1.5 Полнота

Напомним, что последовательность x_i метрического пространства X называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что при всех $p \geq n$ и $q \geq n$ выполняется $|x_p x_q| < \varepsilon$. Метрическое пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность в нем имеет предел.

Упражнение 1.84. Пусть X — компактное метрическое пространство, тогда X полно.

Теорема 1.85. *Пространство $\mathcal{H}(X)$ полно тогда и только тогда, когда X полно.*

Доказательство. Пусть X не полно. Покажем, что тогда и $\mathcal{H}(X)$ не полно. В X существует фундаментальная последовательность a_i, которая в X не сходится. По предложению 1.26, последовательность $\{a_i\}$ фундаментальна в $\mathcal{H}(X)$. Однако, по пункту (2) из предложения 1.78, последовательность $\{a_i\}$ расходится. Следовательно, $\mathcal{H}(X)$ также не полно.

Пусть теперь X полно. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность A_i в $\mathcal{H}(X)$ и покажем, что она сходится. Положим

$$B_n = \cup_{m=n}^{\infty} A_m, \quad C_n = \overline{B_n}, \quad A = \cap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Отметим, что $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ и, поэтому, $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, так что A принадлежит всем C_n. Мы покажем, что $A \in \mathcal{H}(X)$ и $A_i \to A$.

Лемма 1.86. *В сделанных выше предположениях, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что для любого натурального $i \geq n$ выполняется $C_i \subset B_\varepsilon(A_i)$ и, значит, $A \subset B_\varepsilon(A_i)$.*

Доказательство. Так как последовательность A_i фундаментальна, существует такое n, что для любых $i, j \geq n$ выполняется $d_H(A_i, A_j) < \varepsilon/2$, поэтому $A_j \subset B_{\varepsilon/2}(A_i)$. Но тогда $B_i = \cup_{j \geq i} A_j \subset B_{\varepsilon/2}(A_i)$, откуда, в силу упражнения 1.76, $C_i = \overline{B_i} \subset B_\varepsilon(A_i)$. Осталось вспомнить, что $A \subset C_i$. □

Лемма 1.87. *В сделанных выше предположениях, имеем $A \neq \emptyset$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что для натурального любого $i \geq n$ выполняется $A_i \subset B_\varepsilon(A)$.*

Доказательство. Так как последовательность A_i фундаментальна, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое n_k, что при всех $p, q \geq n_k$ выполняется $d_H(A_p, A_q) < \varepsilon/2^k$. Последовательность n_k можно выбрать строго монотонной, что мы и сделаем. Положим $n = n_1$, и пусть $n_j \leq i < n_{j+1}$. Для упрощения изложения, переопределим n_j, положив $n_j = i$. Ясно, что все сказанное выше по-прежнему имеет место.

Возьмем произвольное $a_j \in A_{n_j}$ и построим фундаментальную последовательность $a_k \in A_{n_k}$, $k \geq j$, начинающуюся с a_j. Пусть $a_k \in A_{n_k}$ уже определено. Так как $d_H\big(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}\big) < \varepsilon/2^k$, имеем $a_k \in A_{n_k} \subset B_{\varepsilon/2^k}(A_{n_{k+1}})$, поэтому существует $x \in A_{n_{k+1}}$, для которого $|a_k x| \leq \varepsilon/2^k$. Положим $a_{k+1} = x$.

Итак, мы определили последовательность a_k. Так как $|a_k a_{k+1}| \le \varepsilon/2^k$ при каждом k, эта последовательность является фундаментальной (проверьте).

В силу того, что пространство X — полное, последовательность a_k сходится к некоторому $a \in X$. Но $\{a_k, a_{k+1}, \dots\} \subset \cup_{m \ge n_k} A_m = B_{n_k}$, поэтому a — точка прикосновения для B_{n_k} и, значит, $a \in \overline{B_{n_k}} = C_{n_k}$. Так как $n_k \to \infty$ и C_p — монотонно убывающая последовательность, имеем $a \in \cap_{k=i}^{\infty} C_{n_k} = \cap_{n=1}^{\infty} C_n = A$. Отсюда, с одной стороны, вытекает, что $A \ne \emptyset$. С другой стороны, неравенство треугольника влечет

$$|a_j a| \le \sum_{k=j}^{\infty} |a_k a_{k+1}| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

поэтому $a_j \in B_\varepsilon(A)$. Так как a_j — произвольная точка из $A_{n_j} = A_i$, имеем $A_i \subset B_\varepsilon(A)$. □

Завершим доказательство теоремы. Так как $A = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ и все C_n замкнуты, множество A также замкнуто. Так как, по лемме 1.86, для некоторых ε и i выполняется $A \subset B_\varepsilon(A_i)$, а A_i — ограничено, то A — также ограничено. По лемме 1.86 множество A непусто, таким образом, собирая все сказанное только что, получаем $A \in \mathcal{H}(X)$. С другой стороны, по этим двум леммам, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого $i \ge n$ выполняется $d_H(A, A_i) \le \varepsilon$, откуда A — предел последовательности A_i. □

1.6 Компактность

Нам понадобится еще ряд утверждений про компактные метрические пространства. Напомним, что метрическое пространство X называется *вполне ограниченным*, если при каждом $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε-сеть.

Упражнение 1.88. Пусть X — вполне ограниченное метрическое пространство. Тогда из любого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

Упражнение 1.89. Пусть X — полное вполне ограниченное метрическое пространство. Тогда любая последовательность в X имеет сходящуюся подпоследовательность.

Упражнение 1.90. Метрическое пространство компактно, если и только если оно полно и вполне ограничено.

Упражнение 1.91. Метрическое пространство компактно, если и только если любая его последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 1.92. *Пространство X компактно, если и только если $\mathcal{H}(X)$ — компактно.*

Доказательство. Пусть X компактно. Докажем, что и $\mathcal{H}(X)$ компактно. По упражнению 1.90, достаточно показать, что $\mathcal{H}(X)$ полное и вполне ограниченное. Так как X — полное, то, по теореме 1.85, пространство $\mathcal{H}(X)$ тоже полное. Осталось показать, что для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathcal{H}(X)$ существует конечная ε-сеть.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, любое $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$, и пусть S — конечная ε'-сеть в X, существующая в силу компактности X. Покажем, что $\mathcal{H}(S)$ является (конечной) ε-сетью в $\mathcal{H}(X)$.

Пусть $A \in \mathcal{H}(X)$. Положим $S_A = \{s \in S : |sA| < \varepsilon'\}$. Покажем, что $S_A \in \mathcal{H}(S)$. Так как $\mathcal{H}(S)$ состоит их всех непустых подмножеств множества S, достаточно проверить, что $S_A \neq \emptyset$. Так как S является ε'-сетью в X, для каждого непустого $A \subset X$ и любой точки $a \in A$ существует такое $s \in S$, что $|sa| < \varepsilon'$, откуда $|sA| < \varepsilon'$, поэтому $s \in S_A$ и, значит, $S_A \neq \emptyset$ (даже для произвольного непустого $A \subset X$).

Покажем теперь, что $d_H(A, S_A) < \varepsilon$. По построению, $S_A \subset U_{\varepsilon'}(A)$. С другой стороны, так как S является ε'-сетью в X, для каждого $a \in A$ существует $s \in S$ такой, что $|sa| < \varepsilon'$. Но каждое такое s содержится в S_A, поэтому $A \subset U_{\varepsilon'}(S_A)$. Тем самым, $d_H(A, S_A) < \varepsilon$, и, в силу произвольности $A \in \mathcal{H}(X)$, заключаем требуемое.

Пусть теперь $\mathcal{H}(X)$ компактно. Рассмотрим в X произвольную последовательность a_i. Тогда, по упражнению 1.91, последовательность $\{a_i\}$ из $\mathcal{H}(X)$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{a_{i_k}\}$. По пункту (2) предложения 1.78, последовательность a_{i_k} точек из X сходится, тем самым, в любой последовательности a_i точек из X содержится сходящаяся подпоследовательность. Последнее, по упражнению 1.91, влечет компактность X. $\square$

Следствие 1.93 (теорема Бляшке)**.** *Метрическое пространство выпуклых компактов, содержащихся в некотором компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ (например, в шаре или кубе), компактно. Иными словами, в любой последовательности выпуклых компактов, содержащихся в X, существует подпоследовательность, сходящаяся к выпуклому компакту, также лежащему в X.*

Доказательство. По теореме 1.92, пространство $\mathcal{H}(X)$ компактно, поэтому, по пункту (2) упражнения 1.79, оно является замкнутым подмножеством пространства $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. По пункту (2) предложения 1.81, множество $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ замкнуто в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, поэтому множество $\mathcal{H}_c(X)$ выпуклых компактов, лежащих в X, равное $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}(X)$, замкнуто в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и, значит, также замкнуто в $\mathcal{H}(X)$, а, поэтому, компактно по пункту (2) упражнения 1.79. $\square$