(S) = \nu_\mu(S)$ для любого $S \subset X$. Пусть $S$ таково, что $\mu(S) = 0$, тогда, по 7.3 (2), имеем $\nu_\mu(S) = 0$, откуда $\nu(S) = 0$, что и требовалось.

(4) Условие счетной измеримости вытекает из того, что в качестве элементов $A_n$ не более чем счетного покрытия измеримыми множествами можно взять $A_n = U(x, n)$ для некоторой фиксированной точки $x \in X$.

Далее, если $A \subset X$ — ограниченное множество, то $\nu_\mu(A) = \nu_B(A) = \nu(B \cap A) < \infty$ и, следовательно, $\nu(A) - \nu_\mu(A) < \infty$. □

## 7.2 Производные

Выполняя разные операции над функциями, определенными на некотором множестве $X$, мы иногда приходим к функциям, заданным на меньшем множестве. Стандартный пример дает операция деления: если через $f$ обозначить функцию $f(x, y) = x/y$, то, в отличие, скажем, от сложения, она будет определена не на всем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а лишь на его части $\mathbb{R} \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$. Конечно, определяя такую $f$, можно "честно" написать область определения, которая, впрочем, является очевидной из контекста. Чтобы не отвлекаться на такие "мелочи", мы, вместо этого, будем писать $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{\text{p}}{\to} \mathbb{R}$ ("p" от "partial"). С подобной операцией мы уже столкнулись: это $f : X \overset{\text{п.в.}}{\to} Y$. Однако теперь нам не важна мера множества, на котором функция $f$ не определена.

**Определение 7.6.** Пусть $X$ и $Y$ — произвольные множества. Будем писать $f : X \overset{\text{p}}{\to} Y$, если область определения отображения $f$, которую мы обозначим через $\operatorname{dom} f$, может быть собственным подмножеством $X$. Такие $f$ будем называть *частично определенными.*

**Определение 7.7.** Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное семейство подмножеств множества $X$ и $Y \subset X$. Положим

$$\mathcal{F}(Y) = \{A \in \mathcal{F} : A \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Если $Y = \{x\}$, то для краткости будем писать $\mathcal{F}(x)$ вместо $\mathcal{F}\big(\{x\}\big)$. Кроме того, если $X$ — метрическое пространство, то для каждого $x \in X$ и $r > 0$ положим $\mathcal{F}_r(x) = \big\{A \in \mathcal{F}(x) : A \subset B(x, r)\big\}$, где, напомним, $B(x, r)$ — замкнутый шар радиуса $r$ с центром в точке $x$.

**Обозначение 7.8.** Пусть $X$ — метрическое пространство, $\mathcal{F}$ — произвольное семейство его подмножеств, $f : 2^X \overset{\text{p}}{\to} [-\infty, \infty]$ — частично определенная функция. Имея в виду соглашение $\inf \emptyset = \infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$, положим

$$(\mathcal{F}) \limsup_x f = (\mathcal{F}) \limsup_{A \to x} f(A) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup\big\{f(A) : A \in \mathcal{F}_\varepsilon(x) \cap \operatorname{dom} f\big\}.$$

Аналогично определяется $(\mathcal{F}) \liminf_x f$. Если $(\mathcal{F}) \limsup_x f = (\mathcal{F}) \liminf_x f$, то вместо них пишут $(\mathcal{F}) \lim_x f$.

**Определение 7.9.** Пусть $X$ — метрическое пространство, $\mathcal{F}$ — произвольное семейство его подмножеств, $x \in X$, а $\mu$ и $\nu$ — произвольные внешние меры на $X$. Тогда $\nu/\mu : 2^X \overset{\text{p}}{\to} [0, \infty]$. Если $(\mathcal{F}) \limsup_x(\nu/\mu) = (\mathcal{F}) \liminf_x(\nu/\mu)$, то положим

$$D(\nu, \mu, \mathcal{F})(x) = (\mathcal{F}) \lim_x (\nu/\mu).$$

Эту величину будем называть *$\mathcal{F}$-производной внешней меры $\nu$ по внешней мере $\mu$ в точке $x \in X$.*

## 7.3 Покрытие Витали

Как правило, в качестве $\mathcal{F}$ рассматривают достаточно специальные семейства. По аналогии с 1.6, дадим определение сгущающегося семейства подмножеств.

**Определение 7.10.** Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное семейство подмножеств метрического пространства $X$ и $x \in X$. Назовем $\mathcal{F}$ *сгущающимся в точке* $x$, если для каждого $r > 0$ существует такое $A \in \mathcal{F}$, что $x \in A \subset B(x, r)$. Таким образом, $\mathcal{F}$ сгущается в $x$, если и только если $\mathcal{F}_r(x) \neq \emptyset$ при каждом $r > 0$.

**Определение 7.11.** Пусть на метрическом пространстве $X$ задана внешняя мера $\mu$. Семейство $\mathcal{V}$ подмножеств $X$ называется *$\mu$-покрытием Витали*, если

(1) $X = \cup\mathcal{V}$ (семейство $\mathcal{V}$ является покрытием),

(2) $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}(X)$ (все множества семейств $\mathcal{V}$ — борелевские),

(3) семейство $\mathcal{V}$ сгущается в каждой точке $x \in X$, и

(4) для любого $Z \subset X$ и для любого $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ таких, что $\mathcal{C}(Z)$ сгущается в каждой точке $z \in Z$, в $\mathcal{C}$ имеется не более чем счетное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{D}$, для которого $\mu(Z \setminus \sqcup\mathcal{D}) = 0$.

**Пример 7.12.** Пусть $\mu$ — продолжение Лебега $n$-мерной меры Лебега и $\delta > 0$. Тогда $\mathcal{V}$, составленное из всех замкнутых невырожденных шаров, радиусы которых не превосходят $\delta$, является $\mu$-покрытие Витали в силу теоремы 2.28 (проверьте).

## 7.4 Существование производной почти всюду

Пусть $X$ — метрическое пространство, $\mathcal{R}(X)$ — множество всех борелевски регулярных внешних мер на $X$, причем таких, что мера каждого ограниченного множества конечна.

**Замечание 7.13.** По 7.5 (4), для любых $\mu$, $\nu \in \mathcal{R}(X)$ имеем $\nu_\mu \in \mathcal{R}(X)$ и $\nu - \nu_\mu \in \mathcal{R}(X)$. Кроме того, как было отмечено в доказательстве этого пункта, в качестве элементов не более чем счетного покрытия множества $X$ измеримыми множествами конечной меры можно выбрать открытые шары. Тем самым, для всех мер из $\mathcal{R}(X)$ применимо 3.39 (2), а также все утверждения раздела 7.1.

**Предложение 7.14.** *Пусть $\mu$, $\alpha$, $\beta \in \mathcal{R}(X)$, $0 < c < \infty$, и $\mathcal{V}$ — $\mu$-покрытия Витали. Тогда для любого $A \subset \big\{x : (\mathcal{V}) \liminf_x(\alpha/\beta) < c\big\}$ имеем $\alpha_\mu(A) \le c\,\beta_\mu(A)$.*

*Доказательство.* По определению меры $\beta_\mu$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B \in \mathcal{B}(X)$, что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\beta(B) \le \beta_\mu(A) + \varepsilon/2$. По замечанию 7.13, существует такое открытое множество $W \supset B$, что $\beta(W) \le \beta(B) + \varepsilon/2$. Таким образом, в силу монотонности внешней меры, $\mu(A \setminus W) \le \mu(A \setminus B) = 0$, т.е. $\mu(A \setminus W) = 0$, и $\beta(W) \le \beta_\mu(A) + \varepsilon$. По 7.3 (3), имеем также $\alpha_\mu(A) = \alpha_\mu(A \cap W)$.

Положим $\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{V} : S \subset W, \alpha(S)/\beta(S) < c\}$. Покажем, что $\mathcal{C}$ сгущается во всех точках $x \in A \cap W$. Действительно, в каждой такой точке конечен нижний предел $\liminf_x(\alpha/\beta)$, поэтому $\mathcal{V}(x)$ сгущается в $x$. Существует $\varepsilon > 0$, для которого $U_\varepsilon(x) \subset W$ и для всех $\delta \le \varepsilon$ существует $S \in \mathcal{V}(x)$ такое, что $S \subset U_\delta(x)$ и $\alpha(S)/\beta(S) < c$, т.е. $S \in \mathcal{C}_\delta(x)$. Тем самым, $\mathcal{C}$ сгущается в каждой точке $x \in A \cap W$.

По определению $\mu$-покрытия Витали, в $\mathcal{C}(A \cap W)$ имеется такое не более чем счетное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{G}$, что $\mu\big((A \cap W) \setminus \sqcup\mathcal{G}\big) = 0$, откуда, по определению $\alpha_\mu$, имеем $\alpha_\mu(A \cap W) \le \alpha(\sqcup\mathcal{G})$. Из сказанного выше, из борелевости внешних мер $\alpha$ и $\beta$, а также из того, что $\sqcup\mathcal{G} \subset W$, вытекает

$$\alpha_\mu(A) = \alpha_\mu(A \cap W) \le \alpha(\sqcup\mathcal{G}) = \sum_{S \in \mathcal{G}} \alpha(S) \le c \sum_{S \in \mathcal{G}} \beta(S) = c\,\beta(\sqcup\mathcal{G}) \le c\,\beta(W) \le c\,\big[\beta_\mu(A) + \varepsilon\big].$$

Осталось воспользоваться произвольностью $\varepsilon$. $\square$

**Следствие 7.15.** *Для любых $\alpha$, $\mu \in \mathcal{R}(X)$, любого $\mu$-покрытия Витали $\mathcal{V}$ и любого $0 < c < \infty$ имеем*

(1) *если $A \subset \{x \in X : (\mathcal{V}) \liminf_x(\alpha/\mu) < c\}$, то $\alpha_\mu(A) \le c\,\mu(A)$;*

(2) *если $A \subset \{x \in X : (\mathcal{V}) \limsup_x(\alpha/\mu) > c\}$, то $\alpha_\mu(A) \ge c\,\mu(A)$.*

*Доказательство.* По 7.5 (3), имеем $\mu_\mu = \mu$, так что (1) вытекает из 7.14.

Для доказательства (2) достаточно заметить, что $(\mathcal{V}) \limsup_x(\alpha/\mu) > c$ влечет $(\mathcal{V}) \liminf_x(\mu/\alpha) < 1/c$. Действительно, по определению $(\mathcal{V}) \limsup$, существует такое $r > 0$, что при каждом $0 < \varepsilon < r$ в $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ содержится $S_\varepsilon$, для которого $\alpha(S_\varepsilon)/\mu(S_\varepsilon) > c$. Но тогда для тех же $r$ и $\varepsilon$ выполняется $\mu(S_\varepsilon)/\alpha(S_\varepsilon) < 1/c$, откуда и вытекает требуемое. $\square$

**Теорема 7.16.** *Для любых $\mu$, $\nu \in \mathcal{R}(X)$ и произвольного $\mu$-покрытия Витали имеем*

$$0 \overset{п.в.}{\le} D(\nu, \mu, \mathcal{V}) \overset{п.в.}{<} \infty,$$

*где “почти всюду” рассматривается относительно меры $\mu$.*

*Доказательство.* Положим

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{V} : \mu(S) = 0\},\\
&P = \{x \in X : \mathcal{C} \text{ сгущается в } x\},\\
&Q = \{x \in X : (\mathcal{V}) \limsup_x (\nu/\mu) = \infty\},\\
&R(a,b) = \bigl\{x \in X : (\mathcal{V}) \liminf_x (\nu/\mu) < a < b < (\mathcal{V}) \limsup_x (\nu/\mu)\bigr\}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что производная $D(\nu,\mu,\mathcal{V})$ не определена или равна $\infty$ в точности на объединении $P$, $Q$ и всех $R(a,b)$, соответствующих парам рациональных чисел $a < b$.

Так как $\mathcal{C}$ сгущается в каждой точке $x \in P$, то, по определению 7.11, существует дизъюнктное не более чем счетное подсемейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$, для которого $\mu(P \setminus \sqcup\mathcal{G}) = 0$. Так как $\mathcal{G}$ состоит из множеств $\mu$-меры 0, имеем $\mu(\sqcup\mathcal{G}) = 0$, поэтому $\mu(P) \le \mu(P \setminus \sqcup\mathcal{G}) + \mu(\sqcup\mathcal{G}) = 0$.

Пусть $A \subset Q$ — произвольное ограниченное подмножество, тогда $\nu_\mu(A) < \infty$ по 7.5 (4). С другой стороны, в силу 7.15 (2), для любого $0 < c < \infty$ выполняется $\nu_\mu(A) \ge c\,\mu(A)$. Произвольность $c$ влечет $\mu(A) = 0$. Полагая $A_n = Q \cap U(x,n)$ и замечая, что $Q = \cup_{n=1}^\infty A_n$, получаем $\mu(Q) \le \sum \mu(A_n) = 0$.

Наконец, выберем произвольное ограниченное $A \subset R(a,b)$. Из 7.15 вытекает, что

$$b\,\mu(A) \le \nu_\mu(A) \le a\,\mu(A) < \infty.$$

Но $a < b$, поэтому $\mu(A) = 0$ и, аналогично доказанному выше, имеем $\mu\bigl(R(a,b)\bigr) = 0$. □

**Предложение 7.17.** *Для произвольных $\mu$, $\nu \in \mathcal{R}(X)$ и $\mu$-покрытия Витали $\mathcal{V}$, функция $f = D(\nu,\mu,\mathcal{V})$ является $\mu$-измеримой.*

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся 6.10. Для этого выберем произвольные $0 < a < b < \infty$. Мы должны показать, что для любого $T \subset X$ выполняется $\mu(T) \ge \mu\bigl(T \cap \{f < a\}\bigr) + \mu\bigl(T \cap \{f > b\}\bigr)$. В силу монотонности, это неравенство достаточно проверить для тех $T$, которые содержатся в $\{f < a\} \sqcup \{f > b\}$. Пусть мы выбрали такое $T$. Фиксируем $x \in X$ и положим $C_n = U(x,n)$, тогда $X = \cup_{n=1}^\infty C_n$ и $C_n \in \mathcal{B}(X)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A = T \cap \{f < a\}$, $B = T \cap \{f > b\}$, $A_n = A \cap C_n$, $B_n = B \cap C_n$, $T_n = T \cap C_n$, тогда $T_n$, $A_n$ и $B_n$ — ограниченные и $T_n = A_n \sqcup B_n$. В силу 3.20 и 3.17 (5), имеем

$$\mu(A_n) = \mu(A \cap C_n) = \mu_A(C_n) \to \mu_A(\cup_{n=1}^\infty C_n) = \mu_A(X) = \mu(A).$$

Аналогично доказывается, что $\mu(B_n) \to \mu(B)$ и $\mu(T_n) \to \mu(T)$. Таким образом, нам достаточно показать, что $\mu(T_n) \ge \mu(A_n) + \mu(B_n)$, т.е. проверить неравенство для ограниченных $A_n$, $B_n$ и $T_n$.

Итак, пусть $A \subset \{f < a\}$, $B \subset \{f > b\}$ — ограниченные множества. Мы должны показать, что $\mu(A \sqcup B) \ge \mu(A) + \mu(B)$. Так как $\mu$, $\nu$ и $\mu_\nu$ — борелевски регулярные, существуют такие борелевские $A' \supset A$ и $B' \supset B$, что $\mu(A') = \mu(A)$, $\nu(A') = \nu(A)$, $\nu_\mu(A') = \nu_\mu(A)$ и аналогично для $B$ и $B'$ (то, что $A'$ и $B'$ можно выбрать одними и теми же для всех внешних мер, мы уже показывали, например, в доказательстве теоремы 7.4).

По 3.32, $A'$ является $\nu_\mu$- и $\mu$-оболочкой $A$, а $B'$ — $\nu_\mu$- и $\mu$-оболочкой $B$, поэтому $\nu_\mu(A' \cap B') = \nu_\mu(A \cap B') = \nu_\mu(A' \cap B)$ и $\mu(A' \cap B') = \mu(A \cap B') = \mu(A' \cap B)$. Применяя 7.15, заключаем, что

$$
\begin{aligned}
&\nu_\mu(A' \cap B') = \nu_\mu(A \cap B') \le a\,\mu(A \cap B') = a\,\mu(A' \cap B'), \\
&\nu_\mu(A' \cap B') = \nu_\mu(A' \cap B) \ge b\,\mu(A' \cap B) = b\,\mu(A' \cap B'),
\end{aligned}
$$

и так как $a < b$ заключаем, что $\mu(A' \cap B') = 0$. Вспоминая, что $A \cup B \subset A' \cup B'$ и что $A'$, $B' \in \mathcal{B}(X)$, получаем

$$\mu\bigl((A \cup B) \cap B'\bigr) = \mu\bigl((A \cup B) \cap (B' \cap A')\bigr) + \mu\bigl((A \cup B) \cap (B' \setminus A')\bigr) = \mu\bigl((A \cup B) \cap (B' \setminus A')\bigr),$$

следовательно,

$$
\begin{aligned}
\mu(A \cup B) = \mu\bigl((A \cup B) \cap A'\bigr) + \mu\bigl((A \cup B) \setminus A'\bigr) = \mu\bigl((A \cup B) \cap A'\bigr) + \mu\bigl((A \cup B) \cap (B' \setminus A')\bigr) = \\
= \mu\bigl((A \cup B) \cap A'\bigr) + \mu\bigl((A \cup B) \cap B'\bigr)\bigr) \ge \mu(A) + \mu(B).
\end{aligned}
$$

□

**Замечание 7.18.** Предложение 7.17, вместе с 5.26 (2), гарантирует, что функция $D(\nu,\mu,\mathcal{V})$ является $\mu$-интегрируемой.

**Определение 7.19.** Пусть $\mu$ — произвольная внешняя мера на множестве $X$, $A \subset X$ и $f\colon X \xrightarrow{\text{p}} [-\infty, \infty]$ такова, что $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} \operatorname{dom} f$ и функция $f\,\chi_A$ — $\mu$-интегрируема. Тогда определено выражение $\int_A f\,d\mu = \int f\,\chi_A\,d\mu$, которое называется *интегралом Лебега функции $f$ по множеству $A$*.

**Замечание 7.20.** Пусть на множестве $X$ с произвольной внешней мерой $\mu$ задана $\mu$-измеримая функция $f\colon X \to [0, \infty]$, и $A = \sqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \sigma(\mu)$ при всех $n$. Тогда $\int_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu$. Действительно, $\int_{A_n} f\,d\mu = \int f\,\chi_{A_n}\,d\mu$ и $\int_A f\,d\mu = \int f\,\chi_A\,d\mu$. Осталось применить 5.33.

**Теорема 7.21.** *Пусть $X$ — метрическое пространство, $\mu$, $\nu \in \mathcal{R}(X)$, $A \subset X$ — $\mu$-измеримое, $\mathcal{V}$ — $\mu$-покрытие Витали. Тогда множество $A$ также $\nu_\mu$-измеримо и*

$$\nu_\mu(A) = \int_A D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu.$$

*Доказательство.* Нам понадобится обобщить некоторые утверждения, имеющие место для множеств конечной меры, на произвольные подмножества $X$ в предположении, что внешняя мера принадлежит $\mathcal{R}(X)$. Для этого мы несколько раз будем использовать следующую конструкцию.

Фиксируем некоторую точку $x \in X$ и положим $C_n = \{y \in X : 0 \le |xy| < n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $C_n$ ограничено, поэтому $\mu(C_n) < \infty$ и $X = \sqcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Докажем первое утверждение, т.е. что множество $A$ является $\nu_\mu$-измеримым.

Пусть $A_n = A \cap C_n$, тогда $A_n$ — также ограничено и $\mu(A_n) < \infty$. По 3.45, существует такое $D_n \in \mathcal{B}(X)$, что $D_n \subset A_n$ и $\mu(A_n \setminus D_n) = 0$. Положим $D = \cup D_n$, тогда $D \in \mathcal{B}(X)$ и

$$\mu(A \setminus D) = \mu\Big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \cup_{n=1}^{\infty} D_n\Big) \le \mu\Big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus D_n)\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus D_n) = 0.$$

В силу 7.3 (2), $\nu_\mu(A \setminus D) = 0$ и, значит, $A \setminus D \in \sigma(\nu_\mu)$. Но по 7.3 (6), $D \in \sigma(\nu_\mu)$, поэтому $A = D \cup (A \setminus D) \in \sigma(\nu_\mu)$.

Докажем теперь второе утверждение. Положим

$$Z = \big\{D(\nu, \mu, \mathcal{V}) = 0\big\} \text{ и } W = \big\{D(\nu, \mu, \mathcal{V}) = \infty\big\},$$

тогда, в силу 7.16, множества $Z$ и $W$ являются $\mu$-измеримыми. Пусть $Z_n = Z \cap C_n$, тогда $\mu(Z_n) < \infty$. По 7.15 (1), для любого $0 < c < \infty$ имеем $\nu_\mu(Z_n) \le c\,\mu(Z_n)$, откуда $\nu_\mu(Z_n) = 0$. Из $\sigma$-субаддитивности внешней меры вытекает, что и $\nu_\mu(Z) = 0$, таким образом

$$\nu_\mu(Z) = 0 = \int_Z D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu.$$

Далее, по 7.16, $\mu(W) = 0$, поэтому можно считать, что $D(\nu, \mu, \mathcal{V})|_W \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Кроме того, по 7.3 (2) имеем $\nu_\mu(W) = 0$, так что

$$\nu_\mu(W) = 0 = \int_W D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu.$$

Выберем теперь произвольное $1 < t < \infty$ и положим $P_n = A \cap \{t^n \le D(\nu, \mu, \mathcal{V}) < t^{n+1}\}$, тогда все $P_n$ являются $\mu$-измеримыми и $A \setminus (Z \sqcup W) = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n$. Кроме того, по первому утверждению этой теоремы, все $P_n$ являются также $\nu_\mu$-измеримыми. Из 7.15 вытекает, что

$$t^n \mu(P_n) \le \nu_\mu(P_n) \le t^{n+1} \mu(P_n)$$

(формально говоря, левое неравенство выполнено для $(t^n - \varepsilon)\mu(P_n)$ при каждом $0 < \varepsilon < \tau^n$, поэтому оно имеет место и при $t^n \mu(P_n)$). Использую замечание 7.20, а также 5.26 (6), получаем

$$\nu_\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n) \le \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{n+1} \mu(P_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t \int_{P_n} t^n\,d\mu \le \sum_{n \in \mathbb{Z}} t \int_{P_n} D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu = t \int_A D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu,$$

$$\nu_\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n) \ge \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \mu(P_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{t} \int_{P_n} t^{n+1}\,d\mu \ge \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{t} \int_{P_n} D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu = \frac{1}{t} \int_A D(\nu, \mu, \mathcal{V})\,d\mu.$$

Осталось воспользоваться произвольностью $t$. $\square$

**Упражнение 7.22.** Пусть $\mu \in \mathcal{R}(X)$, $\mathcal{V}$ — $\mu$-покрытие Витали и $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ — произвольная $\mu$-измеримая функция такая, что для каждого ограниченного $\mu$-измеримого $A \subset X$ функция $f|_A$ — $\mu$-суммируема. Докажите, что для $\mu$-почти всех $x \in X$ выполняется

$$f(x) = (\mathcal{V}) \lim_{S \to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f \, d\mu.$$

**Упражнение 7.23.** Пусть $X$ — метрическое пространство, $\mu$, $\nu \in \mathcal{R}(X)$. Тогда

(1) если $\mathcal{V}$ — $\mu$-покрытие Витали, то

$$D(\nu_\mu, \mu, \mathcal{V}) \overset{\text{п.в.}}{=} D(\nu, \mu, \mathcal{V}) \text{ и } D(\nu - \nu_\mu, \mu, \mathcal{V}) \overset{\text{п.в.}}{=} 0;$$

(2) если $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ — $\mu$-покрытия Витали, то

$$D(\nu_\mu, \mu, \mathcal{V}_1) \overset{\text{п.в.}}{=} D(\nu_\mu, \mu, \mathcal{V}_2).$$