Пару $\{A, B\}$ различных множеств из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A, B)$, назовем *конфигурацией*, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \ge r$ (равносильное условие: если для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|aB| = |Ab| = r$). Конфигурация $\{A, B\}$ называется *конечной*, если A и B имеют конечное число элементов, иначе конфигурация $\{A, B\}$ называется *бесконечной*.

Для дальнейшего также будет удобно ввести следующее обозначение. Пусть A и B — произвольная пара множеств из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. Для каждого вещественного s обозначим через $N_s(A, B)$ количество различных множеств из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, находящихся между A и B в s-положении. Отметим, что если $r = d_H(A, B)$, то при $s \notin [0, r]$ имеем $N_s(A, B) = 0$. Кроме того, $N_0(A, B) = N_r(A, B) = 1$. При оставшихся $s \in (0, r)$ число $N_s(A, B)$ может быть как конечным, так и равным ∞. Ниже мы будем изучать свойства функции $N_s(A, B)$.

Пример 1.59. Пусть A и B — одноточечные множества, тогда они образуют конечную конфигурацию, и, как было отмечено выше, при каждом $s \in \big[0, |AB|\big]$ множество C_s состоит из одного элемента, поэтому при таких s имеем $N_s(A, B) = 1$.

Пример 1.60. Рассмотрим на евклидовой плоскости правильный $2k$-угольник со стороной 1, и пусть A — множество вершин этого многоугольника, взятых через одну, а B — множество оставшиеся вершин. Тогда $d_H(A, B) = 1$, и при каждом $s \in (0, 1)$ множество C_s состоит из $2k$ точек $c_1, \dots, c_{2k}$ (мы нумеруем эти точки последовательно при одном из двух обходов многоугольника). Легко видеть, что имеется более одного множества C, находящегося между A и B в s-положении, например, $C = C_s \setminus \{c_i\}$, или $C = C_s \setminus \{c_1, c_3, \dots, c_{2k-1}\}$.

Упражнение 1.61. Докажите, что при $s \in (0, 1)$ и $k = 3$ в приведенном примере $N_s(A, B) = 18$. Вычислите $N_s(A, B)$ при остальных k.

Имеет место следующее тривиальное наблюдение.

Предложение 1.62. *В любой конечной конфигурации $\{A, B\}$ при каждом $s \in \big[0, d_H(A, B)\big]$ множество C_s состоит из конечного числа точек, так что для таких A, B и s имеем $N_s(A, B) < \infty$.*

Пример 1.63 (Бесконечная конфигурация с единственным множеством в каждом фиксированном положении)**.** Пусть A и B — две не совпадающие концентрические окружности радиусов $r_A > r_B$ соответственно на евклидовой плоскости. Тогда $r = d_H(A, B) = r_A - r_B$ и при каждом $s \in [0, r]$ множество C_s представляет собой окружность, концентрическую с A и B и имеющую радиус $r_A - s$. Пусть C — произвольное замкнутое подмножество C_s, не совпадающее с C_s. Тогда в C_s существует точка x, не принадлежащая C и, в силу замкнутости C, не являющаяся точкой прикосновения для C, т.е. при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется $|xC| > \varepsilon$. Но тогда A не содержится в $B_{s+\delta}(C)$ при достаточно малых δ, так что $d_H(A, C) > s$. Таким образом, в приведенном примере при каждом s имеем $N_s(A, B) = 1$.

Упражнение 1.64. Выясните, когда для двух отрезков A и B на евклидовой плоскости, $r = d_H(A,B)$, при каждом $s \in [0,r]$ выполняется $N_s(A,B) = 1$. Аналогичный вопрос про $N_s(A,B) < \infty$.

Пример 1.65. Приведем пример бесконечной конфигурации $\{A,B\}$, для которой $N_s(A,B) = \infty$. Таким образом, условие того, что пара образует конфигурацию, не является достаточным для конечности числа промежуточных множеств в одном и том же положении.

Пусть A — подмножество евклидовой плоскости, состоящее из окружности радиуса 2 и ее центра, а B — окружность с тем же центром, но радиуса 1. Тогда $d_H(A,B) = 1$ и при каждом $s \in (0,1)$ множество C_s состоит из двух окружностей C' и C''. Пусть C' — меньшая из этих окружностей, и x — ее произвольная точка. Тогда каждое множество $C = C'' \cup \{x\}$ содержится в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и находится в s-положении между A и B.

Следующий результат, впрочем, в несколько другой формулировке и с достаточно странным доказательством, можно найти в [8].

Теорема 1.66. *Пусть $\{A,B\}$ — конфигурация, $r = d_H(A,B)$. Тогда функция $f(s) = N_s(A,B)$ постоянна на $(0,r)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что при каждом $s \in (0,r)$ выполняется

$$C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B) = \bigcup_{a\in A,\, b\in B} \big(B_s(a) \cap B_{r-s}(b)\big).$$

Так как при всех $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \ge r$, то каждое множество $C_s(a,b) := B_s(a) \cap B_{r-s}(b)$ или пусто (при $|ab| > r$), или состоит из одной точки (при $|ab| = r$). Таким образом, множество $C_s(a,b)$ пусто при некотором s, если и только если оно пусто при любом $s \in (0,r)$.

Далее, обозначим через M множество всех пар (a,b), для которых $|ab| = r$. Тогда условие $(a,b) \in M$ равносильно тому, что $C_s(a,b)$ непусто при всех s, а условие $(a,b) \notin M$ равносильно тому, что $C_s(a,b)$ пусто при всех s. Единственный элемент множества $C_s(a,b)$ при $(a,b) \in M$ обозначим через $c_s(a,b)$.

Определим отображения $\mu_s\colon M \to C_s$, положив $\mu_s\colon (a,b) \mapsto c_s(a,b)$. Так как $C_s = \cup_{(a,b)\in M} C_s(a,b)$, то все отображения μ_s являются сюръекциями.

Лемма 1.67. *Пусть (a_1,b_1) и (a_2,b_2) — два различных элемента из M, тогда $c_s(a_1,b_1) \ne c_s(a_2,b_2)$ при каждом $s \in (0,r)$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда отрезки $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$, имеющие одну и ту же длину r, пересекаются, но не совпадают. Возможны два случая.

(1) Эти отрезки лежат на одной прямой. Тогда или a_2, или b_2 принадлежит интервалу (a_1,b_1). Пусть, без ограничения общности, это точка a_2. Но тогда $|a_2b_1| < r$ — противоречие с определением конфигурации.

(2) Пусть теперь рассматриваемые отрезки не лежат на одной прямой. Тогда они пересекаются по точке $c = c_s(a_1, b_1) = c_s(a_2, b_2)$, которая является точкой пересечения диагоналей равнобочной трапеции $a_1a_2b_1b_2$, поэтому $|a_1b_2| < |a_1b_1| = r$ — снова получили противоречие с определением конфигурации. $\square$

Лемма 1.67, вместе со сделанным выше замечанием, доказывают, что при каждом $s \in (0, r)$ отображение μ_s является биекцией. В частности, все множества C_s, $s \in (0, r)$, равномощны между собой и имеют ту же мощность, что и множество M.

Лемма 1.68. *Пусть $s \in (0, r)$ и $c \in C_s$. Положим $\mu_s^{-1}(c) = \{(a, b)\}$. Тогда $B_s(c) \cap A = \{a\}$ и $B_{r-s}(c) \cap B = \{b\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Без ограничения общности, будем считать, что $B_s(c) \cap A$ содержит $a' \neq a$. Но тогда $|a'b| < |ab| \le r$, что противоречит определению конфигурации. $\square$

Для завершения доказательства теоремы, выясним, какие из подмножеств C множества C_s расположены между A и B. Так как $C \subset B_s(A)$ и $C \subset B_{r-s}(B)$, то C находится между A и B, если и только если $A \subset B_s(C)$ и $B \subset B_{r-s}(C)$, т.е. если для каждой точки из $a \in A$ существует $c \in C$ такая, что $a \in B_s(c)$ (аналогично, для точек из B).

Обозначим через π_A естественную проекцию множества M на A, т.е. $\pi_A\colon (a, b) \mapsto a$; аналогично, пусть π_B обозначает естественную проекцию множества M на B. По лемме 1.68, для каждого $c \in C_s$ имеем $B_s(c) \cap A = \pi_A\big(\mu_s^{-1}(c)\big)$, поэтому тот факт, что для каждой точки из $a \in A$ существует $c \in C$, для которой $a \in B_s(c)$, эквивалентен условию $\pi_A\big(\mu_s^{-1}(C)\big) = A$, т.е. сюръективности ограничения проекции π_A на $\mu_s^{-1}(C)$. Аналогично, соответствующее условие для B равносильно сюръективности ограничения проекции π_B на $\mu_s^{-1}(C)$. Итак, количество $N_s(A, B)$ различных $C \subset C_s$, находящихся в s положении между A и B, равно количеству подмножеств множества M, проекции которых на A и B сюръективны. Но последнее условие не зависит от s. $\square$

Исходя из теоремы 1.66, для каждой конечной конфигурации $\{A, B\}$ определим $N(A, B)$ равным $N_s(A, B)$ для произвольного $s \in \big(0, d_H(A, B)\big)$. Возникает естественный вопрос: чему могут быть равны числа $N(A, B)$? Имеет место удивительная теорема, доказанная в [8] и имеющая приложения в теории графов.

Теорема 1.69. *Для каждого натурального числа m, $1 \le m \le 36$, кроме $m = 19$, существует конечная конфигурация $\{A, B\}$, для которой $N(A, B) = m$. Не существует ни конечной, ни бесконечной конфигурации, для которой $N(A, B) = 19$.*

Оказывается, теорема 1.69 приводит к нетривиальному результату теории графов. Напомним, что *графом* G называется пара (V, E), где V —

произвольное множество, элементы которого называются *вершинами графа* G, а E — некоторое семейство, состоящее из неупорядоченных пар вершин. Элементы из E называются *ребрами графа* G. Если v и w — входящие в ребро вершины, то такое ребро принято обозначать через vw. Ребра вида vv называются *петлями*, а ребра, встречающиеся в E более одного раза — *кратными ребрами*. Граф без петель и кратных ребер называется *простым*, а граф, в котором V и E — конечные множества, — *конечным*.

Важный для нас пример графа порождается каждой конфигурацией $\{A,B\}$: а именно, если $r=d_H(A,B)>0$ и M, как и выше, — множество всех пар (a,b), $a\in A$, $b\in B$, $|ab|=r$, то положим $V:=A\cup B$, $E:=M$, тогда пара (V,E) является графом, который мы будем обозначать через $G(A,B)$ и называть *графом конфигурации*. Так как $A\cap B=\emptyset$ по определению конфигурации, то граф $G(A,B)$ простой. Для конечной конфигурации граф $G(A,B)$ — простой и конечный.

Простой граф $G=(V,E)$ называется *двудольным*, если множество V можно разбить на два непустых подмножества V_1 и V_2, называемых *долями графа* G так, что у каждого ребра $e\in E$ одна из входящих в него вершин содержится в V_1, а другая — в V_2. Отметим, что граф каждой конфигурации (как конечной, так и бесконечной) является двудольным. Для двудольного графа определены естественные проекции $\pi_i\colon E\to V_i$: если $e=\{v_1,v_2\}$, где $v_i\in V_i$, то $\pi_i\colon e\mapsto v_i$.

Определим *реберное покрытие произвольного графа* $G=(V,E)$ как такое семейство $E'\subset E$ ребе этого графа, что каждая вершина графа содержится в некотором ребре семейства E'. Отметим, что для двудольного графа с $V=V_1\sqcup V_2$ семейство $E'\subset E$ является покрытием, если и только если ограничения проекций π_i на E' сюръективны. Таким образом, в обозначениях доказательства теоремы 1.66, множество $C\subset C_s$ находится в s-положении, если и только если $\mu_s^{-1}(C)$ является реберным покрытием графа $G(A,B)$, так что $N(A,B)$ — число различных реберных покрытий графа $G(A,B)$.

Пусть $G=(V,E)$ и $H=(W,F)$ — два простых графа. Отображение $\varphi\colon V\to W$ называется *изоморфизмом графов G и H*, если φ биективно, и $uv\in E$ тогда и только тогда, когда $\varphi(u)\varphi(v)\in F$.

Предложение 1.70. *Пусть $G=(V,E)$ — конечный двудольный граф с долями V_1 и V_2, имеющий хотя бы одно реберное покрытие. Тогда существует такое натуральное n и такое вложение $\nu\colon V\to\mathbb{R}^n$, что $\big\{\nu(V_1),\nu(V_2)\big\}$ — конфигурация, и ν является изоморфизмом графов G и $G\big(\nu(V_1),\nu(V_2)\big)$.*

Доказательство. Пусть $V_1=\{a_1,\dots,a_p\}$, $V_2=\{b_1,\dots,b_q\}$. Положим $n=p+q$. Пусть e_i обозначает i-й базисный вектор стандартного базиса в R^n, и пусть $\nu(a_i)=e_i$.

Для каждого $j\in\{1,\dots,q\}$ обозначим через I_j множество всех таких i, что $a_ib_j\in E$, и пусть $|I_j|$ — количество элементов во множестве I_j. Положим $N=1+\max_j|I_j|$, $m_j=N-|I_j|$ и для каждого $j\in\{1,\dots,q\}$ пусть

$$\nu(b_j)=\sqrt{m_j}e_{p+j}+\sum_{i\in I_j}e_i.$$

Если $a_ib_j \in E$, то $i \in I_j$ и, значит, $\bigl|\nu(a_i)\nu(b_j)\bigr|^2 = m_j + |I_j| - 1 = N - 1$. Если же $a_ib_j \notin E$, то $i \notin I_j$ и, значит, $\bigl|\nu(a_i)\nu(b_j)\bigr|^2 = m_j + |I_j| + 1 = N + 1$. Так как граф G имеет хотя бы одно реберное покрытие, для каждого $a_i \in V_1$ и каждого $b_j \in V_2$ имеем $\bigl|\nu(a_i)\nu(V_2)\bigr| = \bigl|\nu(b_j)\nu(V_1)\bigr| = \sqrt{N-1}$, поэтому $\bigl\{\nu(V_1), \nu(V_2)\bigr\}$ — конечная конфигурация. То, что ν является изоморфизм графов G и $G\bigl(\nu(V_1), \nu(V_2)\bigr)$ — очевидно из построения. □

Из теоремы 1.69 и предложения 1.70 мгновенно получаем следующий результат, который будет доказан в [7].

Следствие 1.71. *Не существует двудольного графа, имеющего ровно* 19 *реберных покрытий.*

Обобщим построенное в доказательстве теоремы 1.66 отображение μ_s на произвольную пару множеств A и B из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, что даст нам возможность полностью описать все множества $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, находящиеся в s-положении между A и B.

Итак, пусть $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A,B)$, $s \in [0,r]$ и $C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$. Обозначим через M множество всех пар (a,b), $a \in A$, $b \in B$, таких, что $|ab| \le r$, а через π_A и π_B — естественные проекции множества M на A и B. Пусть $\mu_s\colon M \to \mathcal{H}(C_s)$ определено так: $\mu\colon (a,b) \mapsto B_s(a) \cap B_{r-s}(b)$. Образ отображения μ_s обозначим через $\mathcal{H}_{\mathrm{crit}}(C_s)$. Для каждого множества $C \subset C_s$ определим его *критическую s-оболочку* $[C]_s$ так:

$$[C]_s = \{C' \in \mathcal{H}_{\mathrm{crit}}(C_s) \mid C' \cap C \ne \emptyset\}.$$

Наконец, положим $M_C = \mu^{-1}\bigl([C]_s\bigr) \subset M$.

Следующая теорема доказывается точно так же, как и теорема 1.66.

Теорема 1.72. *Пусть $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A,B)$, $s \in [0,r]$ и $C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$. Тогда $C \subset C_s$ находится в s-положении, если и только если ограничения проекций π_A и π_B на M_C сюръективны.*

Покажем, как работает теорема 1.72.

Пример 1.73. Пусть $A = \{0,3\}$ и $B = \{1\}$ — два конечных подмножества евклидовой прямой $\mathbb{R}$. Тогда $r = d_H(A,B) = 2$, $M = \bigl\{(0,1),\,(3,1)\bigr\}$ и π_A биективно. Положим $s = 1$. Имеем $C_s = [0,1] \cup \{2\}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{crit}}(C_s) = \bigl\{[0,1],\,\{2\}\bigr\}$. В силу биективности π_A, существует единственное M_C, ограничения на которое проекций π_A и π_B сюръективно, а именно, $M_C = M$, поэтому, в силу теоремы 1.72, замкнутое непустое множество $C \subset C_s$ находится в s-положении, если и только если $2 \in C$ и $C \cap [0,1] \ne \emptyset$.

Опишем теперь, как выглядят другие элементарные объекты геометрии Хаусдорфа, например прямые, шары и сферы. Приведем соответствующие определения.

Пусть X — метрическое пространство. Для произвольной пары различных A и B из $\mathcal{H}(X)$ подмножество $\ell(A,B) \subset \mathcal{H}(X)$ такое, состоящее из всех

$C \in \mathcal{H}(X)$, для которых одно из A, B, C лежит между двумя другими, назовем *хаусдорфовой прямой, проходящей через A и B*.

Далее, пусть $A \in \mathcal{H}(X)$ и $\varepsilon > 0$. Положим

$$U_\varepsilon^H(A) = \big\{B \in \mathcal{H}(X) : d_H(A,B) < \varepsilon\big\},$$
$$B_\varepsilon^H(A) = \big\{B \in \mathcal{H}(X) : d_H(A,B) \le \varepsilon\big\},$$
$$S_\varepsilon^H(A) = \big\{B \in \mathcal{H}(X) : d_H(A,B) = \varepsilon\big\},$$

и назовем полученные множества *открытым шаром*, *замкнутым шаром*, *сферой радиуса ε с центром в A*.

Следующие упражнения являются теоремами из [8].

Упражнение 1.74. Пусть $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ — различные одноточечные подмножества $\mathbb{R}^n$, а $\ell(A,B)$ — проходящая через них хаусдорфова прямая. Обозначим через ab евклидову прямую, проходящую через a и b. Докажите, что $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ лежит на $\ell(A,B)$, если и только если существуют такие s, $t \in \mathbb{R}$, что

(1) $C \subset B_s(A) \cap B_t(B)$;

(2) множество $C \cap \partial B_s(A) \cap \partial B_t(B) \cap ab$ непусто.

Упражнение 1.75. Пусть $A = \{a\}$ — одноточечное множество. Проверьте, что

- $U_\varepsilon^H(A)$ — множество всех $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $B \subset U_\varepsilon(a)$;
- $B_\varepsilon^H(A)$ — множество всех $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $B \subset B_\varepsilon(a)$;
- $S_\varepsilon^H(A)$ — множество всех $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $B \subset B_\varepsilon(a)$ и $B \cap S_\varepsilon(a) \ne \emptyset$.