Тема 6

Интеграл Даниеля.

В этом разделе мы определим интеграл Лебега как функционал, заданный на некоторых семействах функций и обладающий рядом естественных свойств. Такие функционалы называются интегралами Даниеля. В качестве частного случая мы докажем теорему Рисса, представляющую линейный функционал на пространстве непрерывных функций с компактными носителями в виде интеграла этих функций по некоторой мере.

6.1 Решетка функций

Пусть X — произвольное множество.

Определение 6.1. *Решеткой функций на* X назовем каждое (непустое) семейство L функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) для любых f, $g \in L$ и $0 \le c < \infty$ имеем

$$f + g,\ c\,f,\ \min(f, g),\ \min(f, c) \in L;$$

(2) для любых f, $g \in L$ таких, что $f \le g$, выполняется $g - f \in L$.

Замечание 6.2. Пусть L — решетка функций.

(1) Если $f \in L$, то $0 = 0 \cdot f \in L$. Таким образом, каждая решетка функций содержит 0.

(2) Если f, $g \in L$ и $g \ge 0$, то $f + g \ge \min(f, g)$, поэтому, в силу условий $f + g \in L$ и $\min(f, g) \in L$, имеем $\max(f, g) = f + g - \min(f, g) \in L$.

(3) Если $f \in L$, то $f^+ = \max(f, 0) \in L$; кроме того, так как $f^+ \ge f$, то $f^- = f^+ - f \in L$.

Обозначение 6.3. Для решетки функций L положим $L^+ = \{f \in L : f \ge 0\}$.

Ясно, что L^+ также является решеткой.

Пример 6.4. Вот некоторые примеры решеток:

(1) множество всех функций $f\colon X \to \mathbb{R}$;

(2) если X — топологическое пространство, то множество непрерывных функций;

(3) если μ — внешняя мера на X, то множество всех μ-измеримых функций;

(4) если μ — внешняя мера на X, то множество всех неотрицательных μ-интегрируемых функций;

(5) если μ — внешняя мера на X, то множество всех μ-суммируемых функций (множество μ-интегрируемых функций решетку, вообще говоря, не образует, так как сумма μ-интегрируемых функций может быть неинтегрируемой).

Пусть μ — внешняя мера на X и L — подрешетка решетки всех μ-суммируемых функций. Тогда определено отображение

$$I\colon L \to \mathbb{R}, \quad I(f) = \int f\,d\mu.$$

Отображение I

(1) линейно по 5.6 (2) и 5.6 (4);

(2) сохраняет порядок по 5.6 (5);

(3) сохраняет монотонную сходимость в силу 5.34.

Оказывается, эти свойства полностью определяют интегрирование по Лебегу. В дальнейшем для краткости условие монотонности $f_1 \le f_2 \le \cdots$ будем записывать как $f_n \nearrow$, а то, что монотонная последовательность f_n сходится к g — как $f_n \nearrow g$.

Теорема 6.5. *Пусть L — произвольная решетка функций на множестве X, и $\Phi\colon L \to \mathbb{R}$ — отображение, обладающее следующими свойствами: для любых f, g, $h_1, h_2, \ldots \in L$*

(1) $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$;

(2) *для каждого $0 \le c < \infty$ имеем $\Phi(c\,f) = c\,\Phi(f)$;*

(3) *если $f \ge g$, то $\Phi(f) \ge \Phi(g)$;*

(4) *если $h_n \nearrow g$ при $n \to \infty$, то $\Phi(h_n) \nearrow \Phi(g)$ при $n \to \infty$.*

Тогда на X существует такая внешняя мера μ, что

$$\Phi(f) = \int f\,d\mu.$$

В частности, относительно этой меры μ все функции решетки L являются μ-суммируемыми и, значит, μ-измеримыми.

Доказательство. Опишем построение искомой внешней меры μ.

Конструкция 6.6. Пусть $A \subset X$. Будем говорить, что последовательность f_1, $f_2, \ldots$ функций из L^+ *мажорирует* A, если $f_n \nearrow$ и $\lim_{n\to\infty} f_n|_A \ge 1$. Отметим, что пустое множество A мажорирует каждая последовательность $f_n \nearrow$ функций из L^+. Заметим также, что для каждой последовательности $f_n \nearrow$ функций из L^+ существует предел $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)$ в силу монотонности Φ.

Определим функцию $\mu\colon 2^X \to [0,\infty]$, учитывая соглашения $\inf\emptyset = \infty$:

$$\mu(A) = \inf\Big\{\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) : f_1,\ f_2, \ldots \text{ мажорирует } A\Big\}.$$

Лемма 6.7. *Функция μ является внешней мерой на X.*

Доказательство. (1) *Покажем, что $\mu(A) \ge 0$ для любого $A \subset X$.* По 6.2 (1), имеем $0 \in L$, поэтому $0 \in L^+$. Далее, $\Phi(0) = \Phi(0+0) = \Phi(0) + \Phi(0)$, поэтому $\Phi(0) = 0$. Наконец, для любой $f \in L^+$ выполняется $f \ge 0$, поэтому, в силу монотонности Φ, имеем $\Phi(f) \ge \Phi(0) = 0$.

(2) *Докажем, что $\mu(\emptyset) = 0$.* Для $A = \emptyset$ в качестве мажорирующей f_n можно взять последовательность из 0, откуда $\mu(A) \le \Phi(0) = 0$.

(3) *Докажем, что μ — σ-субаддитивна.* Пусть $A \subset \cup_{i=1}^\infty A_i$. Если для какого-то A_i нет мажорирующей последовательности, то $\mu(A_i) = \infty$ и все доказано. Пусть теперь для каждого A_i имеется некоторая мажорирующая последовательность.

Для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого i выберем последовательность $f_{i,1}$, $f_{i,2}, \ldots$, мажорирующую A_i так, что $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n}) \le \mu(A_i) + \varepsilon/2^i$. Положим $g_n = \sum_{i=1}^n f_{i,n}$, тогда $g_n \in L^+$ и $g_n \nearrow$, поэтому, в частности, существует $\lim_{n\to\infty} g_n$.

Далее, для каждого $x \in A$ существует такое A_k, что $x \in A_k$ и при каждом $n \geq k$ выполняется $g_n(x) \geq f_{k,n}(x)$, поэтому $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \geq \lim_{n\to\infty} f_{k,n}(x) \geq 1$, следовательно, $g_1, g_2, \cdots$ мажорирует A. Отсюда вытекает, что $\mu(A) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(g_n)$. Кроме того, при каждом n

$$\Phi(g_n) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(f_{i,n}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \Phi(f_{i,n+1}) \leq \cdots \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \Phi(f_{i,m}),$$

поэтому

$$\mu(A) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(g_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \Phi(f_{i,m}) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε. $\square$

Лемма 6.8. *Для каждого $A \subset X$ и $g \in L^+$ таких, что $g \leq \varepsilon\, \chi_A$, имеем $\Phi(g) \leq \varepsilon\, \mu(A)$.*

Доказательство. Если A не имеет мажорирующей последовательности, то $\mu(A) = \infty$ и все доказано. Пусть теперь у A имеются мажорирующие последовательности. Выберем произвольное $\delta > 0$ и построим последовательность $f_1, f_2, \cdots$, мажорирующую A так, что $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) \leq \mu(A) + \delta$. Положим $h_n = \min(f_n, g/\varepsilon)$. Так как $\lim_{n\to\infty} f_n|_A \geq 1 \geq (g/\varepsilon)|_A$, то $h_n|_A \nearrow (g/\varepsilon)|_A$; кроме того, $h_n|_{X\setminus A} = 0 = (g/\varepsilon)|_{X\setminus A}$, поэтому $h_n \nearrow g/\varepsilon$. Следовательно,

$$\Phi(g/\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \Phi(h_n) \leq \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) \leq \mu(A) + \delta.$$

Для завершения доказательства воспользуемся произвольностью δ. $\square$

Лемма 6.9. *Для каждого $A \subset X$, $g \in L^+$ и $\varepsilon > 0$ таких, что $g \geq \varepsilon\, \chi_A$, имеем $\Phi(g) \geq \varepsilon\, \mu(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим постоянную последовательность $g/\varepsilon, g/\varepsilon, \ldots$, тогда эта последовательность мажорирует A, следовательно, $\mu(A) \leq \Phi(g/\varepsilon) = \Phi(g)/\varepsilon$. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится следующий критерий измеримости функции.

Лемма 6.10. *Пусть μ — внешняя мера на множестве X, и $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ — произвольная функция. Тогда f является μ-измеримой, если и только если для всех $T \subset X$ и $-\infty < a < b < \infty$ выполняется*

$$\mu(T) \geq \mu\Big(T \cap f^{-1}\big([-\infty, a]\big)\Big) + \mu\Big(T \cap f^{-1}\big([b, \infty]\big)\Big). \tag{*}$$

Доказательство. Если f является μ-измеримой, то прообразы лучей $[-\infty, a]$, $[b, \infty]$ и интервала (a, b) являются μ-измеримыми, откуда вытекает неравенство (*). Докажем теперь обратное утверждение. Пусть имеет место неравенство (*). Докажем μ-измеримость f. Для этого достаточно проверить μ-измеримость каждого множества $A = f^{-1}\big([-\infty, r]\big)$. По 3.11 (1), нам достаточно проверить, что для любого $T \subset X$ такого, что $\mu(T) < \infty$, выполняется $\mu(T) \geq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$. Сделаем это.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$B_i = T \cap \big\{r + 1/(i+1) \leq f \leq r + 1/i\big\}.$$

Мы утверждаем, что для каждого конечного множества $K \subset \mathbb{N}$, состоящего или только из четных, или только из нечетных чисел, выполняется

$$\mu\big(\cup_{k\in K} B_k\big) \geq \sum_{k\in K} \mu(B_k). \tag{**}$$

Для $\#K = 1$ это очевидно так. Далее доказываем по индукции по числу элементов в K. Пусть $\#K > 1$ и для меньшего чем $\#K$ числа элементов неравенство (**) имеет место. Положим $j = \max K$, тогда

$$-\infty < a := \sup f(B_j) < \inf f\big(\cup_{j>k\in K} B_k\big) =: b < \infty.$$

Применим теперь неравенство (*), выбрав в качестве T множество $B = \cup_{k\in K} B_k$. Тогда $B \cap f^{-1}\big([-\infty, a]\big) = B_j$ и $B \cap f^{-1}\big([b, \infty]\big) = \cup_{j>k\in K} B_k$, откуда

$$\mu\big(\cup_{k\in K} B_k\big) \geq \mu(B_j) + \mu\big(\cup_{j>k\in K} B_k\big) \geq \sum_{k\in K} \mu(B_k),$$

где последнее неравенство имеет место в силу индуктивного предположения.

Из неравенства (**) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{2k-1}) \le \mu\big(\cup_{k=1}^{\infty} B_{2k-1}\big) \le \mu(T) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{2k}) \le \mu\big(\cup_{k=1}^{\infty} B_{2k}\big) \le \mu(T),$$

откуда $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \le 2\mu(T) < \infty$, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует n, для которого

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) \ge \mu\big(T \cap \{r < f \le r + 1/n\}\big),$$

где последнее неравенство следует из σ-субаддитивности внешней меры μ. Вновь воспользуемся σ-субаддитивностью μ и получим

$$\mu(T \setminus A) \le \mu\big(T \cap \{r < f \le r + 1/n\}\big) + \mu\big(T \cap \{f > r + 1/n\}\big) < \varepsilon + \mu\big(T \cap \{f > r + 1/n\}\big).$$

Наконец, из условия (*) и монотонности внешней меры вытекает, что

$$\mu(T) \ge \mu\big(T \cap \{f \le r\}\big) + \mu\big(T \cap \{f > r + 1/n\}\big) \ge \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) - \varepsilon.$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε и 3.11 (1). $\square$

Лемма 6.11. *Каждая $f \in L^+$ является μ-измеримой.*

Доказательство. В силу леммы 6.10, для доказательства достаточно выбрать произвольное $T \subset X$, произвольные $-\infty < a < b < \infty$, положить $A = T \cap \{f \le a\}$, $B = T \cap \{f \ge b\}$ и проверить неравенство

$$\mu(T) \ge \mu(A) + \mu(B). \tag{*}$$

Если $a < 0$, то так как $f \ge 0$, неравенство (*) вытекает из монотонности внешней меры.

Пусть теперь $a \ge 0$. Положим

$$h = \frac{\min(f, b) - \min(f, a)}{b - a},$$

тогда $h(x) = 0$ при $x \in A$ и $h(x) = 1$ при $x \in B$.

Если для T не существует мажорирующей последовательности, то $\mu(T) = \infty$ и все доказано. Пусть теперь такие последовательности существуют. Выберем произвольную последовательность $g_1, g_2, \ldots$, мажорирующую T, и положим $k_n = \min(g_n, h)$. Тогда последовательность $k_1, k_2, \ldots$ мажорирует B, так как, во-первых, $k_n \in L^+$, во-вторых, $k_n \nearrow$ и, в-третьих, для каждого $x \in B$ имеем $k_n(x) = \min(g_n, 1)$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \lim_{n\to\infty} \min\big(g_n(x), 1\big) = \min\Big(\lim_{n\to\infty} g_n(x), 1\Big) = 1.$$

Покажем теперь, что последовательность $g_1 - k_1, g_2 - k_2, \ldots$ мажорирует A. Заметим, что $g_n(x) - k_n(x) = 0$ при $g_n(x) \le h(x)$ и $g_n(x) - k_n(x) = g_n(x) - h(x)$ при $g_n(x) > h(x)$, поэтому $g_n - k_n = \max(g_n - h, 0)$, следовательно, $g_n - k_n \in L^+$ и $g_n - k_n \nearrow$. Пусть теперь $x \in A$, тогда $g_n(x) - k_n(x) = \max\big(g_n(x) - h(x), 0\big) = \max\big(g_n(x), 0\big) = g_n(x)$, откуда и вытекает требуемое.

Из определения функции μ и аддитивности функционала Φ вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(g_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\Phi(g_n - k_n) + \Phi(k_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \Phi(g_n - k_n) + \lim_{n\to\infty} \Phi(k_n) \ge \mu(A) + \mu(B).$$

Теперь неравенство (*) вытекает из произвольности последовательности g_n. $\square$

Вспоминая, что для $f \in L$ выполняется $f^+, f^- \in L^+$ и $f = f^+ - f^-$, получаем справедливость следующего результата.

Следствие 6.12. *Каждая $f \in L$ является μ-измеримой.*

Лемма 6.13. *Для $f \in L^+$ имеем $\Phi(f) = \int f\, d\mu$.*

Доказательство. Для каждого $t \geq 0$ положим $f_t = \min(f, t)$, тогда, по определению решетки, имеем $f_t \in L^+$.

Выберем теперь произвольные $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$, тогда, как легко видеть,

$$0 \leq f_{k\varepsilon}(x) - f_{(k-1)\varepsilon}(x) \leq \varepsilon \text{ при всех } x \in X, \tag{*}$$
$$f_{k\varepsilon}(x) - f_{(k-1)\varepsilon}(x) = 0 \text{ при } f(x) \leq (k-1)\varepsilon,$$
$$f_{k\varepsilon}(x) - f_{(k-1)\varepsilon}(x) = \varepsilon \text{ при } f(x) \geq k\varepsilon.$$

По лемме 6.9, имеем $\Phi\big(f_{k\varepsilon} - f_{(k-1)\varepsilon}\big) \geq \varepsilon\,\mu(f \geq k\varepsilon)$.

Далее, из свойств (*) вытекает, что

$$f_{k\varepsilon} - f_{(k-1)\varepsilon} \geq \varepsilon\,\chi_{\{f \geq k\varepsilon\}} \geq f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon} \geq \varepsilon\,\chi_{\{f \geq (k+1)\varepsilon\}} \geq f_{(k+2)\varepsilon} - f_{(k+1)\varepsilon}. \tag{6.1}$$

Применяя леммы 6.9, 6.8, а также упражнения 5.26 (1) и 5.26 (1), получим

$$\begin{aligned}\Phi\big(f_{k\varepsilon} - f_{(k-1)\varepsilon}\big) \geq \varepsilon\,\mu(f \geq k\varepsilon) = \int \varepsilon\,\chi_{\{f \geq k\varepsilon\}}\,d\mu \geq \\ \geq \int \big(f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon}\big)\,d\mu \geq \\ \geq \int \varepsilon\,\chi_{\{f \geq (k+1)\varepsilon\}}\,d\mu = \varepsilon\,\mu\big(f \geq (k+1)\varepsilon\big) \geq \Phi\big(f_{(k+2)\varepsilon} - f_{(k+1)\varepsilon}\big).\end{aligned}$$

Просуммировав эти неравенства по k от 1 до n и воспользовавшись аддитивностью функции Φ и интеграла Лебега, получим

$$\Phi\big(f_{n\varepsilon}\big) \geq \int \big(f_{(n+1)\varepsilon} - f_\varepsilon\big)\,d\mu \geq \Phi\big(f_{(n+2)\varepsilon} - f_{2\varepsilon}\big).$$

Заметим, что при $n \to \infty$ имеем $f_{n\varepsilon} \nearrow f$, $f_{(n+1)\varepsilon} - f_\varepsilon \nearrow f - f_\varepsilon$ и $f_{(n+2)\varepsilon} - f_{2\varepsilon} \nearrow f - f_{2\varepsilon}$. Следовательно, из монотонной сходимости функции Φ и интеграла Лебега вытекает, что

$$\Phi(f) \geq \int \big(f - f_\varepsilon\big)\,d\mu \geq \Phi\big(f - f_{2\varepsilon}\big).$$

Положив $\varepsilon = 1/n$ и снова воспользовавшись тем, что $f - f_{1/n} \nearrow f$ и $f - f_{2/n} \nearrow f$ при $n \to \infty$, а Φ и интеграл Лебега монотонны, получаем

$$\Phi(f) \geq \int f\,d\mu \geq \Phi(f),$$

что и требовалось. □

Нам осталось проверить, что для любой $f \in L$ также имеем $\Phi(f) = \int f\,d\mu$. Отметим, что для каждой $f \in L$ имеем f^+, $f^- \in L^+$ и $f^+ = f + f^-$, откуда $\Phi(f^+) = \Phi(f) + \Phi(f^-)$. Следовательно,

$$\Phi(f) = \Phi(f^+) - \Phi(f^-) = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu = \int (f^+ - f^-)\,d\mu = \int f\,d\mu,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Определение 6.14. Пусть L — произвольная решетка функций. Отображение $\Phi\colon L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям (1)–(4) теоремы 6.5, называется *монотонным интегралом Даниеля*.

Монотонные интегралы Даниеля удовлетворяют важному свойству, которое называется регулярностью относительно решетки L или, для краткости, L-регулярностью.

Итак, пусть L — произвольная решетка функций, определенных на некотором множестве X, и μ — внешняя мера на X. Обозначим через F_0 семейство множеств вида $\{f > t\}$ по всем $f \in L^+$ и всем $t > 0$. Далее, положим

$$F_1 = \{\cup_{n=1}^\infty A_n : A_1 \subset A_2 \subset \cdots,\ A_n \in F_0 \text{ при всех } n\},$$
$$F_2 = \{\cap_{n=1}^\infty A_n : A_1 \supset A_2 \supset \cdots,\ A_n \in F_1 \text{ при всех } n,\ \mu(A_1) < \infty\}.$$

Определение 6.15. Внешняя мера μ называется *L-регулярной*, если для каждого $A \subset X$ такого, что $\mu(A) < \infty$, существует $W \in F_2$, для которого $A \subset W$ и $\mu(A) = \mu(W)$.

Предложение 6.16. *Внешняя мера μ, построенная в доказательстве теоремы 6.5, является L-регулярной, где L — решетка из этой же теоремы 6.5.*

Доказательство. Мы должны показать, что для каждого множества $A \subset X$ из условия $\mu(A) < \infty$ вытекает существование соответствующего W. Пусть мы выбрали такое $A \subset X$.

Так как $\mu(A) = \inf\{\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) : f_1, f_2, \ldots$ мажорирует $A\} < \infty$, существует такой набор последовательностей $f_{i,1}, f_{i,2}, \ldots$, что каждая из этих последовательностей мажорирует A,

$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n}).$$

Положим $g_{i,n} = \min\{f_{1,n}, \ldots, f_{i,n}\}$, тогда $g_{i,n} \in L^+$.

Пусть $B_{i,n} = \{g_{i,n} > 1 - 1/i\}$, тогда, по определению, $B_{i,n} \in F_0$ при $i > 1$.

Легко видеть, что $g_{i+1,n} \le g_{i,n} \le g_{i,n+1}$: первое неравенство вытекает из того, что при определении $g_{i+1,n}$ мы минимизируем по меньшему множеству функций, чем при определении $g_{i,n}$; второе неравенство следует из того, что мажорирующие последовательности функций монотонно не убывают.

Из предыдущих неравенств и определения $B_{i,n}$ мгновенно вытекает, что $B_{i+1,n} \subset B_{i,n} \subset B_{i,n+1}$.

Далее, по лемме 6.9, имеем $(1 - 1/i)\, \mu(B_{i,n}) \le \Phi(g_{i,n})$, а из монотонности Φ заключаем, что $\Phi(g_{i,n}) \le \Phi(f_{i,n})$.

Положим $V_i = \cup_{n=1}^{\infty} B_{i,n}$, тогда, по определению, $V_i \in F_1$ при $i > 1$; из $B_{i+1,n} \subset B_{i,n}$ (см. выше) вытекает, что $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$; наконец, $A \subset V_i$ при каждом i, так как для каждого $x \in A$ и каждого j, $1 \le j \le i$, существует такое n_j, что при всех $k \ge n_j$ выполняется $f_{j,k}(x) > 1 - 1/i$. Положим $n = \max\{n_1, \ldots, n_i\}$, тогда при каждом $1 \le j \le i$ выполняется $f_{j,n}(x) > 1 - 1/i$, откуда $g_{i,n}(x) > 1 - 1/i$, поэтому $x \in B_{i,n}$.

По лемме 6.11, все функции из L^+ являются μ-измеримыми, поэтому множества F_0, F_1 и F_2 состоят из μ-измеримых множеств. Все множества $B_{i,j}$ также μ-измеримы (при $i > 1$ они принадлежат F_0; при $i = 1$ равны $\{g_{1,j} > 0\}$, где $g_{1,j} \in L^+$). Так как при каждом фиксированном i имеем $B_{i,1} \subset B_{i,2} \subset \cdots$ и $A_i = \cup_{i=1}^{\infty}$, то, по 3.17 (5) и доказанному выше, имеем

$$\mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_{i,n}) \le \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n})}{1 - 1/i}.$$

Положим $W = \cap_{i=1}^{\infty} V_i = \cap_{i=2}^{\infty} V_i$. Тогда $W \in F_2$. Так как $A \subset V_i$ при каждом i, имеем $A \subset W$. Так как $V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ и все V_i являются μ-измеримыми, из 3.17 (6) и доказанного выше вытекает, что

$$\mu(W) = \lim_{i\to\infty} \mu(V_i) \le \lim_{i\to\infty} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n})}{1 - 1/i} = \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Phi(f_{i,n}) = \mu(A).$$

Монотонность внешней меры μ и условие $A \subset W$ дает обратное неравенство, поэтому $\mu(A) = \mu(W)$, что и требовалось □

В следующей теореме рассматривается более широкий класс отображений решеток.

Теорема 6.17. *Пусть L — произвольная решетка функций на множестве X, и $\Psi\colon L \to \mathbb{R}$ — отображение, обладающее следующими свойствами: для любых f, g, h_1, $h_2, \ldots \in L$*

(1) $\Psi(f + g) = \Psi(f) + \Psi(g)$;

(2) *для каждого $0 \le c < \infty$ имеем $\Psi(c\, f) = c\, \Psi(f)$;*

(3) $\sup\bigl\{\Psi(k) : k \in L^+,\, k \le f\bigr\} < \infty$;

(4) *если $h_n \nearrow g$ при $n \to \infty$, то $\Psi(h_n) \to \Psi(g)$ при $n \to \infty$.*

Положим

$$\Psi^+(f) = \sup\bigl\{\Psi(k) : k \in L^+,\, k \le f\bigr\},$$
$$\Psi^-(f) = -\inf\bigl\{\Psi(k) : k \in L^+,\, k \le f\bigr\}.$$

Тогда на X существует такие L-регулярные внешние меры ν^+ и ν^-, что для всех $f \in L^+$

$$\Psi^+(f) = \int f\, d\nu^+,\ \ \Psi^-(f) = \int f\, d\nu^-,$$

а для всех $f \in L$ имеем

$$\Psi(f) = \int f\, d\nu^+ - \int f\, d\nu^-.$$

Определение 6.18. Пусть L — произвольная решетка функций. Отображение $\Psi\colon L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям (1)–(4) теоремы 6.17, называется *интегралом Даниеля.*

Обозначение 6.19. Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X, и $p \in [1, \infty]$. Для каждой μ-измеримой функции $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty]$ положим

$$\mu_p(f) = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \text{ при } p \in [1, \infty), \text{ и}$$
$$\mu_\infty(f) = \inf\Big\{r : \mu\Big(|f| > r\Big) = 0\Big\}.$$

Далее, пусть

$$L_p(\mu) = \Big\{f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty] : f \text{ — } \mu\text{-измерима и } \mu_p(f) < \infty \text{ при } p \in [1, \infty)\Big\},$$
$$L_\infty(\mu) = \Big\{f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty] : f \text{ — счетно } \mu\text{-измерима и } \mu_\infty(f) < \infty.\Big\}$$

Упражнение 6.20. Проверьте, что при каждом $p \in [1, \infty]$ пространство $L_p(\mu)$ является решеткой.

Замечание 6.21. Так как при $p \in [1, \infty)$ для каждой $f \in L_p(\mu)$ функция $|f|^p$ является μ-суммируемой, то для $|f|^p$ конечны верхний и нижний интегралы Лебега, поэтому $\mu(f = \pm\infty) = 0$. При $p = \infty$ из конечности $\mu_\infty(f)$ вытекает, что при каждом $r > \mu_\infty(f)$ выполняется $\mu\big(|f| > r\big) = 0$, в частности, $\mu(f = \pm\infty) = 0$. Так как мы предполагаем, что f определена μ-почти всюду на X, то при всех $p \in [1, \infty]$ можно сразу считать, что каждая функция из $L_p(\mu)$ принимает только конечные значения.

Кроме того, из замечания 5.47 вытекает, что для $p \in [1, \infty)$ функции $|f|^p$ являются счетно μ-измеримыми, а так как $\{f \neq 0\} = \big\{|f|^p \neq 0\big\}$, то и функции $f \in L_p(\mu)$ также счетно μ-измеримы. Таким образом, определение пространств $L_p(\mu)$ можно давать единообразно, требуя (избыточно), чтобы при всех $p \in [1, \infty]$ функции f были счетно μ-измеримы.

Следствие 6.22 (теорема Радона–Никодима)**.** *Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X и $\Psi\colon L_\infty(\mu) \to \mathbb{R}$ — интеграл Даниеля. Тогда существует такая функция $k \in L_1(\mu)$, что $\Psi(f) = \int f\, k\, d\mu$ при всех $f \in L_\infty(\mu)$.*

Упражнение 6.23. Обобщите теорему 6.22 на оставшиеся пространства $L_p(\mu)$.

Напомним, что топологическое пространство называется *локально компактным*, если у каждой его точки существует окрестность, замыкание которой компактно.

Следствие 6.24 (теорема Рисса)**.** *Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, L — векторное пространство всех непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, носители которых компактны, и $\Psi\colon L \to \mathbb{R}$ — линейное отображение, для которого при каждом $f \in L^+$ выполняется*

$$\sup\big\{\Psi(g) : g \in L^+,\, g \leq f\big\} < \infty.$$

Тогда Ψ — интеграл Даниеля и, следовательно, существуют такие L-регулярные внешние меры ν^+ и ν^-, что

$$\Psi(f) = \int f\, d\mu^+ - \int f\, d\mu^-$$

при всех $f \in L$.