Тема 2

Расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами.

В данном разделе мы определим аналог расстояния Хаусдорфа для произвольной пары метрических пространств. Наше изложение существенно опирается на [9].

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Замечание 2.1. Почему мы даем такое, на первый взгляд, более технически сложное определение расстояния по Громову-Хаусдорфу, когда можно было бы определить его как точную нижнюю грань чисел $d_H(X', Y')$ по всем реализациям (X', Y', Z) пары (X, Y)? Дело в том, что семейство таких реализаций уже не является множеством (вспомните парадокс Кантора про множество всех множеств). Вводя r и говоря про *существование реализации* мы, тем самым, избавляемся от необходимости рассматривать все реализации.

Замечание 2.2. Если X и Y — подмножества некоторого метрического пространства, то $d_{GH}(X, Y) \le d_H(X, Y)$. В частности, если $d_H(X, Y) = 0$, то и $d_{GH}(X, Y) = 0$, поэтому расстояние Громова–Хаусдорфа, как и расстояние Хаусдорфа, не является положительно определенным: например, расстояние Громова–Хаусдорфа между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$, в силу только что сказанного, равно нулю. Однако, если ограничиться компактными метрическими пространствами, то равенство нулю функции d_{GH} будет равносильно изометричности этих пространств (докажем ниже).

Замечание 2.3. В силу симметричности расстояния по Хаусдорфу, функция d_{GH} также симметрична.

Замечание 2.4. Неравенство треугольника для d_{GH} имеем место для любых метрических пространств. Но чтобы это доказать, нам понадобится развить некоторую технику, к чему мы сейчас и перейдем.

2.1 Продолжение метрик на дизъюнктивные объединения

Напомним, что множество X с неотрицательной функцией ρ, определенной на $X\times X$, называется *псевдометрикой* или *полуметрикой*, если для нее выполняются все аксиомы метрики, кроме положительной определенности: теперь $\rho(x,y)$ может равняться нулю и для $x\ne y$.

В дальнейшем нам будет необходимо неоднократно проверять выполнение неравенства треугольника. Чтобы сократить вычисления, запишем его в более компактной форме.

Упражнение 2.5. Покажите, что три неравенства треугольника на функцию ρ для тройки точек x, y, z равносильно следующему

$$\bigl|\rho(x,y)-\rho(y,z)\bigr|\le\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Оказывается, при определении расстояния по Громову-Хаусдорфу можно ограничиться лишь теми Z, которые получаются из псевдометрических пространств $(X\sqcup Y,\rho)$ отождествлением точек, находящихся на нулевом расстоянии. Начнем с конструкции, которая описывает такое отождествление.

Пусть X — псевдометрическое пространство с функцией расстояния ρ. Рассмотрим на X следующее отношение ν: точки x и y из X находятся в отношении ν, если и только если $\rho(x,y)=0$.

Упражнение 2.6. Покажите, что ν — отношение эквивалентности.

Обозначим через X/ρ множество классов эквивалентности ν. Для каждого $x\in X$ пусть $[x]$ — класс ν-эквивалентности, содержащий x, и пусть $\pi\colon X\to X/\rho$, $\pi\colon x\mapsto[x]$, — соответствующая *каноническая проекция*.

Упражнение 2.7. (1) Покажите, что для любых $[x]$, $[y]\in X/\rho$ и любых $x'\in[x]$ и $y'\in[y]$ имеем $\rho(x',y')=\rho(x,y)$, так что на парах элементов из X/ρ корректно определена функция $\bigl|[x][y]\bigr|=\rho(x,y)$.

(2) Докажите, что для любых $[x]\ne[y]$ имеем $\bigl|[x][y]\bigr|>0$.

Таким образом, введенная на X/ρ функция пар точек является метрикой.

Упражнение 2.8. Покажите, что псевдометрическое пространство (X,ρ) является

(1) хаусдорфовым, если и только если ρ — метрика;

(2) полным (компактным, связным, линейно связным), если и только если X/ρ — такое.

Определение 2.9. Отображение псевдометрических пространств, сохраняющее расстояние, называется *изометричным.*

Очевидно, определенная выше каноническая проекция $\pi\colon X \to X/\rho$ — изометрична.

Замечание 2.10. На непустые подмножества псевдометрических пространств дословно переносится понятие расстояния Хаусдорфа.

Предложение 2.11. *Пусть $f\colon X \to Y$ — изометричное отображение псевдометрических пространств. Тогда*

(1) *для любого непустого $A \subset X$ и любого $r > 0$ выполняется $f\big(U_r(A)\big) \subset U_r\big(f(A)\big)$;*

(2) *для любых непустых подмножеств A и B пространства X выполняется $d_H(A,B) = d_H\big(f(A), f(B)\big)$;*

(3) *если ρ — псевдометрика пространства X и $\pi\colon X \to X/\rho$ — каноническая проекция, то для произвольных непустых подмножеств A и B пространства X имеем $d_H(A,B) = d_H\big(\pi(A), \pi(B)\big)$.*

Доказательство. (1) Для произвольного $x \in U_r(A)$ существует $a \in A$ такое, что $|xa| < r$, поэтому $\big|f(x)f(a)\big| = |xa| < r$, так что $f(x) \in U_r\big(f(A)\big)$ и, в силу произвольности x, имеем $f\big(U_r(A)\big) \subset U_r(f(A))$.

(2) Пусть $r = d_H(A,B)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем $A \subset U_{r+\varepsilon}(B)$ и $B \subset U_{r+\varepsilon}(A)$. Из пункта (1) выводим $f(A) \subset f\big(U_{r+\varepsilon}(B)\big) \subset U_{r+\varepsilon}\big(f(B)\big)$ и, аналогично, $f(B) \subset U_{r+\varepsilon}\big(f(A)\big)$, так что $d_H\big(f(A), f(B)\big)$ не превосходит $r+\varepsilon$ и, в силу произвольности ε, не превосходит r. Таким образом, $d_H\big(f(A), f(B)\big) \le d_H(A,B)$.

Обратно, пусть $d_H\big(f(A), f(B)\big) = r$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем $f(A) \subset U_{r+\varepsilon}\big(f(B)\big)$ и $f(B) \subset U_{r+\varepsilon}\big(f(A)\big)$. Покажем, что $A \subset U_{r+\varepsilon}(B)$ и $B \subset U_{r+\varepsilon}(A)$. Действительно, если, скажем, не выполняется первое включение, то в A существует такой элемент a, что $|ab| \ge r+\varepsilon$ для всех $b \in B$, но тогда $\big|f(a)f(b)\big| = |ab| \ge r+\varepsilon$ для всех $b \in B$, так что $f(a) \notin U_{r+\varepsilon}\big(f(B)\big)$ и, тем самым, $f(A) \not\subset U_{r+\varepsilon}\big(f(B)\big)$, противоречие. Тем самым, $d_H(A,B)$ не превосходит $r+\varepsilon$ и, в силу произвольности ε, не превосходит r, так что $d_H(A,B) \le d_H\big(f(A), f(B)\big)$.

(3) Это — мгновенное следствие упражнения 2.7 и пункта (2). $\square$

Обозначим через $\mathcal{D}(X,Y)$ множество всех псевдометрик ρ на $X \sqcup Y$, ограничения которых на X и Y совпадают с исходными метриками этих пространств.

Предложение 2.12. *Для любых непустых метрических пространств X и Y множество $\mathcal{D}(X,Y)$ непусто.*

Доказательство. Выберем в X и Y по одной точке $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, и для любых $x \in X$ и $y \in Y$ положим $\rho(x,y) = \rho(y,x) = |x_0x| + |y_0y|$. Продолжим ρ на все пары точек из $X \sqcup Y$, определив его на парах точек из X (парах точек из Y) равным исходным расстояниям между этими точками.

Покажем, что ρ — псевдометрика. Так как ρ — симметричная неотрицательная функция, осталось проверить неравенство треугольника. Пусть x, y, $z \in X \sqcup Y$. Если они все лежат или в X, или в Y, то неравенство треугольника выполнено. Пусть две из них лежат в одном из X, Y, а одна — в другом. Без ограничения общности, предположим, что x, $z \in X$, а $y \in Y$. Имеем

$$\begin{aligned}\bigl|\rho(x,y) - \rho(y,z)\bigr| = \bigl||x_0x| + |y_0y| - |y_0y| - |x_0z|\bigr| = \\ = \bigl||x_0x| - |x_0z|\bigr| \le |xz| = \rho(x,z),\end{aligned}$$

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) = |x_0x| + |y_0y| + |y_0y| + |x_0z| \ge |xz| = \rho(x,z),$$

что, в силу упражнения 2.5, эквивалентно неравенству треугольника для таких x, y, z. □

Отождествляя X и Y с ними же в $X \sqcup Y$, заметим, что при каждом ρ ограничение канонической проекции $\pi\colon X \sqcup Y \to (X \sqcup Y)/\rho =: Z_\rho$ на X и Y являются изометриями с их образами в Z_ρ. Положим $X_\rho = \pi(X)$, $Y_\rho = \pi(Y)$ и $d_H(X,Y,\rho) := d_H(X_\rho, Y_\rho) = d_H(X,Y)$. Таким образом, по каждой псевдометрике $\rho \in \mathcal{D}(X,Y)$ мы построили реализацию (X_ρ, Y_ρ, Z_ρ) пары (X,Y), поэтому

$$d_{GH}(X,Y) \le d_H(X,Y,\rho),$$

Предложение 2.13. *В сделанных выше обозначениях, имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \inf_{\rho \in \mathcal{D}(X,Y)} d_H(X,Y,\rho).$$

Доказательство. Нам осталось доказать, что $d_{GH}(X,Y) \ge d_H(X,Y,\rho)$.

Пусть (X', Y', Z) — реализация пары (X,Y), а f и g — некоторые изометрии из X и Y на X' и Y' соответственно. Определим функцию ρ на парах точек из $X \sqcup Y$, задав ее равной исходным метрикам на X и Y, а для $x \in X$ и $y \in Y$ положим $\rho(x,y) = \rho(y,x) = \bigl|f(x)g(y)\bigr|$.

Лемма 2.14. *Функция ρ является псевдометрикой.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение неравенства треугольника для x, $z \in X$ и $y \in Y$. Имеем

$$\big|\rho(x,y)-\rho(y,z)\big| = \Big|\big|f(x)g(y)\big| - \big|g(y)f(z)\big|\Big| \le \big|f(x)f(z)\big| = |xz| = \rho(x,z),$$
$$\rho(x,y)+\rho(y,z) = |f(x)g(y)| + \big|g(y)f(z)\big| \ge \big|f(x)f(z)\big| = |xz| = \rho(x,z),$$

что, в силу упражнения 2.5, эквивалентно неравенству треугольника для рассматриваемой тройки точек. □

Определим $f \sqcup g\colon X \sqcup Y \to X' \cup Y'$, положив $(f \sqcup g)(x) = f(x)$ для $x \in X$ и $(f \sqcup g)(y) = g(y)$ для $y \in Y$. Заметим, что для u, $v \in X \sqcup Y$ выполняется $\rho(x,y) = 0$, если и только если $(f \sqcup g)(u) = (f \sqcup g)(v)$ (проверьте), поэтому все точки каждого класса $[u] \in (X \sqcup Y)/\rho$ переводятся отображением $f \sqcup g$ в одну точку. Таким образом, корректно определено отображение $h\colon (X \sqcup Y)/\rho \to X' \cup Y'$, заданное так: $h\big([u]\big) = (f \sqcup g)(u)$.

Упражнение 2.15. Покажите, что каждый класс $[u] \in (X \sqcup Y)/\rho$ состоит не более чем из двух точек, причем если $[u] = \{u, v\}$, то одно из u, v лежит в X, а другое — в Y. Таким образом, переходя от $X \sqcup Y$ к $(X \sqcup Y)/\rho$, мы, фактически, склеиваем точки из некоторых таких пар $\{u, v\}$, причем разные такие пары не пересекаются.

Лемма 2.16. *Определенное выше отображение h — изометрия метрических пространств.*

Доказательство. Из приведенных выше рассуждений вытекает биективность h, поэтому осталось проверить, что h сохраняет метрику. Последнее достаточно выяснить для $[x]$, $[y] \in (X \sqcup Y)/\rho$, где $x \in X$ и $y \in Y$. Имеем

$$\Big|h\big([x]\big)h\big([y]\big)\Big| = \big|f(x)g(y)\big| = \rho(x,y) = \rho\big([x],[y]\big).$$

□

Учитывая, что $X' \cup Y' \subset Z$, можно рассматривать h как изометричное вложение в Z. Поэтому, в силу предложения 2.11,

$$d_H(X,Y,\rho) = d_H(X_\rho, Y_\rho) = d_H(X', Y'),$$

откуда $\inf_{\rho \in \mathcal{D}(X,Y)} d_H(X,Y,\rho) \le d_{GH}(X,Y)$, что и требовалось. □