Тема 4

Измеримые отображения.

Пусть X_1 и X_2 — два пространства с заданными на них σ-алгебрами.

Определение 4.1. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется *измеримым*, если прообраз любого измеримого множества измерим.

Имеется ряд традиционных способов введения в рассмотрение измеримых отображений, когда соответствующие σ-алгебры задаются неявно. Приведем некоторые примеры.

Определение 4.2.

(1) Если X_i является топологическим (в частности, метрическим) пространством, и ничего не говорится про определенную на нем меру, то на X_i, как правило, рассматривается борелевская σ-алгебра.

(2) Например, говоря про измеримость функции $f\colon X_1 \to \mathbb{R}$, мы обычно предполагаем, что на $\mathbb{R}$ в качестве семейства измеримых множеств рассматриваемся борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(3) Аналогично определяются измеримые функции из X_1 в $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, где a может равняться $-\infty$, а b может равняться $\infty = +\infty$.

(4) Если на X_i задана (внешняя) мера μ_i, то в качестве σ-алгебры, как правило, рассматривается $\sigma(\mu_i)$, даже если X_i — топологическое пространство.

(5) Типичная ситуация: X_2 — топологическое (метрическое) пространство, а на X_1 задана (внешняя) мера μ_1. Тогда измеримое отображение в этом случае называют μ_1-*измеримым* для акцентирования внимания на том, что на X_1 рассматривается σ-алгебра $\sigma(\mu_1)$.

Определение 4.3. Если $f\colon X_1 \to X_2$ — отображение топологических пространств с борелевскими σ-алгебрами, измеримые отображения называют *борелевскими*.

Замечание 4.4. Так как измеримость борелевского отображения равносильна условию "прообраз открытого множества измерим" (проверьте), то каждое непрерывное отображение является борелевским.

Замечание 4.5. Пусть X_1 и X_2 — топологические пространства, причем на X_1 задана борелевская внешняя мера μ_1. Тогда μ_1-измеримое отображение $f\colon X_1 \to X_2$ не обязано быть борелевским, поскольку прообраз измеримого множества $A \subset X_2$ может лежать в $\sigma(\mu_1) \setminus \mathcal{B}(X_1)$.

Следующие свойства измеримых отображений доказываются непосредственно и оставляются в качестве упражнений.

Упражнение 4.6. Докажите, что композиция измеримых отображений также измерима.

Упражнение 4.7. Пусть $f,\, g\colon X \to \mathbb{R}$ — две μ-измеримые функции, и пусть a и b — произвольные вещественные числа. Докажите, что μ-измеримыми являются также $a\,f + b\,g$, $f\,g$, $|f|$, $\min(f,g)$ и $\max(f,g)$; если $g \neq 0$, то f/g также μ-измерима.

Упражнение 4.8. Пусть $f_k\colon X \to [-\infty,\infty]$ — последовательность μ-измеримых функций. Докажите, что μ-измеримыми являются также $\inf_{k\ge1} f_k$, $\sup_{k\ge1} f_k$, $\liminf_{k\to\infty} f_k$, $\limsup_{k\to\infty} f_k$.

Определение 4.9. Пусть X — произвольное множество, и $A \subset X$. Тогда функция $f\colon X \to \{0,1\}$ такая, что $f(x) = 1$, если и только если $x \in A$, называется *индикатором*, *индикаторной функцией* или *характеристической функцией множества* A и обозначается через χ_A.

Упражнение 4.10. Докажите, что если на X задана внешняя мера A, то индикаторная функция χ_A является μ-измеримой тогда и только тогда, когда A — μ-измеримо.

Теорема 4.11. *Каждая μ-измеримая функция $f\colon X \to [0,\infty]$ может быть представлена в виде*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k},$$

где все множества $A_k \subset X$ являются μ-измеримыми.

Доказательство. Положим $A_1 = \{x \in X : f \ge 1\}$. Если уже определены все A_i, $i < k$, то положим

$$A_k = \left\{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x)\right\}.$$

Лемма 4.12. *Имеем $f \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}$.*

Доказательство. Выберем произвольное $x \in X$. Если x не принадлежит ни одному A_k, то $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) = 0$, так что неравенство имеет место.

Пусть теперь $x \in A_k$ для некоторого k. Тогда, по определению A_k, имеем

$$f(x) \ge \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x).$$

При этом, для каждого m такого, что $x \notin A_m$, также выполняется неравенство

$$f(x) \ge \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x)$$

в силу того, что $\chi_{A_i}(x) = 0$ при всех i, для которых $x \notin A_i$. Переходя к пределу, заключаем требуемое. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Если $f(x) = \infty$, то $x \in A_k$ при всех k, поэтому в этой точке доказываемое равенство имеет место (так как ряд $\sum(1/i)$ расходится).

Если же $f(x) < \infty$, то, по той же причине, для бесконечного числа k имеем $x \notin A_k$. Поэтому для бесконечного числа k выполняется

$$0 \le f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x) < \frac{1}{k},$$

где первое неравенство вытекает из леммы 4.12, а второе — из того, что $x \notin A_k$. Устремляя k к бесконечности, получаем, что и для такого x имеет место доказываемое равенство. $\square$

Теорема 4.13 (Лузин)**.** *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на метрическом пространстве X, а $f\colon X \to Y$ — некоторое μ-измеримое отображение в сепарабельное метрическое пространство Y (с борелевской σ-алгеброй). Пусть $A \in \sigma(\mu)$ таково, что $\mu(A) < \infty$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $C \subset A$ такое, что $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$ и $f|_C$ непрерывна.*

Доказательство. Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 4.14. *Пусть Y — сепарабельное метрическое пространство. Тогда для каждого $d > 0$ пространство Y можно разбить на не более чем счетное число борелевских множеств диаметра меньше d.*

Доказательство. Выберем произвольное $0 < r < d/2$, тогда для каждого $y \in Y$ диаметр шара $B_r(y)$ меньше d. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное подмножество Y. Положим $B_k = B_r(a_k)$, $Y_i = B_k \setminus \cup_{i<k} B_i$, и пусть $Y_{k_1}, Y_{k_2}, Y_{k_3}, \ldots$, где $k_1 = 1$, — последовательные непустые Y_i. Тогда каждое Y_{k_i} является борелевским множество, диаметр которого меньше d; семейство $\{Y_{k_i}\}$ покрывает Y и никакие два элемента этого покрытия не пересекаются. $\square$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ разобьем Y на не более чем счетное число борелевских подмножеств $Y_{i,j}$, диаметр каждого из которых меньше $1/i$. Положим $A_{i,j} = f^{-1}(Y_{i,j}) \cap A$ (будем рассматривать только непустые пересечения). Тогда каждое $A_{i,j}$ — μ-измеримое подмножество X конечной меры, причем $\{A_{i,j}\}$ — разбиение множества A. Так как мера μ — борелевски регулярная, то, по следствию 3.43, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $E_{i,j} \subset A_{i,j}$, что $\mu(A_{i,j} \setminus E_{i,j}) < \varepsilon/2^{i+j}$. Тогда

$$\mu(A \setminus \cup_j E_{i,j}) = \sum_j \mu(A_{i,j} \setminus E_{i,j}) < \varepsilon/2^i,$$

поэтому найдется такое $J(i)$, что для $D_i = \cup_{j \le J(i)} E_{i,j}$ выполняется $\mu(A \setminus D_i) < \varepsilon/2^i$. Отметим, что множество D_i замкнуто.

В каждом $Y_{i,j}$ выберем по одной точке $y_{i,j}$. Определим отображение $g_i\colon D_i \to Y$, положив $g_i(x) = y_{i,j}$ при всех $x \in E_{i,j}$. Так как $\{E_{i,j}\}_{i \le J(i)}$ — конечное дизъюнктное семейство замкнутых множеств, отображение g_i непрерывно. Кроме того, для каждого $x \in D_i$, $x \in E_{i,j}$, выполняется $\bigl|f(x)g_i(x)\bigr| = |f(x)y_{i,j}| < 1/i$, так как $f(x) \in Y_{i,j}$ и диаметр $Y_{i,j}$ меньше $1/i$.

Положим $D = \cap D_i$, тогда D — замкнутое множество и

$$\mu(A \setminus D) = \mu(A \setminus \cap D_i) = \mu\bigl(\cup(A \setminus D_i)\bigr) \le \sum \mu(A \setminus D_i) < \varepsilon.$$

Кроме того, из сказанного выше вытекает, что функции $g_i|_D$ сходятся к $f|_D$ равномерно, поэтому $f|_D$ — непрерывная функция. □

Приведем некоторые следствия из теоремы 4.13.

Определение 4.15. Пусть μ — мера (внешняя мера) на множестве X. Утверждение, содержащее фразу “μ-почти” означает, что оно имеет место всюду, за исключением некоторого множества μ-меры ноль.

Определение 4.16. Мера (внешняя мера) μ на множестве X называется *σ-конечной* или *счетно конечной*, а множество X — *счетно μ-измеримым*, если X покрывается не более чем счетным набором μ-измеримых множеств конечной меры.

Следствие 4.17. *Пусть μ — борелевски регулярная σ-конечная внешняя мера на метрическом пространстве X, а $f\colon X \to Y$ — некоторое μ-измеримое отображение в сепарабельное метрическое пространство Y (с борелевской σ-алгеброй). Тогда существует борелевское отображение $g\colon X \to Y$, совпадающее μ-почти всюду с f.*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}$ — не более чем счетное семейство μ-измеримых множеств конечной меры, покрывающее X (существующее в силу σ-конечности меры μ). По теореме 4.13, для каждого i существует замкнутое множество $C_i \subset A_i$ такое, что $\mu(A_i \setminus C_i) < \varepsilon/2^i$ и функция $f|_{C_i}$ непрерывна. Положим $C^\varepsilon = \cup C_i$, тогда $\mu(X \setminus C^\varepsilon) = \mu\bigl((\cup A_i) \setminus (\cup C_i)\bigr) \le \sum \mu(A_i \setminus C_i) < \varepsilon$. Если $F \subset Y$ — произвольное замкнутое множество, то из непрерывности функции $f|_{C_i}$ и замкнутости C_i вытекает, что $G_i = (f|_{C_i})^{-1}(F)$ — замкнутые подмножества X, откуда $G^\varepsilon = \cup G_i$ — борелевское множество.

Положим $C = \cup_i C^{1/i}$, тогда $\mu(X \setminus C) = 0$. С другой стороны, как было показано выше, для произвольного замкнутого $F \subset Y$ множество $G^{1/i} = (f|_{C^{1/i}})^{-1}(F)$ — борелевское, поэтому $(f|_C)^{-1}(F) = \cup_i G^{1/i}$ — также борелевское множество, откуда вытекает, что $f|_C$ — борелевская функция.

Выберем произвольное $y \in Y$ и продолжим $f|_C$ на все X до функции g, положив $g(x) = y$ для всех $x \in X \setminus C$. Так как $X \setminus C$ — борелевское множество, полученная функция g — борелевская, совпадающая с f на C, т.е. μ-почти всюду. □

Чтобы сформулировать еще одно следствие, напомним определение нормального топологического пространства и теорему Титце–Урысона.

Определение 4.18. Топологическое пространство называется *нормальным*, если каждое его одноточечное подмножество замкнуто, и каждая пара непересекающихся замкнутых подмножеств имеет непересекающиеся открытые окрестности.

Замечание 4.19. Каждое метрическое пространство является нормальным.

Теорема 4.20 (Титце–Урысон). *Каждая непрерывная вещественная функция, заданная на замкнутом подмножестве нормального пространства, непрерывно продолжается на всё пространство.*

Следствие 4.21. *В предположениях теоремы 4.13, пусть $Y = \mathbb{R}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $\mu\Bigl(\bigl\{x \in A : f(x) \neq g(x)\bigr\}\Bigr) < \varepsilon$.*

Теорема 4.22 (Егоров)**.** *Пусть μ — внешняя мера на некотором множестве X, а $f_1, f_2, \dots$ и g — μ-измеримые отображения из X в сепарабельное метрическое пространство Y. Предположим, что для некоторого $A \subset X$, $\mu(A) < \infty$, отображения f_n сходятся поточечно к g почти всюду на A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует μ-измеримое множество $B \subset A$, $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$, для которого отображения $f_n|_B$ сходятся равномерно к $g|_B$.*

Доказательство. Для каждых $i, j \in \mathbb{N}$ положим

$$A_{i,n} = \left\{x \in X : \bigl|f_n(x)g(x)\bigr| \geq \frac{1}{2^i}\right\} \ \text{ и } \ C_{i,j} = \bigcup_{n=j}^{\infty} A_{i,n}.$$

В силу непрерывности метрики, а также того, что на Y рассматривается борелевская σ-алгебра, функция $h(x) = \bigl|f_n(x)g(x)\bigr|$ является μ-измеримой, поэтому все $A_{i,n}$ — μ-измеримы, и, значит, $C_{i,j}$ также μ-измеримы. Кроме того, при каждом i имеем $C_{i,1} \supset C_{i,2} \supset \cdots$. Поэтому, в силу предложения 3.38, при каждом фиксированном i имеем

$$\mu(A \cap C_{i,j}) \to \mu(A \cap \cap_j C_{i,j}).$$

Множество $A \cap \cap_j C_{i,j}$ состоит из всех $x \in A$, для которых при каждом $n \in N$ выполняется $\bigl|f_n(x)g(x)\bigr| \geq 1/2^i$. Однако, для μ-почти всех $x \in A$ имеем $f_n(x) \to g(x)$, поэтому $\mu(A \cap \cap_j C_{i,j}) = 0$. Отсюда вытекает, что для каждого i существует такое $J(i)$, для которого $\mu(A \cap C_{i,J(i)}) < \varepsilon/2^i$.

Рассмотрим множество $B = A \setminus \cup_i C_{i,J(i)} = \cap_i (A \setminus C_{i,J(i)})$. Заметим, что если $x \notin C_{i,j}$, то при всех $n \geq j$ выполняется $\bigl|f_n(x)g(x)\bigr| < 1/2^i$. Отсюда вытекает, что если $x \in B$, то $\bigl|f_n(x)g(x)\bigr| < 1/2^i$ при $n \geq J(i)$. Таким образом, для произвольного $\delta > 0$ найдется такое i, что $1/2^i < \delta$, поэтому при всех $x \in B$ и при всех $n \geq J(i)$ выполняется $\bigl|f_n(x)g(x)\bigr| < \delta$. Последнее означает равномерную сходимость функций $f_n|_B$ к $g|_B$. Осталось заметить, что

$$\mu(A \setminus B) = \mu\bigl(A \cap (\cup_i C_{i,J(i)})\bigr) \leq \sum_i \mu(A \cap C_{i,J(i)}) < \varepsilon.$$

$\square$