2.2 Неравенство треугольника

Докажем теперь, что d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника.

Предложение 2.17. *Для любых метрических пространств X_1, X_2 и X_3 имеем*

$$d_{GH}(X_1, X_3) \le d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3).$$

Доказательство. Выберем произвольные псевдометрики $\rho_{12} \in \mathcal{D}(X_1, X_2)$ и $\rho_{23} \in \mathcal{D}(X_2, X_3)$. Определим функцию ρ на парах точек из $X_1 \sqcup X_3$, положив ее равной исходным псевдометрикам для пар, лежащих или в X_1 или в X_3, а для точек $x_1 \in X_1$ и $x_3 \in X_3$ положим

$$\rho(x_1, x_3) = \rho(x_3, x_1) = \inf_{x_2 \in X_2} \big(\rho_{12}(x_1, x_2) + \rho_{23}(x_2, x_3)\big).$$

Лемма 2.18. *Определенная только что функция ρ является псевдометрикой на $X_1 \sqcup X_3$.*

Доказательство. Достаточно проверить неравенство треугольника для x, $z \in X_1$ и $y \in X_3$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\rho(x,y) + \rho(y,z) = \\
&\quad = \inf_{\substack{x_2 \in X_2 \\ x_2' \in X_2}} \big(\rho_{12}(x, x_2) + \rho_{23}(x_2, y) + \rho_{23}(y, x_2') + \rho_{12}(x_2', z)\big) \ge \\
&\quad\ge \inf_{\substack{x_2 \in X_2 \\ x_2' \in X_2}} \big(\rho_{12}(x, x_2) + \rho_{23}(x_2, x_2') + \rho_{12}(x_2', z)\big) = \\
&\quad= \inf_{\substack{x_2 \in X_2 \\ x_2' \in X_2}} \big(\rho_{12}(x, x_2) + |x_2 x_2'| + \rho_{12}(x_2', z)\big) = \\
&\quad= \inf_{\substack{x_2 \in X_2 \\ x_2' \in X_2}} \big(\rho_{12}(x, x_2) + \rho_{12}(x_2, x_2') + \rho_{12}(x_2', z)\big) \ge |xz| = \rho(x,z);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(z,x) + \rho(x,y) &= \rho_{12}(z,x) + \inf_{x_2 \in X_2} \big(\rho_{12}(x, x_2) + \rho_{23}(x_2, y)\big) = \\
&= \inf_{x_2 \in X_2} \big(\rho_{12}(z,x) + \rho_{12}(x, x_2) + \rho_{23}(x_2, y)\big) \ge \\
&\ge \inf_{x_2 \in X_2} \big(\rho_{12}(z, x_2) + \rho_{23}(x_2, y)\big) = \rho(z,y);
\end{aligned}$$

аналогично доказывается, что $\rho(y,z) + \rho(z,x) \ge \rho(y,x)$. □

Лемма 2.19. *В сделанных выше обозначениях, имеем*

$$d_H(X_1, X_2, \rho_{12}) + d_H(X_2, X_3, \rho_{23}) \ge d_H(X_1, X_3, \rho).$$

Доказательство. Первое слагаемое в левой части неравенства обозначим через a_{12}, а второе — через a_{23}. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $X_1 \subset U_{a_{12}+a_{23}+\varepsilon}(X_3)$ и $X_3 \subset U_{a_{12}+a_{23}+\varepsilon}(X_1)$. Проверим первое включение (второе проверяется аналогично). Мы должны показать, что для любого $x_1 \in X_1$ существует такое $x_3 \in X_3$, что $\rho(x_1, x_3) < a_{12} + a_{23} + \varepsilon$.

Выберем произвольное $x_1 \in X_1$. Тогда существует x_2, для которого $\rho_{12}(x_1, x_2) < a_{12} + \varepsilon/2$, и существует x_3, для которого $\rho_{23}(x_2, x_3) < a_{23} + \varepsilon/2$, откуда

$$\rho(x_1, x_3) = \inf_{x_2' \in X_2} \big(\rho_{12}(x_1, x_2') + \rho_{23}(x_2', x_3)\big) \le$$
$$\le \rho_{12}(x_1, x_2) + \rho_{23}(x_2, x_3) < a_{12} + a_{23} + \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3) =$$
$$= \inf_{\substack{\rho_{12} \in \mathcal{D}(X_1, X_2)\\ \rho_{23} \in \mathcal{D}(X_2, X_3)}} \big(d_H(X_1, X_2, \rho_{12}) + d_H(X_2, X_3, \rho_{23})\big) \ge$$
$$\ge \inf_{\rho_{13} \in \mathcal{D}(X_1, X_3)} d_H(X_1, X_3, \rho_{13}) = d_{GH}(X_1, X_3),$$

где неравенство имеет место в силу леммы 2.19. $\square$

2.3 Первые примеры

Приведем некоторые примеры.

Пример 2.20. Пусть Y является ε-сетью метрического пространства X. Тогда $d_{GH}(X, Y) \le d_H(X, Y) \le \varepsilon$.

Напомним, что *диаметром метрического пространства* X называется величина $\operatorname{diam} X := \sup_{x, x' \in X} |xx'|$. Нам понадобится следующий результат.

Лемма 2.21. *Пусть X и Y — метрические пространства и*

$$d = \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\} < \infty.$$

Зададим на парах точек из $X \sqcup Y$ функцию ρ, определив ее на X и на Y равной исходным метрикам, а для любых $x \in X$ и $y \in Y$ положив $\rho(x, y) = d/2$. Тогда ρ является псевдометрикой, так что $\rho \in \mathcal{D}(X, Y)$. Более того, $d_H(X, Y, \rho) = d/2$.

Доказательство. Действительно, достаточно проверить выполнение неравенства треугольника на точкам x, $z \in X$ и $y \in Y$. Имеем

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = d \ge |xz| = \rho(x, z);$$
$$\big|\rho(x, y) - \rho(y, z)\big| = 0 \le \rho(x, z),$$

и, аналогично последнему, $\rho(x,z)+\rho(z,y)\ge\rho(x,y)$.

Покажем теперь, что $d_H(X,Y,\rho)=d/2$. Так как расстояния между произвольной точкой из X и произвольной точкой из Y равны $d/2$, то $X\subset B_{d/2}(Y)$ и $Y\subset B_{d/2}(X)$, так что $d_H(X,Y)\le d/2$. С другой стороны, если $0<r<d/2$, то ни одна точка из Y не лежит в $B_r(X)$, поэтому $d_H(X,Y,\rho)\ge d/2$. $\square$

Предложение 2.22. *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

(1) $d_{GH}(X,Y)\le\frac12\max\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Y\}$, *в частности, если X и Y ограничены, то $d_{GH}(X,Y)<\infty$;*

(2) *если* $\operatorname{diam}X<\infty$, *то*

$$d_{GH}(X,Y)\ge\frac12|\operatorname{diam}X-\operatorname{diam}Y|.$$

Доказательство. (1) Пусть $d=\max\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Y\}$. Если $d=\infty$, то доказывать нечего.

Пусть теперь $d<\infty$. По лемме 2.21, функция ρ на парах точек из $X\sqcup Y$, совпадающая с исходной метрикой на X и на Y, и равная $d/2$ на каждой паре (x,y), где $x\in X$, $y\in Y$, является псевдометрикой и $d_H(X,Y,\rho)=d/2$, поэтому $d_{GH}(X,Y)\le d/2$, что и требовалось.

(2) Положим $r=d_{GH}(X,Y)$. Пусть сначала Y — неограниченное пространство. Покажем, что тогда $r=\infty$. Предположим противное, т.е. $r<\infty$. Тогда для $\varepsilon>0$ существует реализация (X',Y',Z) пары (X,Y), для которой $d_H(X',Y')<r+\varepsilon$. Выберем произвольные точки y_1, $y_2\in Y$ и пусть y_1', $y_2'\in Y'$ — соответствующие им точки при изометрии. Так как $Y'\subset U_{r+\varepsilon}(X')$, существуют такие точки x_1', $x_2'\in X'$, что $|y_1'x_1'|<r+\varepsilon$ и $|y_2'x_2'|<r+\varepsilon$. Поэтому

$$|y_1y_2|=|y_1'y_2'|\le|y_1'x_1'|+|x_1'x_2'|+|x_2'y_2'|<r+\varepsilon+\operatorname{diam}X+r+\varepsilon,$$

откуда $\operatorname{diam}Y<\infty$, противоречие с неограниченностью Y. Таким образом, для неограниченного Y формула имеет место.

Пусть теперь Y ограничено. По предыдущему пункту имеем $r<\infty$. Повторяя проведенные выше рассуждения, заключаем, что для любых y_1, $y_2\in Y$ и любого $\varepsilon>0$ выполняется $|y_1y_2|\le\operatorname{diam}X+2r+2\varepsilon$, откуда $\operatorname{diam}Y\le\operatorname{diam}X+2r+2\varepsilon$. Меняя X и Y местами, получаем, что $\operatorname{diam}X\le\operatorname{diam}Y+2r+2\varepsilon$, откуда и вытекает требуемое неравенство, так как ε произвольно. $\square$

Предыдущие два результата мгновенно приводят к следующему примеру.

Пример 2.23. Пусть $Y=\{y\}$, тогда для любого метрического пространства X имеем $d_{GH}(X,Y)=\operatorname{diam}(X)/2$.

2.4 Соответствия и их искажения

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$. Если $\pi_X : X \times Y \to X$ и $\pi_Y : X \times Y \to Y$ — канонические проекции, т.е. $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$, то теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma \subset \mathcal{P}(X, Y)$.

Отношение $\mathcal{R}$ между X и Y называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций π_X и π_Y на $\mathcal{R}$ — сюръекции. Иными словами, для каждого $x \in X$ существует $y \in Y$, находящийся с x в отношении $\mathcal{R}$ и, обратно, для каждого $y \in Y$ существует $x \in X$, находящийся с y в отношении $\mathcal{R}$.

Замечание 2.24. График отображения является соответствием, если и только если это отображение сюръективно.

Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Далее, отношение включения задает на $\mathcal{P}(X, Y)$, а, значит, и на $\mathcal{R}(X, Y)$, частичный порядок: $\sigma_1 \le \sigma_2$, если и только если $\sigma_1 \subset \sigma_2$. Минимальные в этом порядке соответствия назовем *неприводимыми*, а все остальные — *приводимыми*. Таким образом, соответствие приводимо тогда и только тогда, когда из него можно выкинуть некоторые пары (x, y), и полученное в результате отношение останется соответствием. Если таких пар не существует, то соответствие неприводимо. Отметим, что график сюръективного отображения является примером неприводимого соответствия.

Для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ определим его *искажение* $\operatorname{dis}\sigma$ так:

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y) \in \sigma,\ (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Если $f : X \to Y$ — отображение, то его *искажением* $\operatorname{dis} f$ назовем искажение графика отображения f.

Упражнение 2.25. Покажите, что искажение является монотонно возрастающей функцией на $\mathcal{P}(X, Y)$, т.е. если $\sigma_1 \le \sigma_2$, то $\operatorname{dis}\sigma_1 \le \operatorname{dis}\sigma_2$.

Упражнение 2.26. Пусть X и X' — пространства с псевдометриками ρ и ρ' соответственно. Покажите, что X/ρ и X'/ρ' изометричны, если и только если между X и Y существует соответствие, искажение которого равно нулю. Такие псевдометрические пространства X и X' также будем называть *изометричными*.

Теорема 2.27. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Доказательство. Обозначим через $I(X, Y)$ правую часть равенства из формулировки теоремы. План доказательства теоремы такой. Сначала мы покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и для каждой реализации (X', Y', Z)

пары (X, Y) существует такое соответствие $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(X, Y)$, что $2d_H(X', Y') + 2\varepsilon \ge \operatorname{dis}\mathcal{R}$. Это даст нам неравенство $d_{GH}(X, Y) \ge I(X, Y)$. Затем мы покажем, что для каждого соответствия $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(X, Y)$ можно построить такую реализацию (X', Y', Z) пары (X, Y), что $d_H(X', Y') = \frac{1}{2}\operatorname{dis}\mathcal{R}$. Последнее даст нам неравенство $d_{GH}(X, Y) \le I(X, Y)$, что, вместе с первым неравенством, и завершит доказательство теоремы.

Начнем с первого неравенства. Пусть (X', Y', Z) — произвольная реализация пары (X, Y) и $f\colon X \to X'$ и $g\colon Y \to Y'$ соответствующие изометрии. Положим $r = d_H(X', Y')$ и определим отношение $\mathcal{R}$ между X и Y так:

$$\mathcal{R} = \Big\{(x, y) : x \in X,\ y \in Y,\ \big|f(x)g(y)\big| < r + \varepsilon\Big\}.$$

Тогда отношение $\mathcal{R}$ является соответствием. Действительно, имеем $X' \subset U_{r+\varepsilon}(Y')$ и $Y' \subset U_{r+\varepsilon}(X')$, поэтому для любого $x \in X$, $x' = f(x) \in X'$, существует такое $y' \in Y'$ и $y \in Y$, $y' = g(y)$, что $\big|f(x)g(y)\big| = |x'y'| < r + \varepsilon$, откуда $(x, y) \in \mathcal{R}$. Отсюда вытекает, что проекция π_X сюръективна. Аналогично показывается, что и проекция π_Y также сюръективна.

Оценим $\operatorname{dis}\mathcal{R}$. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — произвольные пары из $\mathcal{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}\big||x_1x_2| - |y_1y_2|\big| = \Big|\big|f(x_1)f(x_2)\big| - \big|g(y_1)g(y_2)\big|\Big| \le \\ \le \big|f(x_1)g(y_1)\big| + \big|f(x_2)g(y_2))\big| < 2r + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

откуда $\operatorname{dis}\mathcal{R} \le 2r + 2\varepsilon$, что и требовалось.

Докажем второе неравенство. Пусть $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(X, Y)$ — произвольное соответствие и $\operatorname{dis}\mathcal{R} = 2r$. Определим на парах точек из $X \sqcup Y$ симметричную функцию ρ, положив на X и Y ее равной исходным расстояниям, а для $x \in X$ и $y \in Y$ зададим ее так:

$$\rho(x, y) = \inf\big\{|xx'| + r + |y'y| : (x', y') \in \mathcal{R}\big\}.$$

Лемма 2.28. *Определенная только что функция ρ является псевдометрикой.*

Доказательство. Достаточно проверить неравенство треугольника для $x \in X$ и y, $z \in Y$. Имеем

$$\begin{aligned}\big|\rho(x, y) - \rho(y, z)\big| = \inf_{(x', y') \in \mathcal{R}}\big(|xx'| + r + |y'y| - |yz|\big) \le \\ \le \inf_{(x', y') \in \mathcal{R}}\big(|xx'| + r + |y'z|\big) = \rho(x, z);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(x, y) + \rho(y, z) = \inf_{(x', y') \in \mathcal{R}}\big(|xx'| + r + |y'y| + |yz|\big) \ge \\ \ge \inf_{(x', y') \in \mathcal{R}}\big(|xx'| + r + |y'z|\big) = \rho(x, z).\end{aligned}$$

□

Далее, заметим, что если $(x,y)\in\mathcal{R}$, то $\rho(x,y)=r$. Поэтому, так как $\mathcal{R}$ — соответствие, для каждой точки $x\in X$ существует точка $y\in Y$ такая, что $\rho(x,y)=r$ и, обратно, для каждой точки $y\in Y$ существует точка $x\in X$ такая, что $\rho(x,y)=r$. Кроме того, для любых $x\in X$ и $y\in Y$ имеем $\rho(x,y)\ge r$. Отсюда вытекает, что $d_H(X,Y,\rho)=r$, что и требовалось. $\square$

Упражнение 2.29. Пусть X, Y и Z — метрические пространства, $\mathcal{R}_1$ — соответствие между X и Y, а $\mathcal{R}_2$ — соответствие между Y и Z. Докажите, что

(1) $\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2$ — соответствие между X и Z*;*

(2) $\operatorname{dis}(\mathcal{R}_1\circ\mathcal{R}_2)\le\operatorname{dis}\mathcal{R}_1+\operatorname{dis}\mathcal{R}_2$*;*

(3) выведите из предыдущего утверждения неравенство треугольника для расстояния Громова–Хаусдорфа.