1.4 Сходимость

Пусть X — произвольное метрическое пространство. В данном разделе мы сформулируем и докажем ряд утверждений, описывающих сходимость в пространстве $\big(\mathcal{H}(X), d_H\big)$ замкнутых ограниченных подмножеств с метрикой Хаусдорфа.

Начнем с двух простых технических упражнений.

Упражнение 1.76. Пусть A, $B \subset X$ — произвольные непустые множества, $\bar B$ — замыкание B, и $\varepsilon > 0$. Тогда если $B \subset U_\varepsilon(A)$, то $\bar B \subset U_{\varepsilon+\delta}(A)$ при каждом $\delta > 0$.

Упражнение 1.77. Пусть $A \subset X$ — непустое замкнутое множество и $x \in X$ таково, что при каждом $\varepsilon > 0$ выполняется $x \in U_\varepsilon(A)$. Тогда $x \in A$.

Предложение 1.78. *Пусть A_i, $A \in \mathcal{H}(X)$.*

(1) *Если $A_i \to A$, то $A = \{a \mid a_i \to a,\ a_i \in A_i$ при всех $i\}$.*

(2) *Пусть $A_i = \{a_i\}$ при всех i. Тогда последовательность A_i сходится, если и только если сходится последовательность a_i. При этом, если $a_i \to a$, то $A_i \to \{a\}$.*

(3) *Если $A_i \to A$, то $A = \cap_{n=1}^\infty \overline{\cup_{m\ge n} A_m}$.*

(4) *Если $A_i \to A$ и при всех i имеем $A_i \supset A_{i+1}$, то $A = \cap_i A_i$.*

(5) *Если $A_i \to A$ и при всех i имеем $A_i \subset A_{i+1}$, то $A = \overline{\cup_i A_i}$.*

Доказательство. (1) Покажем, что A содержит все предельные точки сходящихся последовательностей $a_i \in A_i$. Пусть $a_i \to a$. По определению, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое n, что для всех $i > n$ выполняется $|aa_i| < \varepsilon/2$ и $d_H(A, A_i) < \varepsilon/2$, так что $A_i \subset U_{\varepsilon/2}(A)$. Отсюда вытекает, что $a \in U_\varepsilon(A)$, поэтому, в силу упражнения 1.77, имеем $a \in A$.

Для завершения доказательства этого пункта осталось проверить, что каждая точка $a \in A$ является предельной для некоторой последовательности $a_i \in A_i$. Положим $d_i = d_H(A_i, A)$, тогда, по условию, $d_i \to 0$. По определению, при каждом i выполняется $a \in A \subset U_{d_i+1/i}(A_i)$, поэтому существует такое $a_i \in A_i$, что $|aa_i| < d_i + 1/i$. Так как $d_i + 1/i \to 0$, имеем $a_i \to a$, что и требовалось.

(2) Пусть $a_i \to a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого номера выполняется $|aa_i| < \varepsilon$, т.е. $a_i \in U_\varepsilon(a)$ и $a \in U_\varepsilon(a_i)$, следовательно, $d_H\big(\{a\}, \{a_i\}\big) \le \varepsilon$ и, значит, $\{a_i\} \to \{a\}$. Обратно, если $A_i \to A$, то, в силу пункта (1), множество A состоит из всех a, являющихся пределами последовательностей вида $x_i \in A_i$. Но у нас имеется ровно одна такая последовательность: $x_i = a_i$. Поэтому, так как A не пусто, a_i сходится, скажем, к некоторому a. В силу единственности предела в метрическом пространстве, $A = \{a\}$.

(3) Покажем сначала, что $A \subset \cap_{n=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\ge n}A_m}$. В соответствии с пунктом (1), для каждого $a\in A$ существует последовательность $a_m\in A_m$, сходящаяся к a. Но для каждого $n\in\mathbb{N}$ сходящаяся к a последовательность $a_n, a_{n+1}, a_{n+2},\ldots$ лежит в $\cup_{m\ge n}A_m$, поэтому $a\in\overline{\cup_{m\ge n}A_m}$. Так как это выполняется при каждом n, заключаем, что $a\in\cap_{n=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\ge n}A_m}$.

Обратно, пусть $a\in\cap_{n=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\ge n}A_m}$, т.е. a принадлежит всем множествам $\overline{\cup_{m\ge n}A_m}$. Так как $A_m\to A$, для любого $\varepsilon>0$ существует n такое, что при каждом $m\ge n$ выполняется $A_m\subset U_{\varepsilon/2}(A)$, откуда $\cup_{m\ge n}A_m\subset U_{\varepsilon/2}(A)$ и, по упражнению 1.76, имеем $\overline{\cup_{m\ge n}A_m}\subset U_\varepsilon(A)$. Следовательно, $a\in U_\varepsilon(A)$ при всех $\varepsilon>0$. Осталось применить упражнение 1.77.

(4) Так как $A_{i+1}\subset A_i$ при каждом i, имеем $\cup_{m=n}^{\infty}A_m=A_n$. Так как все A_i замкнуты, получаем $\overline{\cup_{m\ge n}A_m}=A_n$, поэтому, в силу пункта (3), имеем $A=\cap_{n=1}^{\infty}\overline{\cup_{m\ge n}A_m}=\cap_{n=1}^{\infty}A_n$.

(5) Так как $A_i\subset A_{i+1}$ при каждом i, имеем $\overline{\cup_{m\ge n}A_m}=\overline{\cup_{i\ge 1}A_i}$, откуда, в силу пункта (3), имеем $A=\overline{\cup_{i\ge 1}A_i}$. $\square$

В следующем предложении усиливаются пункты (4) и (5) предложения 1.78 в случае, когда элементы последовательности являются компактами. Предварительно приведем необходимые результаты.

Упражнение 1.79. Докажите следующие утверждения.

(1) Каждое компактное подмножество метрического пространства замкнуто.

(2) Всякое замкнутое подмножество компактного метрического пространства компактно.

(3) Пусть последовательность $A_1\supset A_2\supset\cdots$ подмножеств метрического пространства X состоит из непустых компактов, тогда $A=\cap A_i$ — непустой компакт.

(4) Пусть A — компакт в метрическом пространстве X, тогда в каждой последовательности a_i, лежащей в A, существует сходящаяся подпоследовательность, и ее предел также лежит в A.

Предложение 1.80. *Пусть A_i, $A\in\mathcal{H}(X)$.*

(1) *Пусть дана последовательность $A_1\supset A_2\supset\cdots$ подмножеств метрического пространства X. Если все A_i являются непустыми компактами, эта последовательность сходится к непустому компакту $A=\cap A_i$. В частности, последнее условие имеет место в случае, когда пространство X компактно, а $A_i\subset X$ непусты.*

(2) *Пусть дана последовательность $A_1\subset A_2\subset\cdots$ подмножеств метрического пространства X. Если множество $A=\overline{\cup_{i=1}^{\infty}A_i}$ является компактом, то последовательность A_i сходится к A. В частности, последнее условие имеет место в случае, когда пространство X компактно.*

Доказательство. (1) По пункту (3) упражнения 1.79, $A = \cap_i A_i$ — непустой компакт. Покажем, что $A_i \to A$.

Предположим противное. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, без ограничения общности будем считать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $d_H(A_n, A) > \varepsilon$ при всех n. Последнее означает, что при каждом n существует $a_n \in A_n$ такая, что $a_n \notin U_\varepsilon(A)$. Так как последовательность a_n лежит в компакте A_1, то, по пункту (4) упражнения 1.79, в этой последовательности существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторому $a \in A_1$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности будем считать, что для всех n выполняется $a_n \notin U_\varepsilon(A)$. С другой стороны, при всех $i \ge n$ все a_i лежат в A_n, поэтому $a \in A_n$. Следовательно, $a \in \cap_n A_n = A$, противоречие. Вторая часть этого пункта получается с очевидным применением пункта (2) упражнения 1.79.

(2) Доказательство этого пункта ровно такое же, как и у предыдущего, и оставляется в качестве упражнения. □

Наконец, в случае $X = \mathbb{R}^n$ мы разберем ситуацию, когда элементы сходящейся последовательности выпуклы.

Предложение 1.81. *Пусть A_i, $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.*

(1) *Пусть все A_i выпуклы. Если $A_i \to A$, то A выпукло.*

(2) *Множество $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ замкнуто в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. (1) Пусть a и b — произвольные точки из A. В силу пункта (1) предложения 1.78, существуют последовательности $a_i \in A_i$ и $b_i \in A_i$ такие, что $a_i \to a$ и $b_i \to b$. Так как все A_i выпуклы, для любого $t \in [0,1]$ имеем $(1-t)a_i + t\,b_i \in A_i$. Кроме того, последовательность $(1-t)a_i + t\,b_i \in A_i$ сходится к $(1-t)a + t\,b$. По пункту (1) предложения 1.78, точка $(1-t)a + t\,b$ содержится в A и, в силу произвольности t, a и b, множество A выпукло.

(2) Пусть $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ — точка прикосновения для $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует последовательность $A_i \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$, сходящаяся к A. Но, по пункту (1), множество A выпукло и, значит, $A \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^n)$. □

Говорят, что последовательность множеств $A_i \in \mathcal{H}(X)$ *сходится по Куратовскому к множеству* $A \in \mathcal{H}(X)$, если A состоит из пределов всех сходящихся "полных" последовательностей $a_i \in A_i$, и каждая сходящаяся "частичная" последовательность $a_{n_k} \in A_{n_k}$ сходится к одной из точек множества A.

Следствие 1.82. *Если последовательность $A_n \in \mathcal{H}(X)$ сходится в $A \in \mathcal{H}(X)$ по Хаусдорфу, то она сходится к A по Куратовскому. Если пространство X компактно, то верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть последовательность A_n сходится к A по Хаусдорфу. В силу пункта 1 предложения 1.78, множество A состоит в точности из тех $a \in A$, для которых существуют последовательности $a_i \in A_i$ такие, что

$a_i \to a$. Пусть теперь $a_{n_k} \in A_{n_k}$ — “частичная” последовательность, сходящаяся к некоторому a. По пункту 3 предложения 1.78, $A = \cap_{n=1}^{\infty}\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m}$, поэтому для каждого n некоторый “хвост” последовательности $a_{n_k} \in A_{n_k}$ лежит в $\cup_{m=n}^{\infty} A_m$ и, поэтому, $a \in \overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m}$, откуда $a \in \cap_{n=1}^{\infty}\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m} = A$. Таким образом, последовательность A_n сходится к A по Куратовскому.

Пусть теперь X компактно. Докажем обратное утверждение рассуждениями от противного. Предположим, что A_n сходится к A по Куратовскому, но при этом не сходится к A по Хаусдорфу. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для некоторой бесконечной последовательности A_{n_k} выполняется $d_H(A_{n_k}, A) \ge \varepsilon$. Последнее означает, что для некоторой бесконечной подпоследовательности $A_{n_{k(i)}}$ последовательности A_{n_k} при каждом i выполняется по крайней мере одно из двух: или $U_\varepsilon(A)$ не содержит $A_{n_{k(i)}}$, или $U_\varepsilon\big(A_{n_{k(i)}}\big)$ не содержат A. Без ограничения общности будем считать, что одно из этих свойств выполняется для всей последовательности A_{n_k}.

Пусть имеет место первое свойство, тогда существуют такие точки $a_{n_k} \in A_{n_k}$, которые лежат вне $U_\varepsilon(A)$. Так как X компактно, выбранная последовательность точек содержит сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность a_{n_k} сходится к некоторому a. Однако, по определению сходимости по Куратовскому, a должно лежать в A, противоречие с тем, что все a_{n_k} лежат вне открытого $U_\varepsilon(A)$, являющегося также окрестностью точки a.

Пусть теперь выполняется второе свойство. Тогда существуют такие точки $b_{n_k} \in A$, что $b_{n_k} \notin U_\varepsilon(A_{n_k})$ при всех k. Так как X компактно, выбранная последовательность точек содержит сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность b_{n_k} сходится к некоторому b. Так как A — замкнуто, имеем $b \in A$. С другой стороны, по определению сходимости по Куратовскому, существует последовательность $a_n \in A_n$, сходящаяся к b. Это означает, что, начиная с некоторого n, точка b лежит в $U_{\varepsilon/2}(A_n)$. Так как $b_{n_k} \to b$, то, начиная с некоторого k, все b_{n_k} лежат в $U_{\varepsilon/2}(b)$. Поэтому для таких k выполняется $b_{n_k} \in U_\varepsilon(A_{n_k})$, противоречие с выбором последовательности b_{n_k}. □

Упражнение 1.83. Можно ли в обратном утверждении следствия 1.82 отбросить требование компактности пространства X?