Тема 5

Интеграл Лебега.

Напомним, что такое интеграл Лебега и обсудим основные его свойства. Нам понадобятся следующие естественные соглашения, одно из которых мы уже использовали.

5.1 Соглашения и обозначения

Соглашение 5.1. Положим $\inf\emptyset = \infty$ и $\sup\emptyset = -\infty$.

Замечание 5.2. Если A — непустое подмножество $[-\infty, \infty]$, то $\inf A \le \sup A$; если же $A = \emptyset$, то это неравенство перестает быть верным в силу соглашения 5.1.

Пусть $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ — произвольная функция, определенная на некотором множестве X.

Обозначение 5.3. Положим $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$.

Функции f^+ и f^- неотрицательны; кроме того, $f = f^+ - f^-$ и $|f| = f^+ + f^-$.

Упражнение 5.4. Докажите, что

(1) если $0 \ne c \in \mathbb{R}$, то $(c\,f)^+ = |c|\,f^{\operatorname{sign} c}$ и $(c\,f)^- = |c|\,f^{-\operatorname{sign} c}$, в частности, $f^- = (-f)^+$ и $f^+ = (-f)^-$;

(2) если $g\colon X \to [-\infty, \infty]$, то функция $f + g$ определена тогда и только тогда, когда ни в одной точке $x \in X$ функции f и g не могут одновременно быть бесконечными и разных знаков; более того, если функция $f + g$ определена, то

$$(f+g)^+ \le f^+ + g^+, \quad (f+g)^- \le f^- + g^-, \quad f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+.$$

(3) если на X задана внешняя мера μ и функция f является μ-измеримой, то f^+, f^- и $|f| = f^+ + f^-$ также μ-измеримы.

5.2 Формализация суммирования

Выше мы уже неоднократно использовали понятие суммирования, апеллирую к рядам. При работе с мерами мы столкнулись с тем, что некоторые элементы ряда могут равняться ∞. При определении интеграла Лебега мы позволим элементам ряда также равняться $-\infty$. Последнее приведет к тому, что некоторые ряды будут не определены. В математическом анализе похожий феномен возникает при рассмотрении расходящихся рядов, когда результат суммирования зависит от порядка суммирования. Однако у нас теперь все будет еще хуже: если ряд содержит как ∞, так и $-\infty$, то изменение порядка суммирования не помогает. Впрочем, здесь оказывается полезным другой прием: рассматривать соответствующие функции, разрешая выкидывать из их областей определения множества меры ноль (см. ниже).

Включение в рассмотрение $\pm\infty$ в качестве элементов рядов, а также желание осуществлять алгебраические операции с рядами, значения которых могут равняться $\pm\infty$, приводит к необходимости более аккуратного манипулирования, так как, например, некоторые стандартные операции, допустимые в сходящихся рядах, тут перестают быть корректно определены. В связи с этим мы приведем здесь аксиоматическое определение оператора суммы, а также список его различных свойств. В нашем изложении мы следуем в основном [12].

Пусть X — произвольное множество, $f\colon X \to [-\infty, \infty]$, и $A \subset X$.

Определение 5.5. Определим $\sum_A f = \sum_{x \in A} f(x)$ следующим образом:

(1) если $A = \emptyset$, то $\sum_A f = 0$;

(2) если $f \geq 0$ и для некоторого конечного $B \subset A$ имеем $f|_{A \setminus B} = 0$, то $\sum_A f$ — это обычная конечная сумма $\sum_{b \in B} f(b)$;

(3) если $f \geq 0$, то $\sum_A f = \sup\{\sum_B f : B \subset A,\ \#B < \infty\}$;

(4) если $\sum_A f^+ < \infty$ или $\sum_A f^- < \infty$, то $\sum_A f = \sum_A f^+ - \sum_A f^-$;

(5) если $\sum_A f^+ = \infty$ и $\sum_A f^- = \infty$, то $\sum_A f$ не определено.

В следующем упражнении перечисляются свойства операции суммирования.

Упражнение 5.6. Пусть X — произвольное множество, $f, g \colon X \to [-\infty, \infty]$, и $A \subset X$. Проверьте справедливость следующих утверждений:

(1) $\sum_A f \in \mathbb{R}$, если и только если $\sum_A |f| \in \mathbb{R}$;

(2) если $0 \neq c \in \mathbb{R}$, то $\sum_A (cf) = c \sum_A f$;

(3) при $c = 0$ предыдущее равенство может не иметь места;

(4) если величина $\sum_A f + \sum_A g$ определена, то $\sum_A (f + g) = \sum_A f + \sum_A g$;

(5) если $f|_A \leq g|_A$ и, кроме того, или $-\infty < \sum_A f$, или $\sum_A g < \infty$, то $\sum_A f \leq \sum_A g$;

(6) если оба условия $-\infty < \sum_A f$ и $\sum_A g < \infty$ не выполняются, то предыдущее неравенство может не иметь места;

(7) если $\sum_A f$ определено и $h \colon A \to Y$, то $\sum_A f = \sum_{y \in Y} \sum_{h^{-1}(y)} f$;

(8) если $\sum_A f$ определено и $A = U \times V$, то

$$\sum_A f = \sum_{u \in U} \sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{v \in V} \sum_{u \in U} f(u, v);$$

(9) если $A = U \times V$, $f \geq 0$ и $h \colon U \to \mathbb{R}$, то

$$\sum_{(u,v) \in A} h(u) f(u, v) = \sum_{u \in U} h(u) \sum_{v \in V} f(u, v),$$

причем здесь используется соглашение $0 \cdot \infty = 0$;

(10) если $\sum_A f \in \mathbb{R}$, то множество $\{f_A \neq 0\}$ счетно;

(11) если $\sum_A f$ определено, то для каждой последовательности $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset A$ такой, что $A = \cup B_i$, определены все $\sum_{B_n} f$ и выполняется $\sum_{B_n} f \to \sum_A f$.

5.3 Простые, суммируемые и интегрируемые функции

Определение 5.7. Функция f называется *простой*, если ее образ — не более чем счетное подмножество в $\mathbb{R}$ (в частности, она нигде не равна $\pm\infty$).

Замечание 5.8. В некоторых учебниках, например в [7], под простыми понимают функции с конечными множествами значений. Мы же следуем [6], [12] и [8].

Пусть теперь на X задана произвольная внешняя мера μ.

Определение 5.9. Простую μ-измеримую функцию будем называть *μ-простой*.

Упражнение 5.10. Докажите, что множество всех μ-простых функций замкнуто относительно линейных комбинаций и произведений. Более того, если f и g — μ-простые функции и $g \neq 0$, то f/g — также μ-простая функция.

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — произвольная μ-простая функция.

Определение 5.11.

(1) Неотрицательную (неположительную) f назовем *μ-суммируемой*, если сумма

$$S(f,\mu) := \sum_{y\in\mathbb{R}} y \cdot \mu\big(f^{-1}(y)\big)$$

конечна. **Если в этой сумме встречается неопределенность $0 \cdot \infty$, то мы всегда будем полагать** $0 \cdot \infty = 0$ (отметим, что это – типичная ситуация, когда рассматриваются функции на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем).

(2) Произвольная (не обязательно неотрицательная или неположительная) f называется *μ-суммируемой*, если обе f^+ и f^- являются μ-суммируемыми.

(3) Если хотя бы одна из f^+ и f^- является μ-суммируемой, то такая f называется *μ-интегрируемой*.

Замечание 5.12. Для μ-интегрируемой μ-простой функции корректно определена сумма

$$S(f,\mu) := \sum_{y\in\mathbb{R}} y \cdot \mu\big(f^{-1}(y)\big),$$

которая равна $S(f^+,\mu) - S(f^-,\mu)$ и может принимать значения $\pm\infty$.

Замечание 5.13. В некоторых учебниках, например в [6], термины “интегрируемые” и “суммируемые” считаются синонимами. Мы же следуем [12] и [8], где эти термины различаются.

Упражнение 5.14.

(1) Докажите, что множество всех μ-простых μ-интегрируемых функций замкнуто относительно умножения на числа, но не замкнуто относительно операции сложения.

(2) Покажите, что если f и g — произвольные μ-простые μ-интегрируемые функции, и определена сумма $z := S(f,\mu)+S(g,\mu)$, то $f+g$ также является μ-простой μ-интегрируемой функцией, причем $z = S(f+g,\mu)$.

5.4 Почти всюду

Напомним, что выше мы договорились использовать термин μ-почти, говоря про утверждения, выполняющиеся всюду, кроме множества μ-меры 0. Введем ряд обозначений.

Если на множестве X задана внешняя мера μ, то через $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} Y$ будем обозначать отображение, *заданное почти всюду на* X: область определения этого отображения — все X, за исключением множества μ-меры 0.

Далее, если f и g — функции, определенные почти всюду на X, то через $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$, $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} g$, $f \overset{\text{п.в.}}{>} g$, $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g$, $f \overset{\text{п.в.}}{<} g$ будем обозначать равенство и неравенства, имеющие место также μ-почти всюду. Кроме того, если $A, B \subset X$, то включения $A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$ и $B \overset{\text{п.в.}}{\supset} A$ означают, что μ-почти все элементы из A содержатся в B. В частности, $A \overset{\text{п.в.}}{=} B$ эквивалентно ($A \overset{\text{п.в.}}{\subset} B$ и $B \overset{\text{п.в.}}{\supset} A$).

Упражнение 5.15. Проверьте, что обычные соотношения, имеющие место для всюду выполняющихся равенств и неравенств, взятых в не более чем счетном количестве, остаются справедливыми почти всюду. Например, если $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g$ и $g \overset{\text{п.в.}}{\leq} f$, то $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$; если $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g \overset{\text{п.в.}}{\leq} h$, то $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} h$.

5.5 Верхние и нижние функции

Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X, и $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$ — произвольная функция.

Определение 5.16. Функция $u\colon X\to\mathbb{R}$, являющаяся μ-простой μ-интегрируемой, называется *верхней* (*нижней*) для f, если $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} u$ (соответственно, $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} u$).

Замечание 5.17. Не всякая функция $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$ имеет верхнюю или нижнюю функции. Это может быть, например, когда f принимает значение $\pm\infty$ на множестве ненулевой меры. В случае, если f является μ-измеримой, это — единственная причина отсутствия у f верхней или нижней функции. Чтобы это увидеть, построим по μ-измеримой функции f функции

$$u=\sum_{i\in\mathbb{N}}(-i)\cdot\chi_{f^{-1}(-i,-i+1]} \text{ и } v=\sum_{i\in\mathbb{N}} i\cdot\chi_{f^{-1}[i-1,i)}.$$

Эти функции определены на всем X, являются μ-простыми μ-интегрируемыми, а на множестве $f^{-1}(\mathbb{R})$ выполняется $u\leq f\leq v$. Кроме того, $u\leq f$ также на $f^{-1}(\infty)$, а $f\leq v$ также на $f^{-1}(-\infty)$. Отсюда вытекает, что если $\mu\big(f^{-1}(\infty)\big)=0$, то $u \overset{\text{п.в.}}{\leq} f$, т.е. u является нижней функцией для f; аналогично, если $\mu\big(f^{-1}(-\infty)\big)=0$, то $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} v$, т.е. v является верхней функцией для f.

Упражнение 5.18. Выясните, существуют ли верхние и нижние функции для неизмеримых f при условии, что $\mu\big(f^{-1}\{-\infty,\infty\}\big)=0$.

5.6 Верхние и нижние интегралы

Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X, и $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$ — **произвольная функция**.

Определение 5.19. *Верхним интегралом для функции* f называется величина

$$\int^* f\,d\mu=\inf\Big\{S(u,\mu) : u \text{ — верхняя функция для } f\Big\}.$$

Аналогично определяется *нижний интеграл для функции* f:

$$\int_* f\,d\mu=\sup\Big\{S(u,\mu) : u \text{ — нижняя функция для } f\Big\}.$$

Замечание 5.20. Если функция f не имеет верхней (нижней) функции, то, в силу соглашения 5.1, верхний интеграл равен ∞ (нижний интеграл равен $-\infty$). Таким образом, как верхний, так и нижний интегралы определены **для любой** функции f, потому что в случае, когда множество верхних (нижних) функций непусто, суммы из определения верхнего (нижнего) интегралов определены в силу μ-интегрируемости этих функций.

Упражнение 5.21. Пусть $f,\,g\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty,\infty]$. Докажите, что

(1) $\int_* f\,d\mu=-\int^*(-f)\,d\mu$;

(2) если $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g$, то $\int^* f\,d\mu\leq\int^* g\,d\mu$;

(3) если $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} 0$, то $\int^* f\,d\mu\geq 0$;

(4) если $\int^* f\,d\mu<\infty$, то $\int^* f^+\,d\mu<\infty$ и $f \overset{\text{п.в.}}{<} \infty$;

(5) если $0<c<\infty$, то $\int^*(cf)\,d\mu=c\int^* f\,d\mu$;

(6) приведите пример, показывающий, что предыдущее равенство может не иметь места при $c=0$;

(7) если $\int^* f\,d\mu+\int^* g\,d\mu<\infty$, то функция $f+g$ определена μ-почти всюду на X и

$$\int^*(f+g)\,d\mu\leq\int^* f\,d\mu+\int^* g\,d\mu;$$

(8) $\int_* f\,d\mu\leq\int^* f\,d\mu$.

Упражнение 5.22. Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения для нижнего интеграла.

5.7 Интеграл Лебега

Пусть X — произвольное множество, μ — внешняя мера на X, и $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty]$ — произвольная функция.

Определение 5.23. Функция f называется *μ-интегрируемой*, если

(1) f — **μ-измерима**, и

(2) $\int^* f\, d\mu = \int_* f\, d\mu$.

В этом случае вместо верхнего и нижнего интегралов пишут $\int f\, d\mu$ и называют его *интегралом Лебега* или просто *интегралом функции f по мере μ*.

Определение 5.24. Функция $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty]$ называется *μ-суммируемой*, если она μ-интегрируема и ее интеграл Лебега конечен.

Замечание 5.25. Для μ-простых функций мы дали два определения μ-интегрируемости и μ-суммируемости. В действительности, эти понятия равносильны, но пока мы этого не доказали, то про определения 5.11 будем говорить, что они имеют место в *узком смысле*, а про определения 5.23 и 5.24 — что они имеют место в *широком смысле*.

В следующем упражнении предполагается, что на множестве X задана внешняя мера μ, а также функции $f, g\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty]$.

Упражнение 5.26.

(1) μ-простая функция f является μ-интегрируемой в узком смысле слова тогда и только тогда, когда f является μ-интегрируемой в широком смысле слова; при этом $\int f\, d\mu = S(f, \mu)$.

(2) Пусть f — μ-измеримая и $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} 0$, тогда f — μ-интегрируемая функция и $\int f\, d\mu \geq 0$. В частности, для произвольной (μ-измеримой, но не обязательно μ-почти везде неотрицательной) функции f, обе f^+ и f^- являются μ-интегрируемыми, а их интегралы Лебега неотрицательны.

(3) При $c \neq 0$ имеем $\int (cf)\, d\mu = c \int f\, d\mu$.

(4) Приведите пример, показывающий, что предыдущее равенство может не иметь места при $c = 0$.

(5) Если сумма $\int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ корректно определена, то функция $f + g$ определена μ-почти всюду на X, является μ-интегрируемой и
$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

(6) Если $f \overset{\text{п.в.}}{\leq} g$ и либо $\int g\, d\mu < \infty$, либо $\int f\, d\mu > -\infty$, то $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

(7) $\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$.

(8) Если f является μ-интегрируемой, то $\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$.

(9) Если f является μ-суммируемой, то $|f|$ также μ-суммируема и $|f| \overset{\text{п.в.}}{<} \infty$, т.е. f — μ-почти всюду конечна.

(10) Если $f \overset{\text{п.в.}}{\geq} 0$, то $\int f\, d\mu = 0$ тогда и только тогда, когда $f \overset{\text{п.в.}}{=} 0$.

В качестве иллюстрации возможного использования упражнения 5.26, докажем, что каждая измеримая функция, отличная от нуля на множестве конечной меры и почти везде ограниченная интегрируема по Лебегу и ее интеграл конечен. Более того, мы дадим два доказательства этого факта: второе из них будет использовать исключительно определение верхних и нижних интегралов.

Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X и $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ — некоторая μ-измеримая функция.

Определение 5.27. Будем говорить, что функция f является *μ-почти везде ограниченной*, если для некоторого $0 \leq M < \infty$ выполняется $|f| \overset{\text{п.в.}}{\leq} M$ (что равносильно $f^\pm \overset{\text{п.в.}}{\leq} M$).

Следствие 5.28. *Пусть μ — внешняя мера на множестве X , и $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ — μ-измеримая, μ-почти везде ограниченная функция, причем $\mu\big(f \neq 0\big) < \infty$. Тогда f — μ-суммируема.*

Доказательство. (1) В этом доказательстве мы будем ссылаться исключительно на пункты упражнения 5.26. По 5.26 (2), функции f^+ и f^- являются μ-интегрируемыми. Положим $A = \{f \neq 0\}$, тогда A — μ-измеримо и $\mu(A) < \infty$. Так как f — μ-почти везде ограничена, существует такое $0 \le M < \infty$, что $|f| \overset{\text{п.в.}}{\le} M$ и, значит, $f^\pm \overset{\text{п.в.}}{\le} M$. Из сказанного вытекает, что $f^\pm \overset{\text{п.в.}}{\le} u := M\chi_A$, и так как u — неотрицательная μ-простая μ-измеримая, и, значит, μ-интегрируемая функция, то u — верхняя функция для $f^\pm$. По 5.26 (1), $\int u\,d\mu = S(u,\mu) = M\,\mu(A) < \infty$, откуда, применяя 5.26 (6), заключаем, что $\int f^\pm\,d\mu \le \int u\,d\mu < \infty$. Осталось применить 5.26 (7).

(2) Докажем теперь это же факт только через определение верхних и нижних интегралов. Пусть $0 \le M < \infty$ таково, что $|f| \overset{\text{п.в.}}{<} M$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$u_n = \sum_{i=-n+1}^{n} \frac{i-1}{n}\, M \cdot \chi_{f^{-1}(\frac{i-1}{n}M,\frac{i}{n}M]},\quad v_n = \sum_{i=-n+1}^{n} \frac{i}{n}\, M \cdot \chi_{f^{-1}(\frac{i-1}{n}M,\frac{i}{n}M]}.$$

Ясно, что u_n и v_n — μ-измеримы, $\big|S(u_n,\mu)\big| \le M\mu(f \neq 0) < \infty$, $\big|S(v_n,\mu)\big| \le M\mu(f \neq 0) < \infty$, а также, что $u_n \overset{\text{п.в.}}{\le} f \overset{\text{п.в.}}{\le} v_n$, так что u_n и v_n — нижняя и верхняя функции для f, интегралы от которых конечны. С другой стороны, $S(v_n,\mu) - S(u_n,\mu) = (M/n)\,\mu(f \neq 0) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $\int_* f\,d\mu = \int^* f\,d\mu \le M\,\mu(f \neq 0) < \infty$, так что функция f — μ-суммируема. □

Упражнение 5.29. Покажите, что

(1) для μ-измеримого $A \subset X$ функция χ_A является μ-интегрируемой и $\int \chi_A\,d\mu = \mu(A)$;

(2) для произвольного $A \subset X$ имеем $\int_* \chi_A\,d\mu \le \mu(A) \le \int^* \chi_A\,d\mu$;

(3) для произвольного $A \subset X$ и регулярной меры μ имеем $\int^* \chi_A\,d\mu = \mu(A)$.

Упражнение 5.30. Пусть μ — одна из следующих внешних мер на множестве X:

(1) $\mu(A) = 1$ для любого непустого множества $A \subset X$;

(2) μ — считающая мера, т.е. $\mu(A) = \#A$ для конечного множества $A \subset X$, и $\mu(A) = \infty$ для бесконечного $A \subset X$;

(3) μ — дельта мера Дирака, т.е. для некоторого $a \in X$ и произвольного $A \subset X$ имеем $\mu(A) = 1$ в точности тогда, когда $a \in A$, а для все остальных множеств их мера равна 0.

Выясните, как устроены $\sigma(\mu)$, μ-измеримые функции, μ-простые, μ-простые μ-интегрируемые функции, μ-простые μ-суммируемые функции; какие функции имеют верхние, какие — нижние функции, чему равны верхние и нижние интегралы от функций, какие функции являются μ-интегрируемыми, какие — μ-суммируемыми и чему равны их интегралы Лебега.

5.8 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 5.31 (Фату)**.** *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Тогда для произвольной последовательности μ-измеримых функций $f_i\colon X \overset{п.в.}{\to} [0,\infty]$, $i \in \mathbb{N}$, выполняется*

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \ge \int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Доказательство. Объединение всех множеств, на которых не определены рассматриваемые функции, снова имеет μ-меру ноль. Изменим функции на этом множестве, положив их равными нулю. Тогда теорема для исходных функций верна или нет одновременно с теоремой для измененных функций.

По упражнению 4.8, функция $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ является μ-измеримой. По 5.26 (2), все функции f_i и функция f — μ-интегрируемы, поэтому достаточно проверить, что

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \ge \int_* f\,d\mu = \sup\{S(u,\mu) : u \text{ — нижняя для } f\}.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно проверить, что для каждой нижней для f функции u выполняется

$$\liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \ge S(u,\mu).$$

Более того, так как $f \ge 0$, можно ограничиться неотрицательными функциями u, что мы и будем делать. По определению, каждая такая u имеет вид $u = \sum_{i\in I} a_i\,\chi_{A_i}$, где I — не более чем счетное множество, все a_i положительны, а $\{A_i\}$ — дизъюнктное семейство μ-измеримых подмножеств X. Так как $u \ge 0$, то

$$S(u,\mu) = \sup\Big\{S\Big(\sum_{i\in B\subset I} a_i\,\chi_{A_i},\,\mu\Big) : \#B<\infty\Big\},$$

поэтому последнее неравенство достаточно проверить для функций u, принимающих лишь конечное число значений. Итак, мы свели доказательство к проверке следующего утверждения: для каждой функции $u = \sum_{i=1}^m a_i\,\chi_{A_i}$ такой, что все a_i положительны, $\{A_i\}$ — дизъюнктное семейство μ-измеримых множеств, и $u \overset{\text{п.в.}}{\le} f$, выполняется

$$\liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \ge S(u,\mu) = \sum_{i=1}^m a_i\,\mu(A_i).$$

Для произвольного $0<t<1$ положим

$$B_{i,n} = \{x\in A_i : f_k(x) > t\,a_i \text{ для всех } k\ge n\},$$

тогда $B_{i,1}\subset B_{i,2}\subset\cdots\subset A_i$. Более того, $A_i = \cup_{n=1}^\infty B_{i,n}$. Действительно, пусть $x\in A_i$, тогда $f(x)\ge a_i > t\,a_i$, и так как $f = \liminf_{k\to\infty} f_k$, существует n такое, что для любого $k\ge n$ выполняется $f_k(x) > t\,a_i$, так что $x\in B_{i,n}$.

Покажем теперь, что $f_n \ge \sum_{i=1}^m t\,a_i\,\chi_{B_{i,n}}$. Действительно, если $x\in B_{i,n}$, то неравенство превращается в $f_n(x)\ge t\,a_i$, что верно по определению $B_{i,n}$. Если же $x\notin B_{i,n}$ ни при каком i, то неравенство имеет вид $f_n(x)\ge 0$, что верно по определению f_n.

Из доказанного неравенства, а также 5.26 (6) и 5.26 (1) вытекает, что

$$\int f_n\,d\mu \ge \sum_{i=1}^m t\,a_i\,\mu(B_{i,n}).$$

С другой стороны, при каждом фиксированном i возрастающая последовательность $B_{i,1}\subset B_{i,2}\subset\cdots$ состоит из μ-измеримых множеств, и $A_i = \cup_{n=1}^\infty B_{i,n}$, поэтому $\mu(B_{i,n})\to\mu(A_i)$ при $n\to\infty$. Следовательно, $\sum_{i=1}^m a_i\,\mu(B_{i,n})\to\sum_{i=1}^m a_i\,\mu(A_i)$ и, значит,

$$\liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \ge t\,\sum_{i=1}^m a_i\,\mu(A_i) = t\,S(u,\mu).$$

В силу произвольности t заключаем, что $\liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu\ge S(u,\mu)$, что и требовалось. □

Теорема 5.32 (Лебег, о монотонной сходимости)**.** *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Тогда для произвольной последовательности μ-измеримых функций $f_i\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [0,\infty]$, $i\in\mathbb{N}$, таких, что $f_1 \overset{\text{п.в.}}{\le} f_2 \overset{\text{п.в.}}{\le} \cdots$, выполняется*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Доказательство. Объединение всех множеств, на которых или не определены рассматриваемые функции, или не выполняются неравенства, снова имеет μ-меру ноль. Изменим функции на этом множестве, положив их равными нулю. Тогда теорема для исходных функций верна или нет одновременно с теоремой для измененных функций, причем в последнем случае все неравенства выполнены на всем X.

Так как все f_n неотрицательны, то все они μ-интегрируемы и их интегралы также неотрицательны в силу 5.26 (2). Так как все f_n являются μ-измеримыми, а при каждом $n\in\mathbb{N}$ выполняется $0\le\int f_n\,d\mu$ и $f_n\le f_{n+1}$, то $\int f_n\,d\mu \le \int f_{n+1}\,d\mu$ по пункту (5) упражнения 5.26. Отсюда вытекает, что существуют пределы $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$ и $\lim_{n\to\infty} f_n$, причем последний представляет собой μ-измеримую (неотрицательную) функцию в силу упражнения 4.8. Более того, так как $f_n\le\lim_{n\to\infty} f_n$ при всех n, то, в силу μ-измеримости f_n и $\lim_{n\to\infty} f_n$, а также $0\le\int f_n\,d\mu$, имеем $\int f_n\,d\mu \le \int\lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu$, снова в силу 5.26 (5). Тем самым, мы показали, что $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \le \int\lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu$.

Обратное неравенство вытекает из теоремы 5.31. □

Следствие 5.33. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Тогда для произвольного счетного семейства K и множества $\left\{f_k\colon X \overset{п.в.}{\to} [0,\infty]\right\}_{k\in K}$, состоящего из μ-измеримых функций, выполняется*

$$\sum_{k\in K}\int f_k\,d\mu = \int \sum_{k\in K} f_k\,d\mu.$$

Доказательство. Начнем с переопределения всех функций, как это сделано в начале доказательства теоремы 5.31. Затем перенумеруем как-нибудь функции f_k натуральными числами и положим $g_n = f_1+\dots+f_n$. Тогда g_n — последовательность неотрицательных μ-измеримых функций, причем $g_1 \le g_2 \le \cdots$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int f_k\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int f_k\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\sum_{k=1}^{n} f_k\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \int\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,d\mu,$$

где второе равенство вытекает из неотрицательности всех $\int f_k\,d\mu$ и 5.26 (5), а четвертое равенство — из теоремы 5.32. □

Следствие 5.34 (теорема Беппо Леви)**.** *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Тогда для произвольной последовательности μ-измеримых функций $f_i\colon X \overset{п.в.}{\to} [-\infty,\infty]$, $i\in\mathbb{N}$, таких, что $f_1 \overset{п.в.}{\le} f_2 \overset{п.в.}{\le} \cdots$ и $\int f_1\,d\mu > -\infty$, выполняется*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Доказательство. Начнем с переопределения всех функций, как это сделано в начале доказательства теоремы 5.32. Так как последовательность f_n монотонна, существует предельная функция $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, которая, по упражнению 4.8, является μ-измеримой. Так как $f \ge f_1$, $f_n \ge f_1$ и $\int f_1\,d\mu > -\infty$, то, по 5.26 (6), функция f и все функции f_n — μ-интегрируемы, а также $\int f\,d\mu \ge \int f_1\,d\mu$ и $\int f_n\,d\mu \ge \int f_1\,d\mu$. Так как последовательность f_n не убывает и $\int f_n\,d\mu > -\infty$ для всех n, то, по 5.26 (6), последовательность $\int f_n\,d\mu$ тоже не убывает, поэтому существует $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$.

Пусть сначала $\int f_1\,d\mu = \infty$, тогда $\int f\,d\mu = \int f_n\,d\mu = \infty$ и $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \infty$.

Пусть теперь $\int f_1\,d\mu < \infty$, тогда f_1 — μ-суммируема. По 5.26 (9), функция f_1 — μ-почти всюду ограничена. Вновь, не ограничивая общности, переопределим нулем все функции f_n на множестве (μ-меры ноль), где функция f_1 бесконечна. Теперь можно считать, что f_1 ограничена всюду, поэтому определены функции $g_n = f_n - f_1$. Эти функции удовлетворяют теореме 5.32, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int (f_n - f_1)\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty}(f_n - f_1)\,d\mu.$$

Так как f и все f_n — μ-интегрируемы, а интеграл $\int f_1\,d\mu$ конечен, то $\int (f_n-f_1)\,d\mu = \int f_n\,d\mu - \int f_1\,d\mu$ и $\int (f-f_1)\,d\mu = \int f\,d\mu - \int f_1\,d\mu$ по 5.26 (3) и 5.26 (5). Суммируя сказанное выше, получаем следующую цепочку равенств:

$$-\int f_1\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int (f_n - f_1)\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty}(f_n - f_1)\,d\mu = -\int f_1\,d\mu + \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu,$$

откуда мгновенно получает требуемое. □

Замечание 5.35. Имеется естественный аналог теоремы Беппо Леви для монотонно убывающей последовательности (сформулируйте и докажите).

Приводимое ниже следствие показывает, что при определении интеграла Лебега для функций f, у которых конечен верхний (или нижний) интеграл, можно не требовать измеримости f, потому что измеримость будет автоматически вытекать из совпадения верхнего и нижнего интегралов.

Следствие 5.36. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ — произвольная функция. Предположим, что $-\infty < \int_* f\,d\mu = \int^* f\,d\mu < \infty$. Тогда f — μ-измерима.*

Доказательство. Так как нижние и верхние интегралы конечны, множества нижних и верхних функций для f непусты. Пусть u_n и v_n — последовательности нижних и верхних функций для f соответственно, причем такие, что $\sup S(u_n, \mu) = \int_* f\,d\mu$ и $\inf S(v_n, \mu) = \int^* f\,d\mu$. Тогда, начиная с некоторого n, все $S(u_n, \mu)$ и $S(v_n, \mu)$ конечны. Без ограничения общности, будем сразу предполагать, что это имеет место для $n = 1$. Далее, положим $u'_n = \max\{u_1, \dots, u_n\}$ и $v'_n = \min\{v_1, \dots, v_n\}$. Тогда каждая u'_n и v'_n — μ-измерима по упражнению 4.7, принимает не более чем счетное число значений, причем все эти значения конечны, поэтому u'_n и v'_n являются μ-простыми; кроме того,

$$u_1 = u'_1 \le u'_2 \le \dots \le f \le \dots \le v'_2 \le v'_1 = v_1,$$

следовательно, по 5.26 (6),

$$-\infty < \int u_1\,d\mu = \int u'_1\,d\mu \le \int u'_2\,d\mu \le \dots \le \int v'_2\,d\mu \le \int v'_1\,d\mu = \int v_1\,d\mu < \infty,$$

в частности, все u'_n и v'_n — μ-интегрируемы (и даже μ-суммируемы), поэтому они являются соответственно нижними и верхними функциями для f, откуда

$$\int u'_n\,d\mu \le \int_* f\,d\mu = \int^* f\,d\mu \le \int v'_n\,d\mu.$$

По следствию 5.34, $\lim_{n\to\infty} \int u'_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} u'_n\,d\mu$, в частности, функция $u = \lim_{n\to\infty} u'_n$ является μ-измеримой. Так как $u'_n \overset{\text{п.в.}}{\le} f$ при всех n, то $u \overset{\text{п.в.}}{\le} f$ и $\int u\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u'_n\,d\mu \le \int_* f\,d\mu$. Аналогично, определена функция $v = \lim_{n\to\infty} v'_n$, причем для нее $f \overset{\text{п.в.}}{\le} v$ и $\int v\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int v'_n\,d\mu \ge \int^* f\,d\mu$.

Заметим наконец, что при каждом n выполняется $u_n \le u'_n$ и $v'_n \le v_n$, откуда, снова по 5.26 (6), $\int u_n\,d\mu \le \int u'_n\,d\mu$ и $\int v'_n\,d\mu \le \int v_n\,d\mu$, поэтому, так как $\int_* f\,d\mu = \sup_n \int u_n$ и $\int^* f\,d\mu = \inf_n \int v_n$, получаем:

$$\int u\,d\mu = \int_* f\,d\mu = \int^* f\,d\mu = \int v\,d\mu.$$

Так как эти интегралы конечны, из 5.26 (5) вытекает, что $\int (v - u)\,d\mu = 0$. Так как $u \overset{\text{п.в.}}{\le} f \overset{\text{п.в.}}{\le} v$, то $v - u \overset{\text{п.в.}}{\ge} 0$ и применим 5.26 (10), в соответствии с которым $v - u \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, т.е. $u \overset{\text{п.в.}}{=} v$. Но тогда $f \overset{\text{п.в.}}{=} u$ и, значит, f — μ-измерима. □

Замечание 5.37. В следствии 5.36 нельзя отказаться от условия конечности интегралов. Действительно, пусть $X = \mathbb{R}$, μ — лебегово продолжение меры Лебега (также являющееся инвариантной мерой), $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ — функция, определенная так: $f(x) = 0$ при $x \le 1$, и $f(x) = x$ при $x > 1$. Определим функцию $u\colon X \to \mathbb{R}$, положив функция $u(x) = f(x)$ при $x \le 1$, и $u(x) = n$ при $x \in (n, n+1]$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда u является нижней для f и $S(u, \mu) = \infty$. Пусть $A \subset [0, 1]$ — пример Витали μ-неизмеримого множества, описанный в разделе 2.5. Определим функцию $g\colon X \to [-\infty, \infty]$, положив ее равной f вне отрезка $[0, 1]$, и равной χ_A на $[0, 1]$. Тогда $g^{-1}(1) = A$, так что g не является μ-измеримой. С другой стороны, описанная выше функция u является нижней для g, откуда $\int_* g\,d\mu = \infty$, поэтому $\int^* g\,d\mu = \infty$ и, значит, g является μ-интегрируемой.

Следствие 5.38. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и $f\colon X \overset{\text{п.в.}}{\to} [-\infty, \infty]$ — любая неизмеримая функция. Предположим, что верхний или нижний интеграл для f конечны. Тогда эти интегралы различны. В частности, у характеристической функции неизмеримого множества конечной меры верхний и нижний интегралы различны.*

Пример 5.39. Пусть $\mu(A) = 1$ тогда и только тогда, когда $A \ne \emptyset$. По 3.11 (4), $\sigma(\mu) = \{\emptyset, X\}$, поэтому если X состоит не менее чем из трех точек, то каждое $A = \{a, b\} \subset X$ — μ-неизмеримо, так что μ-неизмерима и его характеристическая функция χ_A. Из решения упражнения 5.30 (1) вытекает, что μ-измеримые функции — это, в точности, константы, причем верхними и нижними функциями могут быть только конечные константы. Следовательно, каждая нижняя для f функция u удовлетворяет $u \le 0$, а для каждой верхней функции v выполняется $v \ge 1$, поэтому $\int^* f\,d\mu = \sup S(u, \mu) \le 0$ и $\int_* f\,d\mu = \inf S(v, \mu) \ge 1$, в частности, эти интегралы различны.

Пример 5.40. Пусть $X = \mathbb{R}$ и $\mu = (\mathcal{L}^1)^*$ — продолжение Лебега меры Лебега $\mathcal{L}^1$ до внешней меры (инвариантной относительно сдвигов), см. определение 3.5. Пусть A — неизмеримое множество, описанное в разделе 2.5. Тогда, по следствию 5.38, верхние и нижние интегралы для χ_A различны.

Теорема 5.41 (Лебег, о мажорируемой сходимости)**.** *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Пусть также заданы μ-суммируемая функция $h\colon X \overset{п.в.}{\to} [0,\infty]$ и последовательность μ-измеримых функций $f_n\colon X \overset{п.в.}{\to} [-\infty,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $|f_n| \overset{п.в.}{\le} h$ и $f_n \overset{п.в.}{\to} g$ для некоторой функции $g\colon X \overset{п.в.}{\to} [-\infty,\infty]$. Тогда функция g является μ-измеримой и*

$$\int |f_n - g|\,d\mu \to 0, \text{ поэтому } \int f_n\,d\mu \to \int g\,d\mu.$$

Доказательство. По упражнению 4.8, функция g является μ-измеримой. По 5.21 (4), функция h конечна μ-почти везде, поэтому также μ-почти везде конечны функции f_n. Следовательно, функция $h_n := 2h - |f_n - g|$ также определена μ-почти везде. Так как $|f_n| \overset{\text{п.в.}}{\le} h$ и $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} g$, имеем также $|g| \overset{\text{п.в.}}{\le} h$, поэтому $h_n \overset{\text{п.в.}}{\ge} 0$ при всех n. Кроме того, они, по упражнению 4.7, являются μ-измеримыми. Так как $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} g$, то $h_n \overset{\text{п.в.}}{\to} 2h$. По теореме 5.31, имеем

$$0 \ge \int 2h\,d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int \big(2h - |f_n - g|\big)\,d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - g| \ge \limsup_{n\to\infty} \left| \int f_n\,d\mu - \int g\,d\mu \right|,$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что функции f_n и g являются μ-суммируемыми, так как они мажорируются μ-суммируемой функцией h. □

5.9 Произведение мер и теорема Фубини

Пусть μ и ν — внешние меры на множествах X и Y соответственно. Определим функцию $\mu\times\nu\colon 2^{X\times Y} \to [0,+\infty]$ следующим образом (**здесь мы предполагаем, что** $0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0$):

$$(\mu\times\nu)(S) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\cdot\nu(B_j) \mid A_j \in \sigma(\mu),\ B_j \in \sigma(\nu),\ S \subset \bigcup_j A_j \times B_j \Big\}.$$

Из упражнения 3.7 вытекает, что $\mu\times\nu$ является внешней мерой.

Определение 5.42. Внешняя мера $\mu\times\nu$ называется *прямым произведением внешних мер μ и ν*.

Ниже нам понадобятся еще несколько понятий.

Определение 5.43. Пусть μ — внешняя мера на множестве X. Подмножество $A \subset X$ называется *счетно μ-измеримым*, если $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \in \sigma(\mu)$ и $\mu(A_i) < \infty$ при каждом i. Функция $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ называется *счетно μ-измеримой*, если она μ-измерима, а множество $\{f \ne 0\}$ — счетно μ-измеримо.

Обозначение 5.44. Если $S \subset X\times Y$ и $(x,y) \in X\times\ Y$, то положим $S_x = \{y : (x,y)\in S\}$, $S_y = \{x : (x,y) \in S\}$ и будем называть их *сечениями* множества S. Отметим, что сечения S_x и S_y могут быть пусты.

Обозначение 5.45. Пусть μ — внешняя мера на множестве X. Если для каждого $x \in X$ задано подмножество $A_x \subset Y$, и $\mathcal{C}$ — некоторое семейство подмножеств Y, то $A_x \overset{\text{п.в.}}{\in} \mathcal{C}$ обозначает, что A_x является элементом семейства $\mathcal{C}$ для почти всех $x \in X$.

Теорема 5.46 (Фубини)**.** *Пусть μ и ν — внешние меры на X и Y соответственно. Тогда*

(1) *если $A \in \sigma(\mu)$ и $B \in \sigma(\nu)$, то $A\times B \in \sigma(\mu\times\nu)$ и $(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B)$;*

(2) *внешняя мера $\mu\times\nu$ регулярна;*

(3) *для каждого счетно $(\mu\times\nu)$-измеримого $S \subset X\times Y$ имеем $S_x \overset{п.в.}{\in} \sigma(\nu)$, $S_y \overset{п.в.}{\in} \sigma(\mu)$ и*

$$(\mu\times\nu)(S) = \int \nu(S_x)\,d\mu = \int \mu(S_y)\,d\nu\,;$$

(4) *если $f\colon X\times Y \to [-\infty,\infty]$ является счетно $(\mu\times\nu)$-измеримой и $(\mu\times\nu)$-интегрируемой (в частности, $(\mu\times\nu)$-суммируемой), то*

$$\int f\,d(\mu\times\nu) = \int\int f\,d\mu\,d\nu = \int\int f\,d\nu\,d\mu.$$

Замечание 5.47. В пункте (4) утверждается, что $(\mu\times\nu)$-суммируемость влечет счетную $(\mu\times\nu)$-измеримость. Покажем это. Пусть f является $(\mu\times\nu)$-суммируемой. По теореме 4.11, имеем

$$f^+ = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{A_k} \quad\text{и}\quad f^- = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{B_k},$$

где все A_k и B_k являются $(\mu\times\nu)$-измеримыми. Из суммируемости функции f и 5.26 (7) вытекает, что оба интеграла $\int f^+\,d(\mu\times\nu)$ и $\int f^-\,d(\mu\times\nu)$ конечны. По 5.33 и 5.26 (1), имеем

$$\int f^+\,d(\mu\times\nu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\mu\times\nu)(A_k) < \infty \quad\text{и}\quad \int f^-\,d(\mu\times\nu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\mu\times\nu)(B_k) < \infty,$$

откуда при всех k получаем $(\mu\times\nu)(A_k)<\infty$ и $(\mu\times\nu)(B_k)<\infty$. Осталось заметить, что $\{f\neq 0\}\subset(\cup A_k)\cup(\cup B_k)$.

Доказательство теоремы 5.46. Рассмотрим семейство $F\subset 2^{X\times Y}$, состоящее из всех множеств S, для которых выполняется следующее *условие повторной интегрируемости*: определен "повторный интеграл"

$$\rho(S) := \int\left(\int \chi_S\,d\mu\right)d\nu.$$

Опишем необходимое и достаточно условие существования $\rho(S)$. Раз "внешний" интеграл существует, значит, его подынтегральная функция должна быть определена почти всюду и быть ν-измеримой. Таким образом, "внутренний интеграл" определен ν-почти всегда. Однако при каждом y он интегрирует χ_{S_y}, поэтому подынтегральная функция неотрицательна и, значит, существование интеграла равносильно ее μ-измеримости, см. 5.26 (2). Так как "внутренний интеграл" неотрицателен, то, по тем же соображениям, его ν-интегрируемость равносильна его ν-измеримости. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Лемма 5.48. *Величина $\rho(S)$ определена тогда и только тогда, когда*

(1) $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$, *т.е. сечение S_y является ν-почти всегда μ-измеримым, и*

(2) *функция $g(y)=\mu(S_y)$ — ν-измерима.*

Более того, если $\rho(S)$ определено, то $\rho(S)=\int\mu(S_y)\,d\nu$.

Лемма 5.49. *Для любых $A\in\sigma(\mu)$ и $B\in\sigma(\nu)$ имеем $S=A\times B\in F$ и $\rho(S)=\mu(A)\nu(B)$.*

Доказательство. В данном случае,

$$S_y = \begin{cases} A & \text{при } y\in B,\\ \emptyset & \text{при } y\notin B,\end{cases}$$

поэтому $S_y\in\sigma(\mu)$ при всех y. Далее,

$$g(y)=\mu(S_y)=\begin{cases}\mu(A) & \text{при } y\in B,\\ 0 & \text{при } y\notin B,\end{cases} = \mu(A)\chi_B,$$

$g(y)=\mu(S_y)=\mu(A)\chi_B$, поэтому функция g является ν-измеримой в силу того, что $B\in\sigma(\nu)$. Осталось применить лемму 5.48. □

Лемма 5.50. *Пусть $S^1, S^2,\ldots$ — непересекающиеся элементы семейства F, и $S=\cup_{i=1}^{\infty}S^i$. Тогда $S\in F$ и $\rho(S)=\sum_{i=1}^{\infty}\rho(S^i)$.*

Доказательство. Так как при каждом i выражение $\rho(S^i)$ определено, то, по лемме 5.48, имеем $S^i_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и все $g^i(y)=\mu(S^i_y)$ — ν-измеримые функции. Так как S^i не пересекаются, при каждом $y\in Y$ выполняется $S_y=\sqcup_{i=1}^{\infty}S^i_y$, поэтому $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$. Более того, для каждого $y\in Y$, при котором все S^i_y являются μ-измеримыми, имеем $g(y)=\mu(S_y)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(S^i_y)$ в силу 3.17 (4), поэтому $g \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}g^i$ и, значит, g — также ν-измерима в силу упражнений 4.7 и 4.8. Тем самым, по лемме 5.48, имеем $S\in F$. Оставшаяся часть леммы вытекает из следствия 5.33, примененного к функциям g и g^i. □

Лемма 5.51. *Пусть дана последовательность $S^1, S^2, \dots \in F$ такая, что $S^1 \supset S^2 \supset \cdots$, и $S = \cap_{i=1}^{\infty} S^i$. Предположим, что $\rho(S^1) < \infty$. Тогда $S \in F$ и $\lim_{i\to\infty} \rho(S^i) = \rho(S)$.*

Доказательство. По лемме 5.48, имеем $S_y^i \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$. Кроме того, $S_y = \cap_{i=1}^{\infty} S_y^i$ и $\rho(S^1) = \int \mu(S_y^1)\, d\nu < \infty$, откуда $\mu(S_y^1) \overset{\text{п.в.}}{<} \infty$ по 5.26 (9), поэтому применимо 3.17 (6), в соответствии с которым $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и $g(y) = \mu(S_y) = \lim_{i\to\infty} \mu(S_y^i)$ при ν-почти всех $y \in Y$. Тем самым, $g \overset{\text{п.в.}}{=} \lim_{i\to\infty} g^i$, где $g^i(y) = \mu(S_y^i)$, поэтому g является ν-измеримой в силу 4.8. По лемме 5.48, имеем $S \in F$. Для завершения доказательства осталось заметить, что g^1 является по условию ν-суммируемой и $|g^i| \le g^1$, поэтому, в силу теоремы 5.41, имеем $\lim_{i\to\infty} \rho(S^i) = \rho(S)$. □

Рассмотрим следующие семейства подмножеств в $X \times Y$:

$\mathcal{P}_0 = \big\{A \times B : A \in \gamma(\mu),\, B \in \sigma(\nu)\big\}$;

$\mathcal{P}_1 = \big\{\cup G : G \subset \mathcal{P}_0,\, G$ не более чем счетно$\big\}$;

$\mathcal{P}_2 = \big\{\cap H : \emptyset \ne H \subset \mathcal{P}_1,\, H$ не более чем счетно$\big\}$.

По лемме 5.49, имеем $\mathcal{P}_0 \subset F$.
Далее, если $A \times B,\, C \times D \in \mathcal{P}_0$, то

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{P}_0$

$(A \times B) \setminus (C \times D) = \big[(A \setminus C) \times (B \cap D)\big] \sqcup \big[(A \setminus C) \times (B \setminus D)\big] \sqcup \big[(A \cap C) \times (B \setminus D)\big] \in \mathcal{P}_1$,

$(A \times B) \cup (C \times D) = \big[(A \times B) \setminus (C \times D)\big] \sqcup \big[(A \times B) \cap (C \times D)\big] \sqcup \big[(C \times D) \setminus (A \times B)\big] \in \mathcal{P}_1$.

Лемма 5.52. *Пусть $A_1 \times B_1, \dots, A_n \times B_n \in \mathcal{P}_0$, тогда $\cup_{i=1}^n (A_i \times B_i)$ равно объединению некоторого конечного дизъюнктного подсемейства в $\mathcal{P}_0$.*

Доказательство. Будем доказывать по индукции. Первый шаг мы уже сделали. Предположим, что $\cup_{i=1}^{n-1} (A_i \times B_i) = \sqcup_{j=1}^m C_j \times D_j$ для некоторых $C_j \times D_j \in \mathcal{P}_0$. Тогда, в силу сказанного выше, каждое множество $(C_j \times D_j)$ разбивается на $(C_j \times D_j) \cap (A_n \times B_n) \in \mathcal{P}_0$ и на три элемента из $\mathcal{P}_0$, разбивающих $(C_j \times D_j) \setminus (A_n \times B_n)$. Таким образом, осталось разбить $A_n \times B_n$.

Будем это делать последовательно. Сначала разобьем его на $(A_n \times B_n) \cap (C_1 \times D_1) \in \mathcal{P}_0$ и на три множества $U_i \in \mathcal{P}_0$, дающие разбиение $(A_n \times B_n) \setminus (C_1 \times D_1)$. Множество $C_2 \times D_2$ не пересекает $C_1 \times D_1$ и, значит, его пересечение с $A_n \times B_n$ состоит из его пересечений с множествами U_i. Разобьем каждое U_i на их пересечение с $C_2 \times D_2$, а также на множества, задающие разбиение $U_i \setminus (C_2 \times D_2)$ (если они не пусты). Продолжая этот процесс, получим конечное разбиение $A_n \times B_n$ на элементы из $\mathcal{P}_0$. □

Процесс разбиения, описанный в доказательстве леммы 5.52, можно распространить и на счетное число элементов: результирующее разбиение получается из пересечений убывающих последовательностей элементов из $\mathcal{P}_0$, дающих разбиения на каждом конечном шаге.

Следствие 5.53. *Каждый элемент из $\mathcal{P}_1$ представим в виде дизъюнктного объединения не более чем счетного числа элементов из $\mathcal{P}_0$, поэтому, в силу леммы 5.50, имеем $\mathcal{P}_1 \subset F$. Кроме того, $\mathcal{P}_1$ замкнуто относительно конечных пересечений и разностей.*

Теперь мы в состоянии доказать следующий ключевой результат.

Лемма 5.54. *Для любого $S \subset X \times Y$ имеем $(\mu \times \nu)(S) = \inf\big\{\rho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\big\}$.*

Доказательство. По определению, $(\mu \times \nu)(S) = \inf\big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i) : S \subset V = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \in \mathcal{P}_1\big\}$.
Заметим, что $\chi_V \le \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i \times B_i}$, поэтому

$$\rho(V) \le \int\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i \times B_i}\right) d\mu\, d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \int\int \chi_{A_i \times B_i}\, d\mu\, d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i),$$

откуда $\inf\big\{\rho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\big\} \le (\mu \times \nu)(S)$.

С другой стороны, в силу следствия 5.53, каждое V можно представить в виде дизъюнктного объединения множеств $A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$, и тогда $\rho(V) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)$, поэтому $(\mu \times \nu)(S) \le \inf\big\{\rho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\big\}$, откуда заключаем требуемое равенство. □

Следствие 5.55. *Для каждого $S \in \mathcal{P}_1$ имеем $(\mu \times \nu)(S) = \rho(S)$. В частности, для $A \times B \in \mathcal{P}_1$ имеем $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.*

Доказательство. Если $S, V \in \mathcal{P}_1$ и $S \subset V$, то $\chi_S \le \chi_V$ и, следовательно, $\rho(S) \le \rho(V)$, поэтому, по лемме 5.54, имеем
$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\bigl\{\rho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\bigr\} = \rho(S).$$
Второе утверждение вытекает из леммы 5.49. □

Из следствия 5.55 и леммы 5.50 вытекает следующий результат.

Следствие 5.56. *Внешняя мера $\mu \times \nu$ является σ-аддитивной функцией на $\mathcal{P}_1$.*

Лемма 5.57. *Для любого $S \subset X \times Y$ существует такое $W \in \mathcal{P}_2 \cap F$, что $S \subset W$ и*
$$(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \rho(W).$$

Доказательство. По лемме 5.54, существует последовательность $V_i \in \mathcal{P}_1$ такая, что $S \subset V_i$ и $(\mu \times \nu)(S) = \inf \rho(V_i)$. Положим $W_n = \cap_{i=1}^n V_i$. По следствию 5.53, имеем $W_n \in \mathcal{P}_1$. Так как $S \subset W_n \subset V_n$, то $\rho(W_n) \le \rho(V_n)$ и, значит, $(\mu \times \nu)(S) = \inf \rho(W_n)$. Более того, так как $W_1 \supset W_2 \supset \cdots$, то $\rho(W_1) \ge \rho(W_2) \ge \cdots$ и, следовательно, $(\mu \times \nu)(S) = \lim_{n\to\infty} \rho(W_n)$.

Если $(\mu \times \nu)(S) < \infty$, то для некоторого n имеем $\rho(W_n) < \infty$, поэтому применима лемма 5.51, в силу которой $W = \cap W_n \in F$ и $\rho(W) = \lim_{i\to\infty} \rho(W_n)$, поэтому $(\mu \times \nu)(S) = \rho(W)$. Так как $S \subset W \subset W_n$, то $(\mu \times \nu)(S) \le (\mu \times \nu)(W) \le (\mu \times \nu)(W_n)$; из следствия 5.55 вытекает, что $\rho(W_n) = (\mu \times \nu)(W_n)$, и так как $(\mu \times \nu)(W_n) \to (\mu \times \nu)(S)$, то $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \rho(W)$.

Пусть теперь $(\mu \times \nu)(S) = \infty$, тогда положим $W = X \times Y \in \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_2$. Из монотонности внешней меры и следствия 5.55 вытекает, что $\infty = (\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \rho(W)$. □

Лемма 5.58. *Каждое $A \times B \in \mathcal{P}_0$ является $(\mu \times \nu)$-измеримым.*

Доказательство. Выберем произвольное $T \subset X \times Y$, и пусть $T \subset V \in \mathcal{P}_1$. Заметим, что $V \cap (A \times B)$, $V \setminus (A \times B) \in \mathcal{P}_1$, причем эти множества не пересекаются, поэтому из монотонности внешней меры и следствия 5.56 имеем
$$(\mu \times \nu)\bigl[T \cap (A \times B)\bigr] + (\mu \times \nu)\bigl[T \setminus (A \times B)\bigr] \le (\mu \times \nu)\bigl[V \cap (A \times B)\bigr] + (\mu \times \nu)\bigl[V \setminus (A \times B)\bigr] = (\mu \times \nu)(V).$$
Выбирая в качестве V такие $V_i \in \mathcal{P}_1$, что $T \subset V_i$ и $(\mu \times \nu)(T) = \inf \rho(V_i) = \inf(\mu \times \nu)(V_i)$, заключаем, что
$$(\mu \times \nu)\bigl[T \cap (A \times B)\bigr] + (\mu \times \nu)\bigl[T \setminus (A \times B)\bigr] \le (\mu \times \nu)(T).$$
Осталось применить упражнение 3.11. □

Следствие 5.55 и лемма 5.58 доказывают пункт (1).

Лемма 5.58 влечет следующий результат.

Следствие 5.59. *Все элементы из $\mathcal{P}_2$ являются $(\mu \times \nu)$-измеримыми.*

Следствие 5.60. *Мера $\mu \times \nu$ — регулярная.*

Доказательство. По следствию 5.59, все элементы из $\mathcal{P}_2$ являются $(\mu \times \nu)$-измеримыми, а по лемме 5.57, для каждого $S \subset X \times Y$ существует $W \in \mathcal{P}_2$ такое, что $S \subset W$ и $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W)$, откуда и вытекает утверждение следствия. □

Следствие 5.60 доказывают пункт (2).

Лемма 5.61. *Пусть $S \subset X \times Y$ — произвольное счетно $(\mu \times \nu)$-измеримое множество. Тогда $S_y \overset{п.в.}{\in} \sigma(\mu)$ и $(\mu \times \nu)(S) = \int \mu(S_y)\, d\nu$.*

Доказательство. По лемме 5.57, существует такое $W \in \mathcal{P}_2$, что $S \subset W$ и $\rho(W) = (\mu \times \nu)(W) = (\mu \times \nu)(S)$. Тогда, по лемме 5.48, $W_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$, функция $\mu(W_y)$ — ν-измерима, и $\rho(W) = \int \mu(W_y)\,d\nu$.

Предположим, что $(\mu \times \nu)(S) = 0$. Тогда $0 = \rho(W) = \int \mu(W_y)\,d\nu$, откуда, по 5.26 (10), имеем $\mu(W_y) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Так как $S \subset W$, то $\mu(S_y) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, следовательно, $S_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ в силу 3.11 (5), а, по 5.26 (10), функция $\mu(S_y)$ — ν-интегрируема и

$$\rho(S) = \int \mu(S_y)\,d\nu = 0 = (\mu \times \nu)(S).$$

Пусть теперь $(\mu \times \nu)(S) < \infty$. Так как $S \in \sigma(\mu \times \nu)$, имеем

$$(\mu \times \nu)(W) = (\mu \times \nu)(S) + (\mu \times \nu)(W \setminus S),$$

откуда $(\mu\times\nu)(W\setminus S) = 0$. По доказанному выше, $\rho(W\setminus S) = 0$, $(W\setminus S)_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и $\mu\big((W\setminus S)_y\big) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Как мы уже отмечали, $W_y \in \sigma(\mu)$, поэтому $S_y \overset{\text{п.в.}}{=} W_y\setminus(W_y\setminus S_y) \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$. Кроме того, $\mu(S_y) \overset{\text{п.в.}}{=} \mu(W_y)-\mu\big((W\setminus S)_y\big) \overset{\text{п.в.}}{=} \mu(W_y)$, а, значит, функция $\mu(S_y)$ — ν-измерима и

$$\rho(S) = \int \mu(S_y)\,d\nu = \int \mu(W_y)\,d\nu = \rho(W) = (\mu \times \nu)(S).$$

Наконец, пусть теперь $S = \cup_{i=n}^{\infty} S_n$, где $S_n \in \sigma(\mu\times\nu)$ и $(\mu\times\nu)(S_n) < \infty$. Положим $S'_1 = S_1$ и $S'_n = S_n \setminus \cup_{i<n} S_i$ при $n > 1$, тогда $S'_n \in \sigma(\mu \times \nu)$, $(\mu \times \nu)(S'_n) < \infty$ и $S = \sqcup S'_i$. По доказанному выше, $(S'_n)_y \overset{\text{п.в.}}{\in} \sigma(\mu)$ и $S'_n \in F$, так что, в силу леммы 5.50, $S \in F$ и

$$\rho(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(S'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mu\big((S'_n)_y\big)\,d\nu = \int \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big((S'_n)_y\big)\,d\nu = \int \mu\big(S_y\big)\,d\nu,$$

где предпоследнее равенство вытекает из следствия 5.33. $\square$

Из леммы 5.61, а также ее “симметричной версии” (если переопределить $r(S)$, поменяв порядок интегрирования) получаем пункт (3).

Докажем теперь пункт (4). Если f — функция из этого пункта, то $S = \{f \neq 0\}$ является, по определению, счетно $(\mu \times \nu)$-измеримым, как и в пункте (3), поэтому для случая $f = \chi_S$ пункт (4) следует из пункта (3).

Пусть теперь f — произвольная неотрицательная счетно $(\mu \times \nu)$-измеримая функция. По теореме 4.11, ее можно представить в виде

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k},$$

где все A_k являются $(\mu \times \nu)$-измеримыми. Так как $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k = \{f \neq 0\}$, то каждое A_k является счетно $(\mu\times\nu)$-измеримым, поэтому для $\frac{1}{k}\chi_{A_k}$ пункт (4) имеет место. Следствие 5.33 гарантирует, что каждый из трех интегралов в пункте (4) является счетно-аддитивным, тем самым, пункт (4) имеет место для неотрицательных функций.

Наконец, пусть f — произвольная счетно $(\mu\times\nu)$-измеримая функция, тогда f^+ и f^- являются неотрицательными счетно $(\mu \times \nu)$-измеримыми (проверьте), поэтому для них выполняется пункт (4), т.е. все три интеграла от f^+ и f^- определены и равны между собой. Так как, по условию, f является $(\mu \times \nu)$-интегрируемой, по определению имеем $\int f\,d(\mu\times\nu) = \int f^+\,d(\mu\times\nu) - \int f^-\,d(\mu\times\nu)$, причем один из интегралов в правой части конечен. Пусть для определенности конечным является $\int f^-\,d(\mu \times \nu)$. Тогда конечным также является равный ему интеграл $\int\int f^-\,d\mu\,d\nu$. По 5.26 (9), функция $\int f^-\,d\mu$ почти везде ограничена, поэтому почти везде определена функция $\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu = \int f\,d\mu$; здесь равенство имеет место по 5.26 (5) и 5.26 (3). Так как $\int\int f^-\,d\mu\,d\nu$ конечен, определено выражение

$$\int\int f^+\,d\mu\,d\nu - \int\int f^-\,d\mu\,d\nu = \int\left(\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right)d\nu = \int\int f\,d\mu\,d\nu$$

Здесь мы вновь применили 5.26 (5) и 5.26 (3). Таким образом, доказано первое равенство пункта (4). Второе равенство доказывается аналогично. $\square$

Приведем пример, демонстрирующий, что требование счетной μ-измеримости в теореме 5.46 существенно.

Пример 5.62. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, внешняя мера μ — лебегово продолжение меры Лебега, а внешняя мера ν — считающая. Пусть $S = \big\{(x,x) : x \in [0,1]\big\}$ и $f = \chi_S$.

Заметим, что μ и ν являются борелевскими мерами. Отсюда вытекает, что $\mu \times \nu$ — также борелевская. Действительно, по теореме 5.46, множества вида $A \times B$, где $A \in \sigma(\mu)$ и $B \in \sigma(\nu)$, являются $(\mu \times \nu)$-измеримыми, поэтому $(\mu \times \nu)$-измеримы и все открытые множества вида $A \times B \subset \mathbb{R}^2$. С другой стороны, каждое открытое множество на плоскости является не более чем счетным объединением открытых множеств вида $A \times B$, поэтому все открытые множества на $\mathbb{R}^2$ (в стандартной топологии) также $(\mu \times \nu)$-измеримы. По 3.36, $(\mu \times \nu)$-измеримыми являются и все борелевские подмножества $\mathbb{R}^2$.

Так как S — замкнутое подмножество плоскости, S является $(\mu \times \nu)$-измеримым, поэтому и f также $(\mu \times \nu)$-измерима. В силу 5.26 (2), f также μ-интегрируема.

Так как $\mu(S_y) = 0$ при всех $y \in Y$, имеем

$$\int \int f \, d\mu \, d\nu = \int \mu(S_y) \, d\nu = \int 0 \, d\nu = 0.$$

С другой стороны, $\nu(S_x) = 1$ при $x \in [0,1]$, и $\nu(S_x) = 0$ при всех остальных x, поэтому $\nu(S_x) = \chi_{[0,1]}$, откуда

$$\int \int f \, d\nu \, d\mu = \int \nu(S_x) \, d\mu = \int \chi_{[0,1]} \, d\mu = 1,$$

так что повторные интегралы для f различны, поэтому f не является счетно $(\mu \times \nu)$-измеримой. Наконец, если бы f была $(\mu \times \nu)$-суммируема, то, по той же теореме, повторные интегралы были бы равны, поэтому, в силу $f \geq 0$, имеем $\int f \, d(\mu \times \nu) = \infty$.