Тема 2

Меры на сигма-алгебрах.

Идея меры является далеко идущим обобщением первоначального представления о площади и объеме подмножеств $\mathbb{R}^n$. Естественные требования, предъявляемые к объему, таковы: объем ограниченного множества — конечное неотрицательное число; объем аддитивен, т.е. объем объединения непересекающихся ограниченных множеств равен сумме объемов этих множеств; если множества получаются друг из друга движением, то их объемы равны; объем единичного куба равен 1.

Оказывается, эти требования противоречивы.

Теорема 2.1 (парадокс Банаха–Тарского). *Можно разбить стандартный шар $B \subset \mathbb{R}^3$ на пять частей A_i так, что для некоторых B_i, получающихся из A_i движением, выполняется следующее*: $B = B_1 \sqcup B_2 = B_3 \sqcup B_4 \sqcup B_5$. *Иными словами, шар B можно удвоить.*

Из этой теоремы вытекает, что если бы мы смогли определить объем в соответствии с описанными выше требованиями, то объем шара равнялся бы удвоенному объему этого шара, откуда объем шара должен был бы равняться нулю. Однако последнее противоречит тому, что объем единичного куба ненулевой.

Одним из выходов является рассмотрение не всех ограниченных множеств, а только такой части из них, для которой определение объема не приводит к противоречиям. Естественное во многих приложениях требование распространения аддитивности на счетные объединения, вместе с остальными свойствами объема, приводит к понятию σ-алгебры.

Наше изложение общей теории меры является переработанной компиляцией текстов [6]–[11].

2.1 Определение сигма-алгебры

Пусть X — произвольное множество.

Определение 2.2. Семейство $\mathcal{M}$ подмножеств X называется *σ-алгеброй*, если оно, как и топология, содержит $\emptyset$ и X, замкнуто относительно не более чем счетных объединений (ослабление по сравнению с топологией), а также разности (новое).

Последние два свойства приводят к тому, что σ-алгебра оказывается замкнутой и относительно счетных пересечений (усиление топологического свойства).

Замечание 2.3. Отметим, что некоторые авторы, см. например [12], называют σ-алгебру *борелевским семейством.*

Упражнение 2.4. Можно ли в определении σ-алгебры заменить замкнутость относительно разности на замкнутость относительно не более чем счетных пересечений?

Упражнение 2.5. Проверьте, что пересечение любого числа σ-алгебр на X вновь является σ-алгеброй.

Упражнение 2.5 позволяет говорить про наименьшую σ-алгебру, содержащую данное семейство подмножеств S множества X.

Определение 2.6. Наименьшая σ-алгебра, содержащая семейство подмножеств S множества X, называется *σ-алгеброй, порожденной семейством S*, и обозначается через $\sigma(S)$.

Упражнение 2.7. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная σ-алгебра на X, и $Y \subset X$. Рассмотрим семейство $\mathcal{M}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{M}\}$. Докажите, что $\mathcal{M}_Y$ является σ-алгеброй.

Определение 2.8. Определенная в упражнении 2.7 σ-алгебра $\mathcal{M}_Y$ называется *индуцированной на Y* из σ-алгебры $\mathcal{M}$.

Упражнение 2.9.

(1) Пусть S и M — два семейства подмножеств в X, причем $S \subset M$. Предположим, что для каждого $A \in S$ его дополнение $X \setminus A$ лежит в M, а также что M замкнуто относительно счетных объединений и счетных пересечений. Докажите, что M содержит подсемейство $H \supset S$, замкнутое относительно взятия дополнений, счетных пересечений и счетных объединений. В частности, если $\emptyset \in S$ или $X \in S$, то M содержит $\sigma(S)$.

(2) Условие и утверждение такие же, как и в предыдущем пункте, с заменой счетных объединений на счетные дизъюнктные объединения.

Определение 2.10. Пусть X — топологическое пространство с топологией τ, тогда σ-алгебра $\sigma(\tau)$, порожденная топологией τ, называется *борелевской*, соответствующей τ, а элементы σ-алгебры $\sigma(\tau)$ называются *борелевскими множествами.*

Упражнение 2.11.

(1) Пусть X — топологическое пространство с топологией τ. Предположим, что каждое открытое множество представимо в виде не более чем счетного объединения замкнутых множеств. Тогда наименьший класс $\mathcal{M}$ подмножеств X, содержащий семейство $\mathcal{F}$ замкнутых множеств и замкнутый относительно счетных объединений и счетных пересечений, является борелевской σ-алгеброй.

(2) Условие и утверждение такие же, как и в предыдущем пункте, с заменой счетных объединений на счетные дизъюнктные объединения.

Упражнение 2.12.

(1) Покажите, что в метрическом пространстве каждое открытое множество представимо в виде не более чем счетного объединения замкнутых множеств.

(2) Докажите, что наименьший класс подмножеств метрического пространства, содержащий семейство всех замкнутых множеств и замкнутый относительно счетных объединений и счетных пересечений, является борелевской σ-алгеброй.

(3) Докажите, что наименьший класс подмножеств метрического пространства, содержащий семейство всех замкнутых множеств и замкнутый относительно счетных дизъюнктных объединений и счетных пересечений, является борелевской σ-алгеброй.

Пример 2.13. Пусть X — произвольное множество. Приведем примеры σ-алгебр.

(1) Антидискретная $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$.

(2) Дискретная $\mathcal{M} = 2^X$.

(3) Индуцированная на $Y \subset X$: состоит из пересечений элементов σ-алгебры на X с Y.

(4) Пусть $A \subset X$, тогда $\mathcal{M} = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$. Более общо, пусть $\mathcal{P} = \{A_i\}$ — не более чем счетное разбиение множества X. Тогда в качестве σ-алгебры можно взять всевозможные объединения множеств A_i. Задача: верно ли, что если X — не более чем счетное множество, то любая σ-алгебра порождается некоторым разбиением множества X описанным выше образом?

(5) Борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$, порожденная стандартной топологией. Более общо, борелевская σ-алгебра на произвольном топологическом пространстве.

2.2 Определение меры на сигма-алгебре

Определение 2.14. Функция $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ называется *мерой на σ-алгебре* $\mathcal{M}$, если $\mu(\emptyset) = 0$ и μ является σ-аддитивной: мера не более чем счетного дизъюнктного объединения множеств из $\mathcal{M}$ равна сумме мер этих множеств.

Замечание 2.15. Условие $\mu(\emptyset) = 0$ добавляется для того, чтобы отсеять единственный случай $\mu(\emptyset) = +\infty$. Иными словами, если для некоторого множества счетно-аддитивная функция на σ-алгебре не равна $+\infty$, то $\mu(\emptyset) = 0$ (так как $\emptyset$ можно добавлять в любом количестве, не меняя множество).

Определение 2.16. Тройка $(X, \mathcal{M}, \mu)$, состоящая из множества X, σ-алгебры $\mathcal{M}$ на X и меры μ на $\mathcal{M}$, называется *пространством с мерой*; при этом элементы σ-алгебры $\mathcal{M}$ называются *измеримыми множествами*, а если требуется указать, какая мера порождает рассматриваемую σ-алгебру, то — *μ-измеримыми множествами.*

Пример 2.17. Приведем примеры мер.

(1) На $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ положим $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu(X) = a$, где $a \in [0, +\infty]$.

(2) На $\mathcal{M} = 2^X$ определим *считающую меру*, положив $\mu(A)$ равным числу элементов в A, если A — конечно, и $+\infty$ в противном случае.

(3) На $\mathcal{M} = \{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$ положим $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = a$, $\mu(X) = b$, $\mu(X \setminus A) = b - a$ для некоторых $a, b \in [0, +\infty]$, $a \le b$. Если $\mathcal{M}$ порождено разбиением $\mathcal{P} = \{A_i\}$ (см. выше), то каждая мера μ однозначно задается своими значениями на элементах разбиения $\mathcal{P}$, причем на этих элементах μ может принимать любые значения из $[0, +\infty]$ (на все остальные элементы μ продолжается по σ-аддитивности).

(4) На произвольном $\mathcal{M}$, для фиксированной точки $x \in X$, определим *δ-меру Дирака μ_x*, положив $\mu_x(Y) = 1$, если $x \in Y$, и $\mu_x(Y) = 0$ в противном случае.

(5) Положим меру не более чем счетного множества равной 0, а любого бесконечного несчетного множества равной $+\infty$.

(6) Если $\mu(X) = 1$, то пространство $(X, \mathcal{M}, \mu)$ называется *вероятностным*, а μ — вероятностью.

(7) Если μ_1 и μ_2 — произвольные меры на σ-алгебре $\mathcal{M}$, то их линейная комбинация $a_1\mu_1 + a_2\mu_2$ с неотрицательными коэффициентами a_1 и a_2 также является мерой на $\mathcal{M}$.

Теорема 2.18. *Пусть μ — мера на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) ***Монотонность***: *если $A \subset B$ — измеримые множества, то $\mu(A) \le \mu(B)$.*

(2) ***Субаддитивность***: *для любых измеримых множеств A и B имеем $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$.*

(3) ***Счетная субаддитивность***: *$\mu\big(\cup A_i\big) \le \sum \mu(A_i)$ для любого счетного набора $\{A_i\}$ измеримых множеств.*

(4) ***Непрерывность снизу***: *пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ неубывающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\cup A_i)$.*

(5) ***Непрерывность сверху***: *пусть $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ — последовательность измеримых множеств. Предположим, что $\mu(A_1) < \infty$. Тогда последовательность $\mu(A_i)$ невозрастающая и $\lim \mu(A_i) = \mu(\cap A_i)$.*

(6) *Условие $\mu(A_1) < \infty$ в предыдущем пункте — существенно.*

Доказательство. (1) Действительно, $B = A \sqcup (B \setminus A)$, откуда, в силу аддитивности и неотрицательности меры, имеем
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A).$$

(2) Так как σ-алгебра замкнута относительно пересечения и разности, множества $C = A \cap B$, $A \setminus C$ и $B \setminus C$ измеримы. Из аддитивности меры вытекает, что $\mu(A) = \mu(A \setminus C) + \mu(C)$, $\mu(B) = \mu(B \setminus C) + \mu(C)$, $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus C) + \mu(C) + \mu(B \setminus C) \le \mu(A \setminus C) + 2\mu(C) + \mu(B \setminus C) = \mu(A) + \mu(B)$.

(3) Положим $A = \cup_{i\geq 1} A_i$, $A'_1 = A_1$ и $A'_n = A_n \setminus \cup_{i<n} A_i$ при $n > 1$. Ясно, что $A = \sqcup_{i\geq 1} A'_i$ и все A'_i — измеримы. В силу σ-аддитивности и того, что $A'_i \subset A_i$, откуда $\mu(A'_i) \leq \mu(A_i)$, имеем

$$\mu(A) = \sum_{i\geq 1} \mu(A'_i) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(A_i).$$

(4) То, что последовательность $\mu(A_i)$ неубывающая, вытекает и пункта (1). Поэтому у $\mu(A_i)$ существует предел при $i \to \infty$.

Далее, положив $A = \cup_{i\geq 1} A_i$, получим $A = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus A_2) \cdots$ и $A_n = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \cdots \sqcup (A_n \setminus A_{n-1})$. Из σ-аддитивности меры вытекает, что

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{i\geq 1} \mu(A_{i+1} \setminus A_i),$$

а также, что

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{1\leq i\leq n-1} \mu(A_{i+1} \setminus A_i).$$

Но, по определению, сумма ряда — это предел частичных сумм, откуда $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$.

(5) То, что последовательность $\mu(A_i)$ невозрастающая, снова вытекает из пункта (1). Далее, положив $A = \cap_{i\geq 1} A_i$, получим $A_1 = A \sqcup (A_1 \setminus A_2) \sqcup (A_2 \setminus A_3) \cdots$, откуда

$$\mu(A_1) = \mu(A) + \sum_{i\geq 1} \mu(A_i \setminus A_{i+1}).$$

Так как $\mu(A_1) < \infty$, то $\mu(A_i \setminus A_{i+1}) < \infty$ и ряд $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i \setminus A_{i+1})$ сходится. Таким образом,

$$\mu(A) = \mu(A_1) - \sum_{i\geq 1} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) = \mu(A_1) - \sum_{1\leq i\leq n-1} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) - \sum_{i\geq n} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) = \mu(A_n) + \sum_{i\geq n} \mu(A_i \setminus A_{i+1}).$$

Так как ряд $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i \setminus A_{i+1})$ сходится, то $\sum_{i\geq n} \mu(A_i \setminus A_{i+1}) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$.

(6) На множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел рассмотрим считающую меру μ. Пусть $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$. Тогда $A_1 \supset A_2 \cdots$, $\mu(A_i) = +\infty$, поэтому $\lim \mu(A_i) = +\infty$, но $A = \cap_{i\geq 1} A_i = \emptyset$, откуда $\mu(A) = 0$. $\square$

Упражнение 2.19. Предположим, что $\mu(X) < \infty$. *Верхним пределом* последовательности A_i измеримых множеств назовем $A \subset X$, состоящее из всех точек, каждая из которых встречается в бесконечном числе A_i. Докажите, что множество A измеримо, и что $\mu(A) \geq \limsup \mu(A_i)$.

Замечание 2.20. Приведем несколько простых, но полезных наблюдений.

(1) Выбрасывание множества меры ноль из любого измеримого множества не меняет меру.

(2) Добавление множества меры ноль к любому измеримому множеству не меняет меру.

(3) Пусть A и B — измеримые множества, пересекающиеся по множеству меры ноль. Тогда мера $A \cup B$ равна сумме мер A и B.

2.3 Мера Лебега

В дальнейшем через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать борелевскую σ-алгебру, порожденную стандартной топологией пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.21 (Лебег)**.** *Существует единственная мера $\mathcal{L}^n$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, инвариантная относительно параллельных переносов (сдвигов) и такая, что*

$$\mathcal{L}^n\big([0,1]^n\big) = 1.$$

Определение 2.22. Мера из теоремы 2.21 называется *n-мерной мерой Лебега* или *n-мерным евклидовым объемом.*

Замечание 2.23. Из теоремы 2.21 мгновенно вытекает существование и единственность меры на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, инвариантной относительно сдвигов и такой, что $\mu\big([0,1]^n\big) = a$ для произвольного $a \geq 0$. Эта мера равна $a\,\mathcal{L}^n$.

Замечание 2.24. На самом деле, при определении меры Лебега обычно рассматривают большую σ-алгебру.

В дальнейшем, для краткости, единичный куб $[0,1]^n$ будем обозначать через I.

Пример 2.25. Вычислим n-мерную меру Лебега разных подмножеств евклидова пространства.

(1) Мера точки равна нулю, так как куб I содержит бесконечно много точек. Поэтому объединение не более чем счетного числа точек также равна нулю. В частности, мера множества всех рациональных точек пространства $\mathbb{R}^n$ равна нулю. Мера множества всех нерациональных точек куба I равна 1.

(2) Мера любого (измеримого) подмножества единичного куба, копии которого сдвигами можно превратить в бесконечное дизъюнктное семейство, содержащееся в кубе, равна нулю. Не более чем счетное объединение таких множеств также имеет меру ноль.

(3) Куб I можно составить из k^n кубов A_i, полученных из I сжатием в k раз. Все эти кубы имеют одинаковую меру и каждая пара из них пересекается по множеству меры ноль, поэтому n-мерный объем A_i равен $1/k^n$.

(4) *Кирпичом в* $\mathbb{R}^n$ назовем множество вида $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$, а отрезки $[a_i,b_i]$ — *сторонами* этого кирпича. Соображения, аналогичные приведенным выше, показывают, что n-мерный объем кирпича, длины сторон которого — рациональные числа $a_1,\dots,a_n$, равен $a_1\cdots a_n$.

(5) Пусть теперь задан кирпич K, длины сторон которого — произвольные числа $a_1,\dots,a_n$. Разместим внутри K кирпич K' с рациональными длинами сторон $a'_1,\dots,a'_n$, и поместим K в кирпич K'' с рациональными длинами сторон $a''_1,\dots,a''_n$. Из монотонности меры вытекает, что $\mathcal{L}^n(K') \leq \mathcal{L}^n(K) \leq \mathcal{L}^n(K'')$. Более того, если устремить a'_i и a''_i к a_i, то

$$\mathcal{L}^n(K') = a'_1\cdots a'_n \to a_1\cdots a_n \leftarrow a''_1\cdots a''_n = \mathcal{L}^n(K''),$$

поэтому $\mathcal{L}^n(K) = a_1\cdots a_n$.

(6) Пусть $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — произвольное ортогональное преобразование. Обозначим той же буквой L его продолжение на $2^{\mathbb{R}^n}$. Тогда *для каждого* $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *имеем* $L(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathcal{L}^n\big(L(A)\big) = \mathcal{L}^n(A)$. Действительно, так как $L\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ биективно, то $L\colon 2^{\mathbb{R}^n}\to 2^{\mathbb{R}^n}$ также биективно и сохраняет операции объединения, пересечения, разности; кроме того, $L(\emptyset)=\emptyset$. Так как L — гомеоморфизм, то L отображает стандартную топологию на себя биективно. Из сказанного выше вытекает, что L отображает также биективно $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ на себя, и что функция $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\to[0,+\infty]$, определенная как $\mu(A) = \mathcal{L}^n\big(L^{-1}(A)\big)$, является мерой (проверьте). Легко видеть, что мера μ инвариантна относительно сдвигов. По замечанию 2.23, имеем $\mu = a\,\mathcal{L}^n$ для некоторого $a\geq 0$. Однако L переводит шар $B = B_1(0)$ в себя биективно, причем $\mathcal{L}^n(A)\neq 0$, поэтому

$$a\,\mathcal{L}^n(B) = \mu(B) = \mathcal{L}^n\big(L^{-1}(B)\big) = \mathcal{L}^n(B)$$

и, значит, $a = 1$.

(7) Пусть $L\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — растяжение с коэффициентом $a>0$. Тогда *для каждого* $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *имеем* $L(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathcal{L}^n\big(L(A)\big) = a^n\mathcal{L}^n(A)$ (доказательство аналогично предыдущему пункту).

Упражнение 2.26. Пусть $L\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — произвольное линейное преобразование. Докажите, что для любого $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ выполняется $L(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{L}^n\big(L(A)\big) = |\det L|\,\mathcal{L}^n(A)$.

Упражнение 2.27. Вычислите меру Лебега канторова множества. Приведите пример замкнутого подмножества отрезка, которое не содержит интервалов, но имеет положительную меру Лебега.

2.4 Приложение теоремы Витали

Теорема 2.28. *Пусть U — произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, и $\delta>0$. Тогда существует дизъюнктное семейство $\mathcal{F}$ замкнутых невырожденных шаров таких, что радиус каждого шара не превосходит δ, каждый из шаров лежит в U и*

$$\mathcal{L}^n(U\setminus\cup\mathcal{F}) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mathcal{L}^n(U) < \infty$. Выберем произвольное $1 - 1/5^n < \theta < 1$.

Лемма 2.29. *Существует конечное дизъюнктное семейство $\{B_i\}_{i=1}^{M_1}$ невырожденных шаров $B_i \subset U$, радиусы которых не превосходят δ и*

$$\mathcal{L}^n\big(U \setminus \cup_{i=1}^{M_1} B_i\big) < \theta \mathcal{L}^n(U).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{B}$ семейство замкнутых невырожденных шаров, каждый из которых лежит в U и имеет не превосходящий δ радиус. Ясно, что $U = \cup\mathcal{B}$. По теореме 1.3, в $\mathcal{B}$ существует дизъюнктное (и, значит, не более чем счетное) подсемейство $\mathcal{B}'$, для которого $\mathcal{B} \subset 5\mathcal{B}'$, в частности, $U \subset \cup 5\mathcal{B}'$. Отсюда вытекает, что

$$\mathcal{L}^n(U) \le \sum_{B \in \mathcal{B}'} \mathcal{L}^n(5B) = 5^n \sum_{B \in \mathcal{B}'} \mathcal{L}^n(B) = 5^n \mathcal{L}^n(\cup\mathcal{B}'),$$

поэтому $\mathcal{L}^n(U \setminus \cup\mathcal{B}') = \mathcal{L}^n(U) - \mathcal{L}^n(\cup\mathcal{B}') \le (1 - 1/5^n)\mathcal{L}^n(U) < \theta\mathcal{L}^n(U)$.

Так как семейство $\mathcal{B}'$ не более чем счетное, в нем существует искомое конечное подсемейство. □

Далее, положим $U_1 = U \setminus \cup_{i=1}^{M_1} B_i$, тогда U_1 — ограниченное открытое множество, и, по лемме 2.29, существует конечное семейство $\{B_i\}_{i=M_1+1}^{M_2}$ невырожденных замкнутых шаров $B_i \subset U_1$, радиусы которых не превосходят δ и

$$\mathcal{L}^n\big(U \setminus \cup_{i=1}^{M_2} B_i\big) = \mathcal{L}^n\big(U_1 \setminus \cup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i\big) < \theta\mathcal{L}^n(U_1) < \theta^2\mathcal{L}^n(U).$$

Продолжая этот процесс, мы в результате построим не более чем счетное дизъюнктное семейство $\mathcal{F} = \{B_i\}$, состоящее из лежащих в U невырожденных замкнутых шаров, радиусы которых не больше δ и для которых выполняется $\mathcal{L}^n\big(U \setminus \cup\mathcal{F}\big) = 0$.

Чтобы получить доказательство в случае $\mathcal{L}^n(U) = \infty$, применим предыдущие рассуждения к множествам $U \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : m - 1 < |x|_\infty < m\big\}$, где $m \in \mathbb{N}$ и $\big|(x^1, \dots, x^n)\big| = \max\{|x^i|\}_{i=1}^n$, заметив при этом, что не попавшие в U множества $U \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\infty = m - 1\big\}$ имеют меру ноль (при $m = 1$ это — точка или пустое множество; при $m > 1$ эти множества лежат в конечных объединениях граней соответствующих кубов). □

2.5 Пример неизмеримого подмножества отрезка

Как было отмечено выше, мера Лебега не может быть распространена на все подмножества $\mathbb{R}^n$ (парадокс Банаха–Тарского). Построим более простой пример множества, которое не может быть измеримым ни для какого продолжения меры Лебега на большую σ-алгебру до меры, инвариантной относительно сдвигов. Построение будем проводить для случая $n = 1$. Этот пример был придуман Витали.

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ отношение ν: точки x и y находятся в отношении ν, если и только если $x - y \in \mathbb{Q}$. Ясно, что ν — отношение эквивалентности, поэтому отрезок $[0, 1]$ разбивается на (континуальное) число счетных классов эквивалентности. Выберем в каждом из этих классов по одной точке (с помощью аксиомы выбора) и полученное (континуальное) множество обозначим через E.

Далее, для каждого $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ положим $E_q = q + E$. Тогда при разных q множества E_q не пересекаются. Действительно, если $x \in E_{q_1} \cap E_{q_2}$, то $x = y + q_1 = z + q_2$, где $y, z \in E$, поэтому $y - z \in \mathbb{Q}$, откуда $y = z$ и, значит, $q_1 = q_2$.

Далее, заметим, что каждая точка из $[0, 1]$ лежит в некотором E_q. Действительно, для $x \in [0, 1]$ обозначим через $[x]$ класс ν-эквивалентности, которому x принадлежит. Тогда $[x] \cap E = \{y\}$ для некоторого $y \in [0, 1]$, откуда $x - y = q \in \mathbb{Q}$, так что $|q| \le 1$, т.е. $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, и, значит, $x = q + y \in q + E = E_q$.

Так как $E \subset [0, 1]$, то $E_q \subset [-1, 2]$ при всех $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Таким образом, если $A = \cup\{E_q : q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]\}$, то $[0, 1] \subset A \subset [-1, 2]$.

Покажем теперь, что для каждого инвариантного продолжения μ меры Лебега множество E неизмеримо. Предположим противное. Если $\mu(E) = 0$, то $\mu(E_q) = 0$ (в силу инвариантности μ относительно сдвигов) и, значит, $\mu(A) = 0$ в силу σ-аддитивности. Однако $[0, 1] \subset A$, поэтому $\mu(A) \ge 1$. Пусть теперь $\mu(E_q) > 0$, тогда, по тем же соображениям, $\mu(A) = \infty$, однако $A \subset [-1, 2]$, так что $\mu(A) \le 3$.