2.5 Неприводимые соответствия

Напомним, что соответствие $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(X,Y)$ называется неприводимым, если оно представляет собой минимальный элемент множества $\mathcal{R}(X,Y)$ с порядком, заданным отношением включения. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_0(X,Y)$. Упражнение 2.25 и теорема 2.27 являются ключевыми для доказательства следующего результата.

Следствие 2.30. *Для метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis}\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \in \mathcal{R}_0(X,Y)\bigr\}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(X,Y)$ существует $\mathcal{R}_0 \in \mathcal{R}_0(X,Y)$ такое, что $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$.

Замечание 2.31. Можно было бы воспользоваться стандартной техникой, основанной на лемме Цорна, но тогда нужно гарантировать, что каждая цепочка $\mathcal{R}_1 \supset \mathcal{R}_2 \supset \cdots$ имеет нижнюю грань, т.е. такое неприводимое соответствие, которое принадлежит всем $\mathcal{R}_i$. Однако это, вообще говоря, не так. В качестве примера рассмотрим $X = Y = \mathbb{N}$ и положим $\mathcal{R}_k = \bigl\{(i,j) : \max(i,j) \ge k\bigr\}$. Ясно, что каждое $\mathcal{R}_k$ лежит в $\mathcal{R}_0(X,Y)$, и что эти $\mathcal{R}_k$ образуют убывающую цепочку. Однако $\cap\mathcal{R}_k = \emptyset$, так как для любых i и j существует k, для которого $i < k$ и $j < k$, поэтому $(i,j) \notin \mathcal{R}_k$.

Вернемся к доказательству следствия. Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \subset X$ определен его образ $\sigma(x) = \{y \in Y \mid (x,y) \in \sigma\}$; для каждого $A \subset X$ определено $\sigma(A)$ как объединение образов элементов из A; для каждого $y \in Y$ определен его прообраз $\sigma^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x,y) \in \sigma\}$; для каждого $B \subset Y$ определен его прообраз как объединение прообразов его элементов.

Пусть $\mathcal{R}$ — произвольное соответствие между X и Y. Выберем для каждого $x \in X$ любой один элемент (x,y) из $\mathcal{R}$ и определим отображение $f\colon X \to Y$, положив $y = f(x)$. Отождествив отображение с его графиком, заметим, что $f \subset \mathcal{R}$. Положим $Y_1 = f(X)$ и $Y_2 = Y \setminus Y_1$.

Выберем теперь для каждого $y \in Y_2$ любой один элемент (x,y) из $\mathcal{R}$ и определим отображение $g\colon Y_1 \to X$, положив $x = g(y)$. Вновь, отождествив отображение с его графиком, заметим, что $g^{-1} \subset \mathcal{R}$. Положим $X_2 = g(Y_2)$ и $X_1 = X \setminus X_2$.

Пусть $Y_3 = f(X_2)$. Ясно, что $Y_3 \subset Y_1$.

Используя f и g, определим еще одно отношение: $h = f \cup g^{-1}$.

Лемма 2.32. *Имеем $h \in \mathcal{R}(X,Y)$.*

Доказательство. По определению f, для каждого $x \in X$ выполняется $\bigl(x, f(x)\bigr) \in f \subset h$.

Рассмотрим теперь произвольное $y \in Y$. Если $y \in Y_1$, то, так как $Y_1 = \operatorname{im} f$, существует $x \in X$ такой, что $y = f(x)$, поэтому $(x, y) \in f \subset h$. Если же $y \in Y_2$, то, по определению g, выполняется $\bigl(g(y), y\bigr) \in g^{-1} \subset h$. $\square$

Определим теперь отношение $\mathcal{R}_0$, выкинув из h некоторые пары (x, y) для каждого $y \in Y_3$ по следующему правилу:

(1) если $h^{-1}(y) \cap X_1 \neq \emptyset$, то выкидываем $\bigl(h^{-1}(y) \cap X_2\bigr) \times \{y\}$;

(2) если $h^{-1}(y) \cap X_1 = \emptyset$, т.е. $h^{-1}(y) \subset X_2$, то выкидываем все элементы, попавшие в $h^{-1}(y) \times \{y\}$, кроме любого одного.

Лемма 2.33. *Имеем* $\mathcal{R}_0 \in \mathcal{R}(X, Y)$.

Доказательство. Для каждого $y \in Y \setminus Y_3$ мы ничего не выкидывали, поэтому для таких y всегда имеются $x \in X$, для которых $(x, y) \in \mathcal{R}_0$.

Пусть теперь $y \in Y_3$. Если $h^{-1}(y) \cap X_1 \neq \emptyset$, то выкидывали только (x, y) с $x \in X_2$, поэтому остался $x \in X_1$, для которого пару $(x, y) \in h$ мы не выкинули и, значит, она лежит в $\mathcal{R}_0$. Если же $h^{-1}(y) \cap X_1 = \emptyset$, то мы выкидывали все элементы, попавшие в $h^{-1}(y) \times \{y\}$, кроме одного, поэтому для невыкинутого $(x, y) \in h$ имеем $(x, y) \in \mathcal{R}_0$.

Разберемся теперь с $x \in X$. Если $x \in X_1$, то пары $(x, y) \in h$ мы не выбрасывали. Если же $x \in X_2$, то, так как $X_2 =\in g$, существует $y \in Y_2$, для которого $x = g(y)$ и, значит, $(x, y) \in h$, но такие пары мы не выкидывали из h, поэтому $(x, y) \in \mathcal{R}_0$. $\square$

Лемма 2.34. *Имеем* $\mathcal{R}_0 \in \mathcal{R}_0(X, Y)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждой пары $(x, y) \in \mathcal{R}_0$ или x, или y не входят в другие пары.

Если $y \in Y_2$, то y входит только в пару $\bigl(g(y), y\bigr)$. Если $y \in Y_1 \setminus Y_3$, то x входит только в пару $\bigl(x, f(x)\bigr)$.

Наконец, пусть теперь $y \in Y_3$. Если $h^{-1}(y) \cap X_1 \neq \emptyset$, то все пары вида (x', y), $x' \in X_2$ мы выкинули, так что $x \in X_1$, однако каждый такой x входит ровно в одну пару, а именно, в $\bigl(x, f(x)\bigr)$. Если же $h^{-1}(y) \cap X_1 = \emptyset$, то мы выкинули все пары (x', y), $x' \in h^{-1}(y) \subset X_2$, кроме одной, так что y входит ровно в одну такую пару. $\square$

Эта лемма и завершает доказательство следствия. $\square$

Нам будет также удобно представлять отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ в виде двудольного графа. Тогда определена степень $\deg$ каждой вершины: $\deg_\sigma(x) = \#\sigma(x)$ и $\deg_\sigma(y) = \#\sigma^{-1}(y)$.

Упражнение 2.35. Пусть $\mathcal{R} \in \mathcal{R}_0(X, Y)$, $x \in X$, $\deg_{\mathcal{R}}(x) > 1$, тогда для каждого $x' \in X$, $x' \neq x$, имеем $\mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(x') = \emptyset$.

Из упражнения 2.35 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 2.36. *Пусть $\#X \ge 2$ и $\#Y \ge 2$, тогда для любого $\mathcal{R} \in \mathcal{R}_0(X,Y)$ не существует $x \in X$ такого, что $\{x\} \times Y \subset \mathcal{R}$.*

Пример 2.37. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$, тогда, по следствию 2.36, $\mathcal{R}_0(X,Y)$ состоит только из биекций, поэтому

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{\big||x_1x_2| - |y_1y_2|\big|}{2}.$$

Тем самым, множество классов изометричности двухточечных метрических пространств, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа, является метрическим пространством, изометричным открытому лучу $x > 0$ евклидовой прямой $\mathbb{R}$ с координатой x.

Пример 2.38. Рассмотрим два трехточечных пространства $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Положим $r_{ij} = |x_ix_j|$ и $\rho_{ij} = |y_iy_j|$. Пусть длины сторон первого треугольника равны $a_1 \le b_1 \le c_1$, а второго равны $a_2 \le b_2 \le c_2$ (сторона длины a_k лежит против первой вершины, длины b_k — против второй вершины, а длины c_k — против третьей вершины). Покажем, что

$$d_{GH}(X,Y) = \max\big\{|a_1 - a_2|,\, |b_1 - b_2|,\, |c_1 - c_2|\big\}.$$

Опишем сначала неприводимые соответствия $\mathcal{R} \in \mathcal{R}_0(X,Y)$, не являющиеся биекциями. Без ограничения общности, существует точка $x \in X$, для которой $\deg_{\mathcal{R}}(x) > 1$. По следствию 2.36, $\deg_{\mathcal{R}}(x) < 3$, откуда $\deg_{\mathcal{R}}(x) = 2$. По упражнению 2.35, точки из $X \setminus \{x\}$ соединяются только с точкой одноточечного множества $X \setminus \mathcal{R}(x)$. Таким образом, если положить $x = x_i$, оставшиеся точки из $X \setminus \{x\}$ обозначить через x_j и x_k, точки множества $\mathcal{R}(x_i)$ обозначить через y_l и y_m, а оставшуюся точку из Y — через y_n, то полученное соответствие будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{R} = \big\{(x_i, y_l),\, (x_i, y_m),\, (x_j, y_n),\, (x_k, y_n)\big\}.$$

Искажение $\operatorname{dis}\mathcal{R}$ такого соответствия равно

$$\max\big\{r_{jk}, \rho_{lm}, |r_{ij} - \rho_{ln}|, |r_{ij} - \rho_{mn}|, |r_{ik} - \rho_{ln}|, |r_{ik} - \rho_{mn}|\big\}.$$

Заметим, что $\max\{r_{jk}, \rho_{lm}\} \ge |r_{jk} - \rho_{lm}|$, поэтому

$$\operatorname{dis}\mathcal{R} \ge \max\big\{|r_{jk} - \rho_{lm}|, |r_{ij} - \rho_{nl}|, |r_{ik} - \rho_{nm}|\big\} = \operatorname{dis}\mathcal{R}_1,$$

где $\mathcal{R}_1$ — биекция $\big\{(x_i, y_n), (x_j, y_l), (x_k, y_m)\big\}$. Таким образом, при вычислении $d_{GH}(X,Y)$ достаточно рассматривать только соответствия, являющиеся биекциями.

Отметим, что каждая биекция между X и Y порождает биекцию между сторонами треугольников X и Y, максимум модулей разностей длин которых и есть искажение этой биекции. Так что будем теперь для удобства представлять, что $\mathcal{R}$ — это биекция между сторонами треугольника X и треугольника Y. Напомним, что выше мы обозначили длины сторон первого треугольника через $a_1 \le b_1 \le c_1$, а длины сторон второго — через $a_2 \le b_2 \le c_2$. Пусть $\mathcal{R}$ — монотонная биекция, т.е. сохраняющая порядок длин сторон. Мы покажем, что замена этой биекции на любую другую не уменьшает искажения, что и завершит доказательство формулы, вычисляющей $d_{GH}(X,Y)$.

Пусть максимум $\max\bigl\{|a_1-a_2|,\,|b_1-b_2|,\,|c_1-c_2|\bigr\}$ достигается на $|a_1-a_2|$, и предположим, без ограничения общности, что $a_1 \le a_2$. Тогда при замене биекции на другую или $|a_1-a_2|$ не меняется, что может только привести к увеличению искажения, или же a_2 меняется на больше или равное ему b_2 или c_2, и искажение может только возрасти. Аналогично рассматривается случай, когда максимум достигается на $|c_1-c_2|$.

Пусть теперь максимум достигается на $|b_1-b_2|$. Вновь, без ограничения общности, предположим, что $b_1 \le b_2$. Если изменение биекции не затрагивает b_1 и b_2, то искажение может только возрасти. Если пара (b_1,b_2) меняется на (b_1,c_2) или на (a_1,b_2), то максимум может только возрасти. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда b_1 соответствует a_2, а b_2 соответствует c_1. Тогда a_1 соответствует c_2. Но $|c_2-a_1| \ge |b_2-b_1|$, поэтому максимум вновь не может уменьшиться, что и завершает доказательство формулы.

Таким образом, множество классов изометричности трехточечных метрических пространств, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа, является метрическим пространством, изометричным многогранному конусу

$$\bigl\{(a,b,c)\mid 0<a\le b\le c,\, a+b\le c,\ a+c\le b,\ b+c\le a\bigr\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^3_\infty$, где последнее обозначает пространство $\mathbb{R}^3$ с метрикой, порожденной нормой $\bigl\|(x,y,z)\bigr\|_\infty=\max\bigl\{|x|,|y|,|z|\bigr\}$.

2.6 Эпсилон-изометрии

Пусть X и Y — метрические пространства и $\varepsilon>0$. Отображение $f\colon X\to Y$ (возможно, разрывное) называется *ε-изометрией*, если $\operatorname{dis} f\le\varepsilon$ и $f(X)$ является ε-сетью в Y.

Следствие 2.39. *Пусть X и Y — метрические пространства, а $\varepsilon>0$. Тогда*

(1) *если $d_{GH}(X,Y)<\varepsilon$, то существует 2ε-изометрия из X в Y;*

(2) *если существует ε-изометрия из X в Y, то $d_{GH}(X,Y)<2\varepsilon$.*

Доказательство. (1) Пусть $d_{GH}(X,Y)<\varepsilon$, тогда, по теореме 2.27, существует соответствие $\mathcal{R}\in\mathcal{R}(X,Y)$, для которого $\operatorname{dis}\mathcal{R}<2\varepsilon$. Для каждой точки $x\in X$ выберем произвольную точку $f(x)\in Y$ такую, что $\bigl(x,f(x)\bigr)\in\mathcal{R}$. Получили отображение $f\colon X\to Y$, для которого $f\le\mathcal{R}$, так что, в силу упражнения 2.25, имеем $\operatorname{dis} f\le\operatorname{dis}\mathcal{R}<2\varepsilon$. Покажем, что $f(X)$ является

2ε-сетью. Пусть $y \in Y$. Так как $\mathcal{R}$ — соответствие, существует $x \in X$ такая, что $(x, y) \in \mathcal{R}$. Но тогда $\bigl|f(x)y\bigr| = \Bigl|\,|xx| - \bigl|f(x)y\bigr|\Bigr| \le \operatorname{dis}\mathcal{R} < 2\varepsilon$.

(2) Пусть $f\colon X \to Y$ — некоторая ε-изометрия. Рассмотрим отношение

$$\mathcal{R} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times U_\varepsilon\bigl(f(x)\bigr).$$

Так как $f(X)$ представляет собой ε-сеть, то для любого $y \in Y$ существует $f(x)$, для которого $\bigl|f(x)y\bigr| < \varepsilon$, т.е. $y \in U_\varepsilon\bigl(f(x)\bigr)$, так что $(x, y) \in \mathcal{R}$ и, значит, $\mathcal{R}$ — соответствие.

Далее, для любых (x, y), $(x', y') \in \mathcal{R}$ выполняется

$$\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| \le \Bigl||xx'| - \bigl|f(x)f(x')\bigr|\Bigr| + \Bigl|\bigl|f(x)f(x')\bigr| - |yy'|\Bigr| \le \\ \varepsilon + \bigl|f(x)y'\bigr| + \bigl|yf(x)\bigr| \le 3\varepsilon.$$

Переходя к точной верхней грани, заключаем, что $\operatorname{dis}\mathcal{R} \le 3\varepsilon$, поэтому, в силу теоремы 2.27, $d_{GH}(X, Y) \le 3\varepsilon/2 < 2\varepsilon$. □

2.7 Метрическое пространство компактных метрических пространств

Напомним, что подмножество A метрического пространства X называется *всюду плотным в* X, если $\bar{A} = X$, т.е. если в любой окрестности любой точки из X имеются точки из A.

Упражнение 2.40. Пусть $A \subset X$ — всюду плотное подмножество метрического пространства X и x — произвольная точка из X. Тогда существует последовательность a_n точек из A, сходящаяся к x.

Упражнение 2.41. Пусть $A \subset X$ — всюду плотное подмножество метрического пространства X, а f и g — непрерывные отображения из X в метрическое пространство Y, совпадающие на A. Тогда эти отображения совпадают на всем X.

Упражнение 2.42. Пусть $A \subset X$ всюду плотное подмножество метрического пространства X, и f — изометричное отображение из A в полное метрическое пространство Y. Тогда существует единственное непрерывное отображение $F\colon X \to Y$, для которого $F|_A = f$. Более того, отображение F также изометрично.

Подмножество метрического пространства называется *ε-разделенным*, если для любых двух различных его точек x и y выполняется $|xy| \ge \varepsilon$.

Предложение 2.43. *Пусть X — компактное метрическое пространство, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное n, что в X можно найти ε-разделенное множество, состоящее из n точек, но нет ни одного ε-разделенного множества с более чем n точками.*

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим конечную $\varepsilon/3$-сеть S. Пусть N — количество точек в S, тогда в любом ε-разделенном множестве A содержится не более чем N точек, так как иначе две из них находятся от одной и той же точки из S ближе, чем $\varepsilon/3$, и тогда расстояние между ними меньше $2\varepsilon/3 < \varepsilon$, противоречие.

Из сказанного выше вытекает, что среди количеств k элементов во всевозможных ε-разделенных подмножествах X, существует максимальное, которое мы обозначим через $n \in \mathbb{N}$. Но тогда, очевидно, n — искомое. $\square$

В дальнейшем, ε-разделенные множества, описанные в предложении 2.43, будем называть *максимальными*.

Предложение 2.44. *Пусть f — изометричное отображение компакта X в себя, тогда f сюръективно, т.е. является изометрией.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют такие X и f, что $f(X) \neq X$. Так как f изометрично, f — непрерывно, поэтому множество $f(X)$ компактно как непрерывный образ компакта. По пункту (1) упражнения 1.79, множество $f(X)$ замкнуто, т.е. $X \setminus f(X)$ открыто. Пусть y — произвольная точка из $X \setminus f(X)$, тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $U_\varepsilon(y) \subset X \setminus f(X)$, так что для каждой точки $y' \in F(X)$ выполняется $|yy'| \geq \varepsilon$.

Пусть A — произвольное максимальное ε-разделенное множество в X, существующее в силу предложения 2.43. Тогда, в силу изометричности f, множество $f(A)$ также является ε-разделенным в X. Но $f(A) \cup \{y\}$ — также ε-разделенное подмножество X, содержащее на одну точку больше, чем A. Последнее противоречит максимальности множества A. $\square$

Замечание 2.45. Если отказаться от условия компактности X, то предложение перестает быть верным. В качестве примера можно рассмотреть сдвиг луча вдоль себя.

Теорема 2.46. *Пусть X и Y — компактные метрические пространства такие, что $d_{GH}(X, Y) = 0$, тогда X и Y изометричны. Таким образом, расстояние Громова-Хаусдорфа задает метрику на множестве классов изометрии компактных метрических пространств.*

Доказательство. По следствию 2.39, существует последовательность ε_n-изометрий $f_n \colon X \to Y$ с $\varepsilon_n \to 0$. Так как X — компактно, то X — вполне ограничено, поэтому содержит счетное всюду плотное подмножество S (его можно построить, взяв объединение конечных $1/n$-сетей по всем $n \in \mathbb{N}$).

Далее, так как Y — компакт, для каждого $x_k \in S$ последовательность $f_1(x_k)$, $f_2(x_k), \ldots$ имеет сходящуюся подпоследовательность $f_{i_1}(x_k)$, $f_{i_2}(x_k)$, $\ldots$ Рассмотрим последовательность $f_1(x_k)$, $f_2(x_k)$, $\ldots$, выберем в ней произвольную сходящуюся подпоследовательность $f_{i_1}(x_1)$, $f_{i_2}(x_1)$, $\ldots$ и положим $f_p^1 = f_{i_p}$. Таким образом, построенная сходящаяся подпоследовательность имеет вид $f_1^1(x_1)$, $f_2^1(x_1)$, $\ldots$

Рассмотрим теперь последовательность $f_1^1(x_2)$, $f_2^1(x_2)$, ..., выберем в ней сходящуюся подпоследовательность $f_{j_1}^1(x_2)$, $f_{j_2}^1(x_2)$, ... и положим $f_p^2 = f_{j_p}^1$. Продолжая этот процесс, мы построим семейства функций f_p^k при каждом $k \in \mathbb{N}$.

Заметим, что последовательность функций f_1^1, $f_2^2, \ldots$ сходится в каждой точке $x_i \in S$. Это позволяет определить отображение $f\colon S \to Y$ как поточечный предел последовательности f_p^p. Так как для любых x, $x' \in S$ выполняется $\Big|\big|f_p^p(x)f_p^p(x')\big| - |xx'|\Big| \le \operatorname{dis} f_p^p \to 0$ при $p \to \infty$, имеем

$$\big|f(x)f(x')\big| = \lim_{p\to\infty}\big|f_p^p(x)f_p^p(x')\big| = |xx'|,$$

поэтому f — изометричное отображение. Так как Y — полное пространство, отображение f, по упражнению 2.42, продолжается на все X до единственного изометричного отображения F. Меняя местами X и Y, заключаем, что также существует изометричное отображение $G\colon Y \to X$. Рассмотрим отображение $F \circ G\colon Y \to Y$. Оно — изометрично. Применяя предложение 2.44, заключаем, что $F \circ G$ — сюръективно, так что F — тоже сюръективно и, поэтому, является изометрией между X и Y. □

Упражнение 2.47. Докажите, что если метрическое пространство X компактно, метрическое пространство Y полно, и $d_{GH}(X,Y) = 0$, то X изометрично Y.