Тема 1

Теоремы Витали и Безиковича.

Основные факты теории метрических и топологических пространств, а также многочисленные прмеры можно найти в [1], [2], [3], [4], [5].

Напомним, что *метрическим пространством* называется пара (X, d), где X — некоторое множество, и $d(x, y)$ — неотрицательная невырожденная симметричная функция от пар точек из X, удовлетворяющая неравенству треугольника. Функция d называется *метрикой*. Если отказаться от невырожденности, т.е. разрешать $d(x, y) = 0$ при $x \neq y$, то такую d называют *псевдометрикой* или *полуметрикой*, а соответствующее пространство (X, d) — *псевдометрическим* или *полуметрическим*. Часто нам будет удобно вместо $d(x, y)$ писать $|xy|$, причем даже в случае, когда рассматривается несколько метрических пространств (если, конечно, из контекста понятно, где лежат x и y).

Открытый (*замкнутый*) *шар радиуса r с центром в точке* $x \in X$ будем обозначать через $U_r(x) = U(x, r)$ (соответственно, через $B_r(x) = B(x, r)$); *сферу радиуса r с центром в точке* $x \in X$ обозначим через $S_r(x) = S(x, r)$. Замкнутый шар назовем *невырожденным*, если его радиус отличен от нуля (шар отличен от точки). Если $Y \subset X$ — шар или сфера радиуса r, то для $\lambda > 0$ через λY обозначим тот же объект с тем же центром, но уже радиуса λr. Если $\mathcal{C} = \{Y_\alpha\}$ — семейство шаров или сфер в X, то через $\lambda\mathcal{C}$ будем обозначать семейство $\{\lambda Y_\alpha\}$.

Замечание 1.1. В метрических пространствах общего вида возможен ряд явлений, существенно отличающихся от того, что мы наблюдаем в $\mathbb{R}^n$. Например, если положить $d(x, y) = 1$ для любых $x \neq y$, то все шары $B_r(x)$ радиуса меньше 1 будут совпадать с $\{x\}$. В частности, $B_{1/3}(x) = 2B_{1/3}(x)$. Тем не менее, в любом метрическом пространстве для шаров $B_r(x)$, $B_\rho(y)$ и числа $\lambda = \big(|xy| + \rho\big)/r$ выполняется $B_\rho(y) \subset \lambda B_r(x)$ (проверьте).

Если $\mathcal{C} = \{X_\alpha\}$ — семейство, составленное из некоторых подмножеств X_α множества X, то через $\cup\mathcal{C}$ обозначим множество $\cup_\alpha X_\alpha$, а через $\cap\mathcal{C}$ — множество $\cap_\alpha X_\alpha$. Напомним, что семейство $\mathcal{C}$ *покрывает* $A \subset X$ или *является покрытием* A, если $A \subset \cup\mathcal{C}$.

Определение 1.2. Семейство $\mathcal{C}$ назовем *дизъюнктным*, если никакие два его элемента не пересекаются. Для указания того, что семейство $\mathcal{C}$ дизъюнктное, вместо $\cup\mathcal{C}$ и $\cup_\alpha X_\alpha$ пишут $\sqcup\mathcal{C}$ и $\sqcup_\alpha X_\alpha$ соответственно. Дизъюнктное покрытие $\mathcal{C}$ множества $\cup\mathcal{C}$ непустыми подмножествми называется *разбиением* этого множества.

Детали обсуждения приводимых ниже теорем Витали и Безиковича можно найти в [6]–[13].

Теорема 1.3 (Витали)**.** *Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство замкнутых невырожденных шаров в X, радиусы которых ограничены в совокупности, т.е. все радиусы не превосходят некоторого числа R. Тогда в $\mathcal{B}$ можно найти дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}'$ такое, что для каждого $B \in \mathcal{B}$ существует $B' \in \mathcal{B}'$, для которого $B \cap B' \neq \emptyset$ и $B \subset 5B'$. В частности, $\cup\mathcal{B} \subset \cup 5\mathcal{B}'$. Если пространство X сепарабельно, то каждое такое $\mathcal{B}'$ — не более чем счетно.*

Начнем с иллюстрации 1.1.

Доказательство. Разобьем $\mathcal{B}$ на подсемейства $\mathcal{B}_j$, $j \in \mathbb{N}$, положив в $\mathcal{B}_j$ все $B \in \mathcal{B}$, радиусы r которых удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{R}{2^j} < r \leq \frac{R}{2^{j-1}}.$$

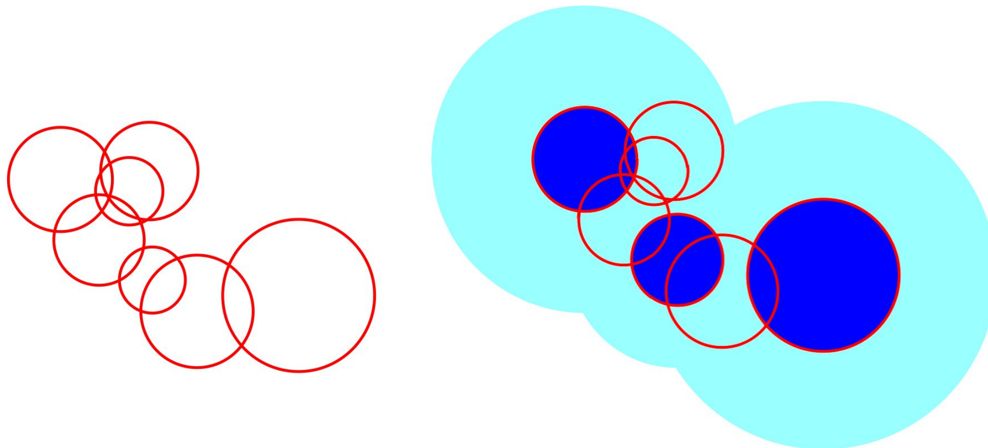

Рис. 1.1: Теореме Витали: слева — шары из семейства $\mathcal{B}$, справа выделены шары подсемейства $\mathcal{B}'$ и их «раздутия», покрывающие все $\cup\mathcal{B}$.

Теперь выберем максимальное дизъюнктное объединение в $\mathcal{B}$ специального вида. Чтобы это сделать, нам понадобится лемма Цорна. Напомним, в чем она заключается.

Пусть X — множество, на котором задан частичный порядок, т.е., вообще говоря, не все пары элементов сравнимы. Типичные пример — семейство подмножеств некоторого множества, где порядок задается отношением включения: одно подмножество не превосходит другого, если оно содержится в этом другом (порядок частичный, так как ни для всякой пары подмножеств верно, что одно из них принадлежит другому).

Порядок называется *линейным*, если сравнима любая пара элементов. *Цепочкой в* X называется каждое подмножество в X, порядок на котором — линейный. Элемент частично упорядоченного множества называется *максимальным*, если все остальные элементы или его не превосходят, или несравнимы с ним. Элемент x называется *верхней гранью для* $Y \subset X$, если для каждого $y \in Y$ выполняется $y \leq x$. В этом случае будем писать $Y \leq x$.

Лемма 1.4 (Цорн)**.** *Если в частично упорядоченном множестве каждая цепочка имеет верхнюю грань, то каждый элемент этого множества не превосходит некоторого максимального.*

Применим теперь лемму Цорна для наших целей. Рассмотрим всевозможные дизъюнктные подсемейства в $\mathcal{B}_1$. На этих подсемействах имеется естественный частичный порядок, заданный отношением включения одного подсемейства в другое. Если $\mathcal{D}$ — цепочка таких подсемейств, то $\cup\mathcal{D}$ также представляет собой дизъюнктное подсемейство в $\mathcal{B}_1$ (проверьте). Но тогда $\cup\mathcal{D}$ является верхней гранью цепочки $\mathcal{D}$. Тем самым, каждая цепочка имеет верхнюю грань, значит, по лемме Цорна, семейство дизъюнктных подсемейств в $\mathcal{B}_1$ имеет максимальный элемент. Иными словами, в $\mathcal{B}_1$ имеется максимальное дизъюнктное подсемейство. Выберем одно из таких семейств и обозначим его через $\mathcal{B}_1'$.

Теперь добавим к $\mathcal{B}_1$ семейство $\mathcal{B}_2$, и в $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, пользуясь леммой Цорна, выберем максимальное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}_2'$, содержащее $\mathcal{B}_1'$. Продолжим этот процесс, и для каждого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, построим максимальное в $\cup_{i=1}^{j}\mathcal{B}_i$ дизъюнктное подсемейство, содержащее $\mathcal{B}_j'$. Наконец, положим $\mathcal{B}' = \cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_j'$ и получим, очевидно, дизъюнктное подсемейство в $\mathcal{B}$.

Замечание 1.5. Можно было бы сразу выбрать максимальное дизъюнктивное подмножество во всем $\mathcal{B}$. Конечно, при такое выборе каждый $B \in \mathcal{B}$ будет пересекать некоторый $B' \in \mathcal{B}'$ в силу максимальности $\mathcal{B}'$, однако мы не гарантированы, что $B \subset 5B'$. Чтобы добиться последнего, приходится выбирать $\mathcal{B}'$ более тонким образом.

Покажем, что $\mathcal{B}'$ — искомое. Возьмем произвольное $B \in \mathcal{B}$, тогда для некоторого j выполняется $B \in \mathcal{B}_j$. Тогда существует $B' \in \mathcal{B}_j'$, для которого $B' \cap B \neq \emptyset$. Действительно, если такого нет, то, добавив B к $\mathcal{B}_j'$, получим также дизъюнктное подсемейство, что противоречит максимальности $\mathcal{B}_j'$.

Далее, радиус шара B' больше $R/2^j$, а радиус шара B не превосходит $R/2^{j-1}$, поэтому $B \subset 5B'$ (проверьте), откуда, в частности, вытекает, что $\cup\mathcal{B} \subset \cup 5\mathcal{B}'$.

Пусть теперь X сепарабельно, и подмножество $Y \subset X$ — всюду плотное и не более чем счетное. Так как все шары из $\mathcal{B}'$ имеют положительные радиусы, в каждом из них можно выбрать по одной точке из Y. Так как семейство $\mathcal{B}'$ дизъюнктно, количество элементов в $\mathcal{B}'$ такое же, как и число выбранных точек из Y, поэтому семейство $\mathcal{B}'$ — не более чем счетно. $\square$

Определение 1.6. Будем говорить, что семейство шаров $\mathcal{B}$ *сгущается* в некоторой точке $x \in X$, если для каждого каждого $\varepsilon > 0$ существует содержащий x шар $B \in \mathcal{B}$ радиуса меньше ε.

Следствие 1.7. *Предположим, что семейство $\mathcal{B}$ невырожденных шаров в X с ограниченными в совокупности радиусами сгущается в каждой точке множества $A \subset X$ центров этих шаров. Тогда семейство $\mathcal{B}'$, построенное в теореме 1.3, удовлетворяет следующему свойству: для любого конечного набора $\{B_1, \ldots, B_m\} \subset \mathcal{B}$ имеем*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}} 5B'.$$

Доказательство. Если $A \subset \cup_{i=1}^m B_i$, то все доказано. Пусть теперь существует $x \in A \setminus \cup_{i=1}^m B_i$. Так как покрытие $\mathcal{B}$ сгущается в x, можно найти $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $B \cap B_i = \emptyset$ при всех i. По свойству семейства $\mathcal{B}'$, существует $B' \in \mathcal{B}'$ такой, что $B \cap B' \neq \emptyset$ и $B \subset 5B'$. Осталось заметить, что B' отличен от шаров B_i, так как последние не пересекают B, а B' — пересекает; следовательно, $B' \in \mathcal{B}' \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}$. $\square$

Теорема 1.8 (Безикович)**.** *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $N = N_n \in \mathbb{N}$, что выполняется следующее утверждение. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство замкнутых невырожденных шаров в $\mathbb{R}^n$, радиусы которых ограничены в совокупности. Обозначим через A множество центров всех шаров из $\mathcal{B}$. Тогда существует набор $\mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_N$ дизъюнктных подсемейств $\mathcal{B}$ (и, значит, каждое $\mathcal{B}'_i$ — не более чем счетное), покрывающих в совокупности множество A:*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \sqcup \mathcal{B}'_i$$

(*некоторые из $\mathcal{B}'_i$ могут быть пустыми*).

Доказательство. Без ограничения общности, предположим, что центры всех шаров семейства $\mathcal{B}$ различны. Сначала мы рассмотрим случай ограниченного A, а затем разберем и общий случай.

Итак, пусть A ограничено. Мы построим не более чем счетное подсемейство $\mathcal{B}' = \{B_j\}_{j \in J}$ семейства $\mathcal{B}$, где или $J = \{1, \ldots, m\}$, или $J = \mathbb{N}$, и покажем, что $\mathcal{B}'$ покрывает A, и что для некоторой константы $N = N_n$, зависящей только от размерности n объемлющего пространства, для каждого $j \in J$ количество B_i, $i < j$, пересекающих B_j, строго меньше N. Последнее даст нам возможность построить семейства $\mathcal{B}'_i \subset \mathcal{B}'$ по следующему правилу: первые N шаров B_i мы разложим по последовательным $\mathcal{B}'_i$ (если шаров меньше N, то оставшиеся $\mathcal{B}'_i$ полагаем равными пустому множеству); каждый шар B_j, $j > N$, пересекает меньше чем N предыдущих шаров, поэтому по крайней мере для одного из текущих $\mathcal{B}'_i$ шар B_j не пересекает ни один из шаров, лежащих в этом $\mathcal{B}'_i$; шар B_j положим в $\mathcal{B}'_i$. Тем самым, мы разобьем $\mathcal{B}'$ на не более чем N дизъюнктных подсемейств, что и завершит доказательство теоремы в случае ограниченного A. Наконец, из полученных результатов мы выведем справедливость теоремы в случае неограниченного A.

Перейдем теперь к построению семейства $\mathcal{B}'$. Обозначим через R точную верхнюю грань радиусов шаров из $\mathcal{B}$. В силу сделанных предположений, $R < \infty$. По определению, в $\mathcal{B}$ существует шар $B_{r_1}(a_1) \in \mathcal{B}$ с $r_1 \geq (3/4)R$. Выберем его в качестве B_1.

Будем последовательно выбирать B_j по следующему правилу. Если шары $B_1, \ldots, B_{j-1}$ уже выбраны, то положим $A_j = A \setminus \cup_{i=1}^{j-1} B_i$. Если $A_j = \emptyset$, то больше шаров B_i искать не будем, и положим $J = \{1, \ldots, j-1\}$. Если же $A_j \neq \emptyset$, то обозначим через R_j точную верхнюю грань радиусов шаров из $\mathcal{B}$ с центрами, лежащими в A_j. По определению R_j, существует шар $B_{r_j}(a_j) \in \mathcal{B}$ с центром в некоторой точке $a_j \in A_j$ и радиуса $r_j \geq (3/4)R_j$. Этот шар мы выберем в качестве B_j. Если при каждом j выполняется $A_j \neq \emptyset$, то положим $J = \mathbb{N}$.

Лемма 1.9. *Для каждых $j > i$ имеем $a_j \in A_i$ и $r_i \geq (3/4) r_j$.*

Доказательство. Для проверки первого утверждения, заметим, что

$$a_j \in A_j = A \setminus \cup_{k=1}^{j-1} B_k \subset A \setminus \cup_{k=1}^{i-1} B_k = A_i.$$

Второе утверждение вытекает из первого:

$$r_i \geq \frac{3}{4} R_i = \frac{3}{4} \sup\bigl\{r : B_r(a) \in \mathcal{B},\ a \in A_i\bigr\} \geq \frac{3}{4} r_j.$$

$\square$

Лемма 1.10. *Шары $(1/3)B_j$, $j \in J$, попарно не пересекаются.*

Доказательство. Так как при $j > i$ имеем $a_j \in A \setminus \cup_{k=1}^{j-1} B_k$, то $a_j \notin B_i$. Отсюда вытекает, что

$$|a_i a_j| > r_i = \frac{1}{3}\,r_i + \frac{2}{3}\,r_i \ge \frac{1}{3}\,r_i + \frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\,r_j > \frac{1}{3}\,r_i + \frac{1}{3}\,r_j.$$

$\square$

Лемма 1.11. *Если $J = \mathbb{N}$, то $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$ и, значит, $\lim_{j\to\infty} R_j = 0$.*

Доказательство. Заметим сначала, что $\cup_{j\in J} B_j \subset \cup\mathcal{B}$, а последнее множество ограничено, так как ограничено множество A центров шаров из $\mathcal{B}$, а радиусы шаров из $\mathcal{B}$ ограничены в совокупности. Отсюда вытекает, что объем множества $\cup\mathcal{B}$ ограничен, поэтому ограничен также и объем множества $\cup\mathcal{B}'$. Но если $r_j \not\to 0$ при $j \to \infty$, то для некоторого $r > 0$ имеется бесконечно много шаров $(1/3)B_j$ таких, что $r_j \ge r > 0$, и так как эти шары попарно не пересекаются, то объем их объединения равен ∞, противоречие. Таким образом, $r_j \to 0$ при $j \to \infty$, и, так как $0 \le R_j \le (4/3)r_j$, то и $R_j \to 0$. $\square$

Лемма 1.12. *Семейство $\mathcal{B}'$ покрывает A.*

Доказательство. Если $J \ne \mathbb{N}$, то все очевидно.

Пусть теперь $J = \mathbb{N}$. Если утверждение леммы неверно, то существует такое $a \in A$, которое не принадлежит ни одному B_j, и, значит, $a \in A_j$ при всех j. По определению A, существует $B_r(a) \in \mathcal{B}$, и $r > 0$, так как все шары из $\mathcal{B}$ — невырождены. По определению R_j, имеем $R_j \ge r > 0$ при всех j, однако последнее противоречит лемме 1.11, в силу которой $R_j \to 0$ при $j \to \infty$. $\square$

Лемма 1.13. *Для некоторой константы $N = N_n$, зависящей только от размерности n объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$, для каждого $j \in J$ количество B_i, $i < j$, пересекающих B_j, строго меньше N.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}_j$ семейство всех шаров B_i, $i < j$, каждый из которых пересекает B_j.

Пусть M — положительное число. Разобьем семейство всех шаров $\mathcal{S}_j$ на два подсемейства, зависящие от M. В первое из них, которое мы обозначим через $\mathcal{S}_j(M)$, положим все шары из $\mathcal{S}_j$, радиусы которых не превосходят $(3/4)Mr_j$. Второе семейство — дополнение до $\mathcal{S}_j(M)$ в $\mathcal{S}_j$, — обозначим через $\bar{\mathcal{S}}_j(M)$. В дальнейшем мы подберем значение M так, чтобы число элементов в $\bar{\mathcal{S}}_j(M)$ оценивалось через величину, зависящую только от размерности n объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$. Что касается семейства $\mathcal{S}_j(M)$, то число его элементов оценивается некоторой функцией от M и n. А именно, имеет место следующий результат.

Лемма 1.14. *При каждом M семейство $\mathcal{S}_j(M)$ состоит не более чем из $4^n(M+1)^n$ элементов.*

Доказательство. Заметим сначала, что при каждом $i < j$, для которого $B_i \in \mathcal{S}_j(M)$, выполняется $(1/3)B_i \subset (M+1)B_j$. Действительно, так как $B_i \cap B_j \ne \emptyset$, имеем

$$|a_i a_j| \le r_i + r_j \le \Big(\frac{3}{4}M + 1\Big) r_j,$$

поэтому расстояние от каждой точки шара $(1/3)B_i$ до a_j не больше, чем

$$\Big(\frac{3}{4}M + 1\Big) r_j + \frac{1}{3} r_i \le \Big(\frac{3}{4}M + 1\Big) r_j + \frac{1}{3}\,\frac{3}{4}\,M r_j = (M+1) r_j.$$

Далее, так как все шары $(1/3)B_i$ попарно не пересекаются в силу леммы 1.10, их суммарный объем не превосходит объема шара $(M+1)B_j$. Чтобы оценить снизу суммарный объем шаров $(1/3)B_i$, $B_i \in \mathcal{S}_j(M)$, воспользуемся леммой 1.9. В соответствии с этой леммой $r_i \ge (3/4)r_j$, так что если p обозначает количество шаров в $\mathcal{S}_j(M)$, а ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, то

$$\omega_n (M+1)^n r_j^n \ge \sum_{B_i \in \mathcal{S}_j(M)} \omega_n \Big(\frac{r_i}{3}\Big)^n \ge \omega_n \Big(\frac{3}{4}\,\frac{r_j}{3}\Big)^n p = \omega_n \Big(\frac{r_j}{4}\Big)^n p\,,$$

откуда и вытекает искомое неравенство. $\square$

Чтобы оценить количество элементов в $\bar{\mathcal{S}}_j(M)$, докажем следующую лемму.

Лемма 1.15. *Пусть* i, $k < j$ *таковы, что* $i \neq k$ *и* B_i, $B_k \in \bar{\mathcal{S}}_j(M)$. *Тогда*

$$\cos \widehat{a_i a_j a_k} \leq \frac{2}{3} + \frac{8}{3M} + \Big(\frac{4}{3M}\Big)^2.$$

Доказательство. Нам понадобятся неравенство

$$\frac{3}{4} M r_j < r_i < |a_i a_j| \leq r_i + r_j,$$

а также неравенство, полученное из предыдущего заменой i на k. Здесь первое неравенство вытекает из определения $\bar{\mathcal{S}}_j(M)$, второе — из леммы 1.9, третье — из того, что B_i и B_j пересекаются (определение семейства $\mathcal{S}_j$). Кроме того, предположим для определенности, что $i < k$, тогда лемма 1.9 дает $r_i \geq (3/4) r_k$ и $r_i < |a_i a_k|$.

Воспользуемся теперь теоремой косинусов. Имеем

$$\cos \widehat{a_i a_j a_k} = \frac{|a_i a_j|^2 + |a_k a_j|^2 - |a_i a_k|^2}{2|a_i a_j||a_k a_j|} < \frac{(r_i + r_j)^2 + (r_k + r_j)^2 - r_i^2}{2 r_i r_k} = \frac{2 r_i r_j + 2 r_j^2 + r_k^2 + 2 r_k r_j}{2 r_i r_k} =$$
$$= \frac{r_j}{r_k} + \frac{r_j}{r_i}\frac{r_j}{r_k} + \frac{1}{2}\frac{r_k}{r_i} + \frac{r_j}{r_i} < \frac{4}{3M} + \Big(\frac{4}{3M}\Big)^2 + \frac{1}{2}\frac{4}{3} + \frac{4}{3M} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3M} + \Big(\frac{4}{3M}\Big)^2,$$

что и требовалось. □

Выберем M так, чтобы правая часть неравенства из леммы 1.15 стала меньше $5/6$. Тогда все углы вида $\widehat{a_i a_j a_k}$ не меньше, чем $\alpha = \arccos(5/6)$. Рассмотрим лучи, идущие из a_j в те точки a_i, для которых $B_i \in \bar{\mathcal{S}}_j(M)$. Эти лучи пересекают единичную сферу $S^{n-1}(a_j)$ с центром в a_j в точках P_i, угловые расстояния между которыми не меньше α. Однако количество таких точек не больше некоторого числа M_n, зависящего исключительно от n: доказательство получается сравнением объема сферы $S^{n-1}(a_j)$ и суммарного объема сферических кругов радиуса $\alpha/2$ с центрами в точках P_i.

Положим $N_n = 4^n (M+1)^n + M_n + 1$ для выбранного выше M. Тогда такое N_n не зависит от выбора семейства $\mathcal{B}$, а зависит только от размерности n (мы считаем, что M раз и навсегда фиксировано). Из приведенных выше рассуждений вытекает, что число точек в $\mathcal{S}_j$ строго меньше N_n. Лемма 1.13 доказана. □

Итак, нам осталось рассмотреть случай, когда множество A неограничено. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ обозначим через W_i подмножество $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех x таких, что $3R(i-1) \leq |x| < 3Ri$. Ясно, что множества W_i попарно не пересекаются и покрывают все $\mathbb{R}^n$. Положим $A_i = A \cap W_i$ (не путать с A_i из предыдущих рассуждений) и $\mathcal{B}_i = \{B_r(a) \in \mathcal{B} : a \in A_i\}$, тогда $A = \sqcup A_i$, $\mathcal{B} = \sqcup \mathcal{B}_i$, и если $|i - j| > 1$, а $B \in \mathcal{B}_i$ и $B' \in \mathcal{B}_j$, то $B \cap B'$ не пересекаются.

Для каждого $\mathcal{B}_i$ построим, как это было сделано выше, набор дизъюнктных семейств $\mathcal{B}'_{ik}$, $k = 1, \ldots, N_n$, покрывающих, при каждом фиксированном i, множество A_i. Тогда если $|i - j| > 1$, то семейство $\mathcal{B}'_{ik} \cup \mathcal{B}'_{jk}$ также дизъюнктно, как следует и приведенного выше рассуждения. Отсюда вытекает, что дизъюнктным является каждое семейство $\cup_{i \in 2\mathbb{N}} \mathcal{B}'_{ik}$, $k = 1, \ldots, N_n$, а также каждое семейство $\cup_{i \in 2\mathbb{N}-1} \mathcal{B}'_{ik}$, $k = 1, \ldots, N_n$. При этом, конечно же, каждое из этих $2N_n$ семейств не более чем счетно, и они в совокупности покрывают все A. Тем самым, увеличив предыдущее N_n вдвое, получим доказательство теоремы и в случае неограниченного A. Теорема полностью доказана. □