Тема 3

Внешние меры (по Каратеодори).

При задании меры часто бывает удобно не ограничивать класс всех множеств до подходящей σ-алгебры, а ослабить требование аддитивности. Таким образом получается определение внешней меры, заданной на всех подмножествах некоторого множества, но аддитивной на некоторой σ-алгебре, элементы которой называются измеримыми множествами. Перейдем к подробностям.

Определение 3.1. *Внешней мерой* на множестве X называется произвольное отображение $\mu\colon 2^X \to [0,+\infty]$ такое, что

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) для любого не более чем счетного семейства $\mathcal{C}$ подмножеств из X и любого $A \subset X$, для которого $A \subset \cup\mathcal{C}$, выполняется $\mu(A) \le \sum_{B\in\mathcal{C}} \mu(B)$ (субаддитивность или полуаддитивность).

Ясно, что если в (2) выбрать в качестве $\mathcal{C}$ одноэлементное множество $\{B\}$ такое, что $A \subset B$, то субаддитивность влечет свойство $\mu(A) \le \mu(B)$, которое обычно называют *монотонностью*.

Замечание 3.2. Вместо пункта (2) часто пишут два условия: монотонность, т.е. $\mu(A) \le \mu(B)$ для $A \subset B$, и субаддитивность в форме $\mu(\cup\mathcal{C}) \le \sum_{B\in\mathcal{C}} \mu(B)$. Приведем пример, который показывает, что из приведенной только что формы субаддитивности монотонность не вытекает. Пусть $X = \{a, b\}$. Положим $\mu\big(\{a\}\big) = 2$, $\mu\big(\{b\}\big) = 1$, $\mu\big(\{a, b\}\big) = 1$. Тогда эта функция субаддитивна, но $\mu\big(\{a\}\big) > \mu\big(\{a, b\}\big)$.

Приведем два важных примера построения внешней меры. В первом из них внешняя мера естественным образом продолжает меру на некоторой σ-алгебре множеств. Во втором примере внешняя мера порождается произвольной неотрицательной функцией на произвольном семействе подмножеств объемлющего пространства, содержащем $\emptyset$, причем на $\emptyset$ эта функция равна нулю.

(1) Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{M} \subset 2^X$. Определим функцию $\mu^*\colon 2^X \to [0,+\infty]$, положив

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(B) \mid A \subset B \in \mathcal{M}\big\}.$$

Теорема 3.3. *Определенная только что функция μ^* является внешней мерой, продолжающей μ.*

Доказательство. Покажем сначала, что μ^* продолжает μ. Пусть $A \in \mathcal{M}$. В силу пункта (1) теоремы 2.18, для любого $B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, имеем $\mu(A) \le \mu(B)$, поэтому $\mu^*(A) = \mu(A)$, что и требовалось. В частности, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Далее, покажем, что функция μ^* монотонна (нам это понадобится для доказательства субаддитивности). Пусть $A \subset B$, тогда

$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(C) \mid B \subset C \in \mathcal{M}\} \ge \inf\big\{\mu(C) \mid A \subset C \in \mathcal{M}\big\} = \mu^*(A),$$

так как если $C \supset B$, то также $C \supset A$, поэтому первый inf берется по меньшему или такому же множеству, что и второй.

Наконец, проверим, что функция μ^* субаддитивна. Пусть $\{A_i\}$ — произвольное не более чем счетное покрытие произвольного множества $A \subset X$. Для каждого i рассмотрим произвольное $B_i \supset A_i$, $B_i \in \mathcal{M}$, тогда $B = \cup_i B_i \in \mathcal{M}$ и $A \subset B$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) = \mu(B) \le \sum_i \mu(B_i).$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда для каждого i существует такое $B_i^\varepsilon \in \mathcal{M}$, $A_i \subset B_i^\varepsilon$, что $\mu(B_i^\varepsilon) \le \mu^*(A_i)+\varepsilon/2^i$. Следовательно,

$$\mu^*(A) \le \sum_i \mu(B_i^\varepsilon) \le \varepsilon + \sum_i \mu^*(A_i).$$

В силу произвольности ε, заключаем требуемое. □

(2) Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное семейство подмножеств из X, содержащее $\emptyset$, и $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ — произвольное отображение, причем $\mu(\emptyset) = 0$. Имея в виду соглашение $\inf\{\emptyset\} = +\infty$, определим функцию $\mu^*\colon 2^X \to [0,+\infty]$, положив

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_i \mu(A_i) \mid A \subset \cup_i A_i,\ A_i \in \mathcal{M}\Big\}$$

(таким образом, если A не содержится в объединении не более чем счетного семейства множеств из $\mathcal{M}$, то мы полагаем $\mu^*(A) = +\infty$).

Упражнение 3.4. Проверьте, что μ^* является внешней мерой.

Упражнение 3.5. Проверьте, что если в этом случае в качестве $\mathcal{M}$ взять произвольную σ-алгебру, а в качестве μ — меру на ней, то μ^*, определенное в случае (2), будет продолжением меры μ, описанным в случае (1).

Замечание 3.6. Существует, вообще говоря, много продолжений меры μ до внешней меры. Например, если X состоит из $n > 1$ элементов, σ-алгебра $\mathcal{M}$ равна $\{\emptyset, X\}$, а мера μ на $\mathcal{M}$ однозначно определяется условием $\mu(X) = n$, то для каждого непустого множества $A \subset X$ имеем $\mu^*(A) = n$, однако легко построить и другие продолжения меры μ, скажем, можно рассмотреть считающую меру.

Пусть μ — внешняя мера на X.

Определение 3.7. Подмножество $A \subset X$ назовем *измеримым относительно* μ или μ*-измеримым* (по Каратеодори), если для любого $Y \subset X$ выполняется $\mu(Y) = \mu(Y \cap A) + \mu(Y \setminus A)$.

Если из контекста понятно, какая внешняя мера μ имеется в виду, то μ-измеримое множество будем называть просто *измеримым.* Можно сказать, что измеримыми являются такие множества, которые разбивают все остальные множества μ-аддитивно.

Упражнение 3.8. Пусть μ — внешняя мера. Проверьте, что

(1) множество A измеримо, если и только если для любого $Y \subset X$ такого, что $\mu(Y) < \infty$, выполняется

$$\mu(Y) \ge \mu(Y \cap A) + \mu(Y \setminus A).$$

(2) если μ — считающая мера или любая другая мера, определенная на всех подмножествах, то все множества измеримы*;*

(3) множества $\emptyset$ и X измеримы всегда*;*

(4) если $\mu(A) = 1$ для каждого непустого $A \subset X$, то единственными измеримыми множествами являются $\emptyset$ и X*;*

(5) если $\mu(A) = 0$, то A измеримо.

Пусть μ — внешняя мера на X, а Y — произвольное подмножество X. Определим функцию $\mu_Y\colon 2^X \to [0,+\infty]$, положив $\mu_Y(A) = \mu(A \cap Y)$ для любого $A \subset X$.

Предложение 3.9. *Функция* μ_Y *является внешней мерой на* X *и, значит, на* Y*.*

Доказательство. Проверим первую аксиому внешней меры. Имеем

$$\mu_Y(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap Y) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Проверим вторую аксиому внешней меры. Пусть $\{A_i\}$ — не более чем счетное покрытие множества $A \subset X$, тогда $\{A_i \cap Y\}$ — не более чем счетное покрытие $A \cap Y$, поэтому

$$\mu_Y(A) = \mu(A \cap Y) \le \sum_i \mu(A_i \cap Y) = \sum_i \mu_Y(A_i).$$

□

Определение 3.10. Определенную выше внешнюю меру μ_Y на Y называют *индуцированной из* μ.

Замечание 3.11. Индуцированную внешнюю меру μ_Y часто обозначают через $\mu\llcorner Y$. Мы же будем пользоваться нашим обозначением потому, что оно — компактней.

Предложение 3.12. *Пусть μ — внешняя мера на X, и A — некоторое μ-измеримое подмножество X. Тогда для произвольного $Y \subset X$ множество A и, значит, $A \cap Y$ будут также μ_Y-измеримыми. В частности, положив $A = X$, заключаем, что Y всегда является μ_Y-измеримым.*

Доказательство. Для произвольного множества $B \subset X$ имеем

$$\mu_Y(B) = \mu(B\cap Y) = \mu\big((B\cap Y)\cap A\big)+\mu\big((B\cap Y)\setminus A\big) = \mu\big((B\cap A)\cap Y\big)+\mu\big((B\setminus A)\cap Y\big) = \mu_Y(B\cap A)+\mu_Y(B\setminus A),$$

что и требовалось. □

Замечание 3.13. Не каждое μ_Y-измеримое множество является μ-измеримым. Действительно, так как Y всегда μ_Y-измеримо, даже если Y не μ-измеримо, достаточно привести пример неизмеримого Y. Рассмотрим в качестве X произвольное непустое неодноточечное множество и определим внешнюю меру μ, положив ее равной 1 на всех непустых подмножествах X. Тогда μ-измеримыми являются только $\emptyset$ и X.

Следующая теорема перечисляет ряд важных свойств множеств, измеримых относительно внешней меры.

Теорема 3.14. *Пусть μ — внешняя мера на X. Тогда*

(1) *если $A \subset X$ измеримо, то $X \setminus A$ — также измеримо*;

(2) *если $\mathcal{F}$ — конечное семейство измеримых подмножеств X, то $\cup\mathcal{F}$ и $\cap\mathcal{F}$ также измеримы, в частности, если измеримое множество объединить с множеством меры нуль, то вновь получится измеримое множество*;

(3) *если A и B — измеримые подмножества X, то $A \setminus B$ и $B \setminus A$ также измеримы, в частности, если из измеримого множества вычесть множество нулевой меры, то вновь получится измеримое множество*;

(4) *если $A_1, A_2, \dots$ — попарно непересекающиеся измеримые множества, то $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$*;

(5) *если $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ — возрастающая последовательность измеримых множеств, то $\mu(\cup B_i) = \lim \mu(B_i)$*;

(6) *если $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ — убывающая последовательность измеримых множеств, причем $\mu(B_1) < \infty$, то $\mu(\cap B_i) = \lim \mu(B_i)$*;

(7) *если $\mathcal{F}$ — не более чем счетное семейство измеримых подмножеств X, то $\cup\mathcal{F}$ и $\cap\mathcal{F}$ также измеримы*;

(8) *если A — измеримое множество, а B — произвольное, то $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$.*

Доказательство. (1) Вытекает из того, что условие Каратеодори симметрично относительно перехода к дополнению.

(2) Пусть для начала $\mathcal{F} = \{A_1, A_2\}$, и $B \subset X$ — произвольное. Тогда для каждого i имеем $\mu(B) = \mu(B\cap A_i) + \mu(B \setminus A_i)$, поэтому

$$\mu(B) = \mu(B\cap A_1)+\mu(B\setminus A_1) = \mu(B\cap A_1)+\mu((B\setminus A_1)\cap A_2)+\mu((B\setminus A_1)\setminus A_2) \ge \mu\big(B\cap(A_1\cup A_2)\big)+\mu\big(B\setminus(A_1\cup A_2)\big),$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что

$$(B\cap A_1)\cup\big((B\setminus A_1)\cap A_2\big) = \big(B\cap(A_1\cup A_2)\big)$$

и в силу субаддитивности. С другой стороны, так как

$$B = \big(B\cap(A_1\cup A_2)\big)\cup\big(B\setminus(A_1\cup A_2)\big),$$

из субаддитивности вытекает и обратное неравенство, что влечет выполнение условия Каратеодори для $A_1 \cup A_2$. Продолжая эти рассуждения, получим доказательство для любого конечного семейства $\mathcal{F}$. Наконец, чтобы доказать измеримость $\cap\mathcal{F}$, применим (1).

Вторая часть этого пункта вытекает из пункта (5) упражнения 3.8, утверждающего, что каждое множество меры нуль измеримо.

(3) Первая часть вытекает из пункта (1) и (2), так как $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ и, аналогично, для $B \setminus A$. Вторая часть — из пункта (5) упражнения 3.8, утверждающего, что каждое множество меры нуль измеримо.

(4) Положим $B_j = \cup_{i \le j} A_i$. Для доказательства этого пункта достаточно проверить, что $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i)$. Действительно, если это равенство выполняется, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(B_j) \le \mu(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j),$$

где неравенство имеет место в силу монотонности внешней меры. Для получения обратного неравенства и, в итоге, равенства, достаточно применить свойство субаддитивности внешней меры.

Чтобы доказать равенство $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i)$, применим индукцию по j. Начало индукции тривиально, так как $B_1 = A_1$. Шаг индукции получается из следующего рассуждения. Сначала заметим, что $B_{j+1} \cap A_{j+1} = A_{j+1}$ и $B_{j+1} \setminus A_{j+1} = B_j$. По пункту (2), B_j измеримо, поэтому $\mu(A_{j+1}) + \mu(B_j) = \mu(A_{j+1} \cup B_j) = \mu(B_{j+1})$. Осталось воспользоваться индуктивным предположением.

(5) Этот пункт получается из предыдущего, если положить $A_1 = B_1$ и, кроме того, $A_i = B_i \setminus B_{i-1}$ при каждом $i > 1$.

(6) Доказательство такое же, как и в пункте (5) из теоремы 2.18.

(7) Пусть $\mathcal{F} = \{A_i\}$ — счетное семейство измеримых множеств. Положим $B_i = \cup_{j \le i} A_j$, тогда $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, $\cup\{B_i\} = \cup\mathcal{F}$ и, в силу пункта (2), все B_i являются измеримыми.

Пусть Y — произвольное подмножество X. Покажем, что $\cup\mathcal{F}$ разбивает Y на аддитивные части. По упражнению 3.8, это достаточно проверять для множеств Y конечной меры. Итак, пусть $\mu(Y) < \infty$. Тогда, по предложению 3.12, множества B_i также являются μ_Y-измеримыми. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu\big(Y \cap (\cup\mathcal{F})\big) + \mu(Y \setminus \cup\mathcal{F}) &= \mu\big(Y \cap (\cup\mathcal{F})\big) + \mu\big(Y \cap (X \setminus \cup\mathcal{F})\big) = \mu_Y(\cup\mathcal{F}) + \mu_Y\big(X \setminus (\cup\mathcal{F})\big) = \\ &= \mu_Y(\cup B_i) + \mu_Y\big(\cap(X \setminus B_i)\big) = \lim \mu_Y(B_i) + \lim \mu_Y(X \setminus B_i) = \lim \mu_Y(X) = \lim \mu(Y \cap X) = \mu(Y), \end{aligned}$$

где четвертое равенство выполняется в силу пунктов (5) и (6), причем, применяя пункт (6), мы пользуемся тем, что $\mu(Y) < \infty$; пятое равенство является следствием μ_Y-измеримости каждого B_i (см. выше).

Для завершения доказательства этого пункта можно воспользоваться пунктом (1).

(8) Действительно, в силу измеримости A, имеем

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A),$$
$$\mu(A \cup B) = \mu\big((A \cup B) \cap A\big) + \mu\big((A \cup B) \setminus A\big) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

откуда и вытекает требуемое. □

Следствие 3.15. *Для произвольной внешней меры μ семейство всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй, а внешняя мера, ограниченная на эту σ-алгебру — σ-аддитивной, т.е. представляет собой обычную меру.*

Обозначение 3.16. Для внешней меры μ семейство всех μ-измеримых множеств будем обозначать через $\sigma(\mu)$.

Из предложения 3.12 и следствия 3.15 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 3.17. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X. Рассмотрим произвольное $Y \subset X$, и пусть $\sigma(\mu)_Y$, как и выше, обозначает σ-алгебру на Y, индуцированную из $\sigma(\mu)$. Тогда $\sigma(\mu) \subset \sigma(\mu_Y)$ и $\sigma(\mu)_Y \subset \sigma(\mu_Y)$.*

Замечание 3.18. Теоремы 3.3 и 3.14 устанавливают связь между понятием меры на σ-алгебре и понятием внешней меры: каждая мера μ на σ-алгебре $\mathcal{M}$ канонически продолжается до внешней меры μ^*, определенной на всех подмножествах, и каждая внешняя мера, определенная на всех подмножествах, порождает σ-алгебру $\sigma(\mu^*)$ множеств, являющихся μ^*-измеримыми в смысле Каратеодори. Как связаны $\mathcal{M}$ и $\sigma(\mu^*)$?

Упражнение 3.19. Покажите, что $\mathcal{M} \subset \sigma(\mu^*)$.

Отметим, что $\mathcal{M}$ и $\sigma(\mu^*)$ могут не совпадать. Например, если μ — нулевая мера, определенная на σ-алгебре $\{\emptyset, X\}$, где X состоит более чем из одного элемента, то μ^* — также нулевая мера, поэтому все подмножества X являются μ^*-измеримыми в силу пункта (5) упражнения 3.8.

Упражнение 3.20. Пусть $\mathcal{L}^*$ — внешняя мера, полученная продолжением меры Лебега $\mathcal{L}^n$ с помощью конструкции, описанной перед теоремой 3.3. Существуют ли не борелевские множества, измеримые относительно $\mathcal{L}^*$?

Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, и μ — внешняя мера на X. Определим функцию $f_*\mu\colon 2^Y \to [0, +\infty]$, положив $f_*\mu(A) = \mu\big(f^{-1}(A)\big)$ для каждого $A \subset Y$.

Упражнение 3.21. Проверьте, что $f_*\mu$ — внешняя мера на Y.

Упражнение 3.22. Докажите, что множество $f^{-1}(A)$ является μ-измеримым, если и только если множество A является $f_*\mu_B$-измеримым для каждого $B \subset X$.

Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, и μ — внешняя мера на Y. Определим функцию $f^*\mu\colon 2^X \to [0, +\infty]$, положив $f^*\mu(A) = \mu\big(f(A)\big)$ для каждого $A \subset X$.

Упражнение 3.23. Проверьте, что $f^*\mu$ — внешняя мера на X.

3.1 Примеры внешних мер

В данном разделе мы приведем ряд популярных типов внешних мер и обсудим их свойства.

Определение 3.24.

(1) Внешняя мера μ на произвольном множестве X называется *регулярной*, если для каждого $A \subset X$ существует μ-измеримое множество $B \supset A$ такое, что $\mu(A) = \mu(B)$ (иными словами, каждое подмножество X может быть расширено до μ-измеримого множества той же меры).

(2) Внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевской*, если все борелевские множества являются μ-измеримыми.

(3) Борелевская внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевски регулярной*, если для каждого $A \subset X$ существует борелевское множество $B \supset A$ такое, что $\mu(A) = \mu(B)$ (иными словами, каждое подмножество X может быть расширено до борелевского множества той же меры).

Приведем некоторые свойства только что определенных внешних мер.

3.1.1 Регулярная внешняя мера

Предложение 3.25. *Пусть μ — регулярная внешняя мера на X, и $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — возрастающая последовательность* ***произвольных*** *множеств. Тогда $\mu(\cup A_i) = \lim \mu(A_i)$.*

Доказательство. В силу регулярности внешней меры μ, для каждого i мы можем выбрать такое измеримое множество $B_i \supset A_i$, что $\mu(B_i) = \mu(A_i)$. Положим $C_k = \cap_{i \ge k} B_i$, тогда все C_k являются измеримыми и $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$. Так как $A_k \subset A_i \subset B_i$ для каждого $i \ge k$, имеем $A_k \subset C_k$. Кроме того, $C_k \subset B_k$, поэтому, в силу монотонности, выполняется $\mu(A_k) = \mu(C_k)$.

Положим $C = \cup C_i$. Тогда, в силу пункта (7) теоремы 3.14, множество C — измеримо, а в силу пункта (5) этой же теоремы, имеем $\mu(C) = \lim \mu(C_i)$. Положим $A = \cup A_i$. Тогда, $A \subset C$ и, из монотонности внешней меры, $\mu(A) \le \mu(C)$. С другой стороны, опять же из монотонности внешней меры заключаем, что $\mu(A_i) \le \mu(A)$, поэтому $\mu(C) = \lim \mu(C_i) = \lim \mu(A_i) \le \mu(A)$, откуда $\mu(A) = \mu(C)$, поэтому $\mu(A) = \lim \mu(A_i)$, что и требовалось. □

Замечание 3.26. Покажем, что условие регулярности в предложении 3.25 существенно. Пусть X — бесконечное множество, и μ — внешняя мера, равная 1 на всех непустых конечных подмножествах X, и 2 на всех бесконечных. Тогда если построить цепочку $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ такую, что A_i состоит из i элементов, то $\mu(A_i) = 1$, а $\mu(\cup A_i) = 2$.

Упражнение 3.27. Пусть μ — регулярная внешняя мера на X. Докажите, что

(1) если $A \cup B$ является μ-измеримым и $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) < \infty$, то A и B также μ-измеримы*;*

(2) если $\mu(X) < \infty$, $f \colon X \to Y$ и $C \subset Y$ представляет собой $f_*\mu$-измеримое множество, то $f^{-1}(C)$ является μ-измеримым*;*

(3) если $Y \subset X$ и $\mu(Y) < \infty$, то класс всех μ_Y-измеримых множеств равен

$$\big\{(B \cap Y) \cup C \mid B \text{ является } \mu\text{-измеримым}, \ C \subset X \setminus Y\big\}.$$

В частности, для регулярной внешней меры μ и произвольного множества $Y \subset X$ конечной меры, σ-алгебры $\sigma(\mu_Y)_Y$ и $\sigma(\mu)_Y$, индуцированные соответственно из $\sigma(\mu_Y)$ и $\sigma(\mu)$, совпадают (сравните со следствием 3.17).

С регулярными мерами тесно связано понятие оболочки.

Определение 3.28. Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и $A \subset X$. Измеримое множество $B \supset A$ назовем *μ-оболочкой*, если для каждого μ-измеримого множества T выполняется $\mu(T \cap A) = \mu(T \cap B)$. В частности, $\mu(A) = \mu(B)$.

Упражнение 3.29. Предположим, что $B \supset A$ является μ-измеримым и $\mu(A) = \mu(B) < \infty$. Докажите, что тогда B является μ-оболочкой множества A.

Упражнение 3.30. Пусть μ — регулярная внешняя мера на X. Докажите, что если A — произвольное множество конечной меры, то A имеет μ-оболочку.

Упражнение 3.31. Покажите, что утверждения из упражнений 3.27 и 3.30 могут не иметь места для нерегулярных мер.

Приведем один способ преобразования произвольной внешней меры в регулярную. Пусть μ — произвольная внешняя мера. Положим

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(B) \mid B \supset A, \ B \text{ является } \mu\text{-измеримым}\big\}.$$

То, что μ^* является внешней мерой, совпадающей с μ на всех μ-измеримых подмножествах, было показано в теоремах 3.3 и 3.14.

Упражнение 3.32. Докажите следующие утверждения:

(1) для любого множества $A \subset X$ имеем $\mu(A) \le \mu^*(A)$;

(2) внешняя мера μ^* регулярна;

(3) внешняя мера μ регулярна тогда и только тогда, когда $\mu = \mu^*$;

(4) каждое μ-измеримое множество A является также μ^*-измеримым, т.е. $\sigma(\mu) \subset \sigma(\mu^*)$;

(5) каждое μ^*-измеримое множество A, для которого $\mu^*(A) < \infty$, является μ-измеримым.

3.1.2 Борелевская внешняя мера

Выясним, при каком условии на внешнюю меру все борелевские множества измеримы.

Упражнение 3.33. Докажите, что внешняя мера μ на топологическом пространстве является борелевской, если и только если все открытые (все замкнутые) множества являются μ-измеримыми.

Обозначение 3.34. Пусть A и B — произвольные непустые подмножества метрического пространства X. Тогда положим

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\big\{|ab| : a \in A, \ b \in B\big\}.$$

Если $A = \{x\}$, то для краткости будем писать $\operatorname{dist}(x, B)$ вместо $\operatorname{dist}\big(\{x\}, B\big)$.

Теорема 3.35 (критерий Каратеодори)**.** *Пусть X — метрическое пространство и μ — внешняя мера на X. Тогда μ — борелевская, если и только если $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых множеств A и B таких, что* $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

Доказательство. Пусть все борелевские множества измеримы, а расстояние между множествами A и B равно положительному ε. Положим $U = U_{\varepsilon/2}(A)$, тогда $U \cap B = \emptyset$, поэтому $(A \cup B) \cap U = A$ и $(A \cup B) \setminus U = B$. Так как множество U открыто и, значит, μ-измеримо, имеем

$$\mu(A \cup B) = \mu\big((A \cup B) \cap U\big) + \mu\big((A \cup B) \setminus U\big) = \mu(A) + \mu(B).$$

Обратно, пусть для любых A и B, находящихся на положительном расстоянии, выполняется $\mu(A \cup B) \geq \mu(A)+\mu(B)$. Покажем, что все борелевские множества измеримы. В силу упражнения 3.33, достаточно проверить измеримость всех открытых множеств.

Пусть $U \subset X$ — открытое, а $B \subset X$ — произвольное множества. В силу пункта (1) упражнения 3.8, достаточно показать, что $\mu(B \cap U) + \mu(B \setminus U) \leq \mu(B)$ для любого B конечной меры μ. Для каждого натурального n положим

$$U_n = \big\{x \in U : \operatorname{dist}(x, X \setminus U) > 1/n\big\},$$

тогда $\operatorname{dist}(B \cap U_n, B \setminus U) \geq \operatorname{dist}(U_n, X \setminus U) \geq 1/n$, поэтому, в силу условия,

$$\mu(B \cap U_n) + \mu(B \setminus U) = \mu\big((B \cap U_n) \cup (B \setminus U)\big) \leq \mu(B).$$

Покажем, что $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$ при $n \to \infty$, чем и завершим доказательство.

Положим $A_n = B \cap (U_{n+1} \setminus U_n)$. Пусть I — множество всех индексов n таких, что $A_{2n} \neq \emptyset$, а J — множество всех n таких, что $A_{2n-1} \neq \emptyset$. Заметим, что для любых различных p, $q \in I$ (а также p, $q \in J$) имеем $\operatorname{dist}(A_{2p}, A_{2q}) > 0$ (соответственно $\operatorname{dist}(A_{2p-1}, A_{2q-1}) > 0$), поэтому, учитывая, что $\mu(\emptyset) = 0$, для любого натурального n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_{2k}) = \mu\big(\cup_{k \leq n} A_{2k}\big) \leq \mu(B), \quad \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{2k-1}) = \mu\big(\cup_{k \leq n} A_{2k-1}\big) \leq \mu(B),$$

и, значит, ряд $\sum \mu(A_k)$ сходится (напомним, что $\mu(B) < \infty$).

Заметим, что $B \cap U = (B \cap U_n) \cup \big(\cup_{k \geq n} A_k\big)$. Из монотонности и субаддитивности вытекает, что

$$\mu(B \cap U_n) \leq \mu(B \cap U) \leq \mu(B \cap U_n) + \sum_{k \geq n} \mu(A_k),$$

откуда, в силу сходимости ряда $\sum \mu(A_k)$, имеем $\mu(B \cap U_n) \to \mu(B \cap U)$. Доказательство закончено. □

Покажем, что для борелевской внешней меры каждое борелевское множество конечной меры можно сколь угодно точно приблизить как содержащим его открытым, так и содержащимся в нем замкнутым множеством.

Упражнение 3.36.

(1) Пусть μ — борелевская внешняя мера на метрическом пространстве X, а A — произвольное борелевское множество конечной меры. Тогда

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(F) \mid F \subset A,\ F \text{ — замкнутое подмножество } X\big\}.$$

(2) Если при этом A содержится в не более чем счетном объединении открытых множеств конечной меры, то

$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) \mid U \supset A,\ U \text{ — открытое подмножество } X\big\}.$$

Упражнение 3.37. Можно ли в пункте (2) упражнения 3.36 ослабить условие того, что B содержится в не более чем счетном объединении открытых множеств конечной меры?

3.1.3 Приложение теоремы Безиковича

Прежде, чем доказывать основной результат этого раздела, мы покажем справедливость утверждения, обобщающего пункт (4) теоремы 3.14.

Предложение 3.38. *Пусть μ — произвольная внешняя мера на множестве X, и E — произвольное множество. Рассмотрим произвольное не более чем счетное дизъюнктное семейство $\{A_i\}$ подмножеств X, являющихся μ-измеримыми. Тогда*

$$\mu\big(\cup(E \cap A_i)\big) = \sum \mu(E \cap A_i).$$

Доказательство. Действительно, по предложению 3.12, все множества $E \cap A_i$ являются μ_E-измеримыми. Эти множества также образуют дизъюнктное семейство. Осталось применить пункт (4) теоремы 3.14. □

Теорема 3.39. *Пусть μ — борелевская внешняя мера на $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{F}$ — семейство невырожденных замкнутых шаров такое, что*

(1) *множество A центров шаров из $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mu(A) < \infty$ (при этом A не обязано быть μ-измеримым);*

(2) *для каждого $a \in A$ выполняется* $\inf\{r : B_r(a) \in \mathcal{F}\} = 0$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное открытое множество, $A_U = A \cap U$ и $\mathcal{F}_U = \{B \in \mathcal{F} : B \subset U\}$. Тогда существует дизъюнктное (а, значит, счетное) подсемейство $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}_U$ такое, что

$$\mu\big(A_U \setminus \cup\mathcal{F}'\big) = 0.$$

Доказательство. Пусть N_n обозначает число из теоремы 1.8. Выберем произвольное $1 - 1/N_n < \theta < 1$.

Лемма 3.40. *В $\mathcal{F}_U$ существует конечное дизъюнктное подсемейство $\{B_i\}_{i=1}^{m_1}$ такое, что*

$$\mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{m_1} B_i\Big) < \theta\, \mu(A_U).$$

Доказательство. Заметим сначала, что A_U — совпадает с семейством центров всех шаров из $\mathcal{F}_U$. Действительно, так как каждый шар $B_r(a) \in \mathcal{F}_U$ лежит в U, то и его центр $a \in A$ лежит в U, и, значит, в $A_U = A \cap U$. Обратно, так как U — открыто, для каждой точки $a \in A_U$ существует $U_\rho(a) \subset U$, поэтому, в силу условия $\inf\{r : B_r(a) \in \mathcal{F}\} = 0$, существует $B_r(a) \in \mathcal{F}$ такой, что $B_r(a) \subset U_\rho(a) \subset U$, откуда $B_r(a) \in \mathcal{F}_U$.

Пусть $\mathcal{B}$ — подсемейство в $\mathcal{F}_U$, состоящее из всех шаров с радиусами меньшими 1. По теореме 1.8, существует N_n дизъюнктных подсемейств $\mathcal{B}'_k \subset \mathcal{B}$, покрывающих в совокупности A_U. Отсюда вытекает, что

$$\mu(A_U) \le \sum_{k=1}^{N_n} \mu(A_U \cap \cup\mathcal{B}'_k),$$

и, значит, для некоторого $1 \le k \le N_n$ выполняется

$$\mu(A_U \cap \cup\mathcal{B}'_k) \ge \frac{1}{N_n}\mu(A_U).$$

Предположим, что семейство $\mathcal{B}'_k$ конечно, тогда его элементы можно взять в качестве B_i. Действительно, так как μ — борелевская, $\cup\mathcal{B}'_k$ является μ-измеримым, поэтому

$$\mu(A_U) = \mu(A_U \cap \cup\mathcal{B}'_k) + \mu(A_U \setminus \cup\mathcal{B}'_k),$$

откуда

$$\mu(A_U \setminus \cup\mathcal{B}'_k) \le \mu(A_U) - \frac{1}{N_n}\mu(A_U) < \theta\, \mu(A_U),$$

что и доказывает лемму в этом случае.

Пусть теперь семейство $\mathcal{B}'_k$ счетно, тогда $\mathcal{B}'_k = \{B_1, B_2, \ldots\}$. По предложению 3.38, имеем

$$\mu(A_U \cap \cup_{i=1}^{m} B_i) \to \mu(A_U \cap \cup\mathcal{B}'_k) \ \text{ при } \ m \to \infty.$$

Так как, по определению, $0 < 1 - \theta < 1/N_n$, то из сказанного выше вытекает, что для достаточно большого m_1 имеет место

$$\mu\big(A_U \cap (\cup_{i=1}^{m_1} B_i)\big) > (1-\theta)\mu(A_U).$$

Как и выше, воспользуемся μ-измеримостью семейства $\{B_i\}_{i=1}^{m_1}$ и получим требуемое. □

Выбрав предварительно семейство $\{B_i\}_{i=1}^{m_1}$ из леммы 3.40, положим $U_2 = U \setminus \cup_{i=1}^{m_1} B_i$. Ясно, что U_2 — открытое множество. Если $U_2 = \emptyset$, то построенное семейство $\{B_i\}_{i=1}^{m_1}$ является искомым семейством $\mathcal{F}'$. Если же $U_2 \neq \emptyset$, положим $A_U^2 = A \cap U_2$ и $\mathcal{F}_U^2 = \{B \in \mathcal{F}_U : B \subset U_2\}$. Тогда, по лемме 3.40, найдется дизъюнктное подсемейство $\{B_{m_1+1}, \dots, B_{m_2}\} \subset \mathcal{F}_U^2$ такое, что

$$\mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{m_2} B_i\Big) = \mu\Big(A_U^2 \setminus \cup_{i=m_1+1}^{m_2} B_i\Big) < \theta\,\mu(A_U^2) = \theta\,\mu(A_U \setminus \cup_{i=1}^{m_1} B_i) < \theta^2 \mu(A_U).$$

Продолжим этот процесс. Если он остановится на каком-нибудь шаге p, т.е. если мы получим $U_p = \emptyset$, то $\{B_i\}_{i=1}^{m_{p-1}}$ — искомое семейство $\mathcal{F}'$. Если же этот процесс не останавливается ни на одном конечном шаге, то получим счетную коллекцию $\{B_i\}$, для которой при каждом p выполняется

$$\mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \le \mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{m_p} B_i\Big) < \theta^p \mu(A_U),$$

поэтому, так как $\theta \in (0,1)$, имеем $\mu\Big(A_U \setminus \cup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = 0$. Тем самым, в качестве $\mathcal{F}'$ в этом случае можно взять полученное $\{B_i\}$. Теорема полностью доказана. $\square$

3.1.4 Борелевски регулярная внешняя мера

Выше мы определили два типа мер, названия которых очень схожи, а именно, регулярные борелевские внешние меры и борелевски регулярные внешние меры. Регулярность борелевской внешней меры означает возможность расширить каждое множество до какого-то измеримого подмножества той же меры. Борелевская регулярность внешней меры дает более жесткое условие: каждое множество расширяется до борелевского множества той же меры. Поэтому каждая борелевски регулярная внешняя мера является регулярной борелевской внешней мерой.

Упражнение 3.41. Верно ли, что каждая регулярная борелевская меря является борелевски регулярной?

Упражнение 3.42. Пусть μ — борелевски регулярная мера на топологическом пространстве X. Докажите, что для любого μ-измеримого $A \subset X$ с $\mu(A) < \infty$ существуют такие борелевские B и D, что $D \subset A \subset B$ и $\mu(B \setminus D) = 0$.

Таким образом, если μ — борелевски регулярная внешняя мера, то утверждения упражнения 3.36, имевшие место только для борелевских множеств конечной меры, теперь справедливы для произвольных μ-измеримых множеств конечной меры. А именно, получаем следующий результат.

Следствие 3.43. *Пусть μ — борелевски регулярная внешняя мера на топологическом пространстве X. Тогда для* ***любого μ-измеримого множества*** *A конечной меры имеем*

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(F) \mid F \subset A,\ F \text{ — замкнутое подмножество } X\big\}.$$

Если при этом A содержится в не более чем счетном объединении открытых множеств конечной меры, то

$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) \mid U \supset A,\ U \text{ — открытое подмножество } X\big\}.$$

Упражнение 3.44. Покажите, что если μ — борелевски регулярная мера на топологическом пространстве X и A — борелевское множество, то μ_A — также борелевски регулярная мера.

Упражнение 3.45. Пусть μ — борелевская мера на метрическом пространстве X. Для каждого $A \subset X$ положим

$$\nu(A) = \inf\big\{\mu(B) \mid B \supset A,\ B \text{ — борелевское множество}\big\}.$$

Докажите, что ν — борелевски регулярная мера, совпадающая с μ на борелевских множествах.