1.3 Случай евклидова пространства

В качестве наглядной иллюстрации мы опишем некоторые свойства функции d_H в случае, наиболее интересном для приложений, а именно, когда объемлющее метрическое пространство — это стандартное евклидово пространство.

Напомним, что замкнутые ограниченные подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ являются компактными. Отсюда, и из упражнений 1.7 и 1.13, вытекает следующий результат.

Предложение 1.33. *Для каждого $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и любого неотрицательного ε множество $B_\varepsilon(A)$ замкнуто и ограничено, т.е. $B_\varepsilon(A) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.*

Замечание 1.34. Напомним, что метрическое пространство называется *ограниченно компактным*, если каждое его замкнутое ограниченное подмножество — компакт. Ясно, что в предложении 1.33 можно заменить $\mathbb{R}^n$ на любое ограниченно компактное пространство.

В случае $\mathbb{R}^n$ замечание 1.19 уже не имеет места.

Предложение 1.35. *Для A, $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ положим $r = d_H(A,B)$, тогда $A \subset B_r(B)$ и $B \subset B_r(A)$.*

Доказательство. Предположим противное, и, без ограничения общности, пусть существует $a \in A$ такое, что $a \notin B_r(B)$. Так как $B_r(B)$ — компакт, имеем $s = |a\,B_r(B)| > 0$, поэтому $B_{r+s/2}(B) \not\ni a$, противоречие с тем, что $r = d_H(A,B)$. □

Следствие 1.36. *Для любых A, $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $r \ge 0$ следующие утверждения равносильны*:

(1) $d_H(A,B) \le r$;

(2) $A \subset B_r(B)$ *и* $B \subset B_r(A)$.

Замечание 1.37. Предложение 1.35 и следствие 1.36 имеют место в любом ограниченно компактном пространстве (доказательство в точности такое же).

Упражнение 1.38. Верно ли, что предложение 1.35 и следствие 1.36 имеют место в произвольном полном метрическом пространстве?

Теорема 1.39 (см. [3])**.** *Для каждого $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$d_H\big(A, B_\varepsilon(A)\big) = \varepsilon.$$

Более того, если для некоторого $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ выполняется $d_H(A,B) \le \varepsilon$, то $B \subset B_\varepsilon(A)$.

Доказательство. Так как $B_\varepsilon(A) \subset B_\varepsilon(A)$ и $A \subset B_\varepsilon(A) \subset B_\varepsilon\big(B_\varepsilon(A)\big)$, то $d_H\big(A, B_\varepsilon(A)\big) \le \varepsilon$. Покажем теперь, что $d_H\big(A, B_\varepsilon(A)\big) \ge \varepsilon$.

Если A состоит из одной точки, то все очевидно. Пусть теперь A имеет не менее двух точек. Обозначим через $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ расстояние $|x|$ от точки x до начала координат 0. Функция $\rho(x)$ непрерывна, поэтому $\rho|_A$ достигает максимума в некоторой точке $a \in A$. Ясно, что $A \subset B_{|a|}(0)$.

Так как A неодноточечно, $a \ne 0$. Положим $b = a + \varepsilon\, a/|a|$. По условию, $b \in B_\varepsilon(A)$. Кроме того, $\rho(b) = |a| + \varepsilon$. Заметим, что при каждом $\delta < \varepsilon$ имеем $B_\delta(A) \subset B_{|a|+\delta}(0) \not\ni b$, поэтому $B_\varepsilon(A) \not\subset B_\delta(A)$ и, значит, $d_H\big(A, B_\varepsilon(A)\big) \ge \delta$. В силу произвольности δ заключаем, что $d_H\big(A, B_\varepsilon(A)\big) \ge \varepsilon$. Таким образом, мы доказали первую часть предложения.

Пусть теперь $s = d_H(A, B) \le \varepsilon$. По предложению 1.35, имеем $B \subset B_s(A) \subset B_\varepsilon(A)$, что и требовалось. $\square$

Теорема 1.39 фактически говорит о том, что $B_\varepsilon(A)$ — это наибольшее по включению множество среди тех, которые удалены от A не более чем на ε.

Замечание 1.40. Первое утверждение теоремы 1.39 перестает быть верным, если отказаться от ограниченности множества A. Действительно, положим $A = \mathbb{R}^n \setminus U_{\varepsilon/2}(0)$, тогда $d_H\big(A, B_\varepsilon(A)\big) = d_H(A, \mathbb{R}^n) = \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Замечание 1.41. Также первое утверждение теоремы 1.39 не имеет места в любом ограниченном метрическом пространстве: достаточно в качестве ε взять любое число, большее диаметра этого пространства, тогда хаусдорфово расстояние между любыми A и B будет меньше ε, в частности, $d_H\big(A, B_\varepsilon(A)\big) < \varepsilon$.

Замечание 1.42. Второе утверждение теоремы 1.39 не имеет места уже в $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Действительно, положим $A = (0, 1]$, тогда A замкнуто в X, и $B_1(A) = (-1, 2] \setminus \{0\}$. Пусть $B = [-1, 2]$, тогда $d_H(A, B) = 1$, но $B \not\subset B_1(A)$.

1.3.1 Свойство “лежать между”

Напомним, что в евклидовом пространстве *точка c лежит между точками a и b*, если $|ab| = |ac| + |cb|$. Отметим, что это определение дословно переносится на точки любого метрического пространства, в частности, пространства $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.43 (см. [4])**.** *Для любых A, $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A, B)$, при каждом $s \in [0, r]$ множество $C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$ содержится в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и лежит между A и B, причем $d_H(A, C_s) = s$ и $d_H(B, C_s) = r - s$.*

Доказательство. Покажем, что множество C_s не пусто. По определению хаусдорфова расстояния, для каждой точки $a \in A$ имеем $|aB| \le r$, и так как B — компакт, существует $b \in B$, для которой $|ab| = |aB|$. Так как $|ab| \le r$, замкнутые круги $B_s(a)$ и $B_{r-s}(b)$ пересекаются, но $C_s \supset B_s(a) \cap B_{r-s}(b) \ne \emptyset$, значит, $C_s \ne \emptyset$. Далее, C_s является замкнутым и ограниченным множеством как пересечение замкнутых ограниченных множеств. Таким образом, $C_s \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Покажем теперь, что $d_H(A, C_s) = s$ и $d_H(B, C_s) = r - s$. Для этого достаточно проверить, что $d_H(A, C_s) \le s$ и $d_H(B, C_s) \le r - s$, так как $d_H(A, B) = r$ и d_H удовлетворят неравенству треугольника. Докажем, что $d_H(A, C_s) \le s$ (второе неравенство получается ровно так же).

Так как $C_s \subset B_s(A)$, достаточно проверить, что $A \subset B_s(C_s)$. Рассмотрим произвольное $a \in A$ и покажем, что $a \in B_s(C_s)$. Как было показано выше, существует $b \in B$ такое, что $|ab| \le r$. Но тогда на отрезке $[a, b]$ существует точка c, для которой $|ac| \le s$ и $|bc| \le r - s$, поэтому $c \in B_s(a) \cap B_{r-s}(b) \subset C_s$ и, значит, $a \in B_s(c) \subset B_s(C_s)$. □

Из теоремы 1.43 и теоремы 1.39 вытекает следующий результат.

Следствие 1.44. *Пусть A и B — произвольные множества из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A, B)$. Тогда каждое множество $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, находящееся между A и B и расположенное на расстоянии s от A, содержится в $C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$.*

Доказательство. По теореме 1.39, каждое такое C лежит в $B_s(A)$ и в $B_{r-s}(B)$, а, значит, и в их пересечении C_s. □

Определение 1.45. Будем говорить, что множество $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *находится в s-положении между множествами A и B из* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, если C лежит между A и B на расстоянии s от A.

В силу следствия 1.44, множество $C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$, где $r = d_H(A, B)$ и $s \in [0, r]$, является *максимальным множеством, находящимся в s-положении между множествами A и B.*

Пример 1.46. Возьмем в качестве A и B одноточечные множества. Тогда при каждом s множество C_s состоит из одной точки, и эта точка лежит на отрезке $[A, B]$. Таким образом, множество всех элементов из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, лежащих между одноточечными множествами A и B, — это, в точности, отрезок $[A, B]$. Заметим также, что в этом случае для любых $0 \le p \le q \le |AB|$ и любых множеств $P \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ таких, что первое из них находится между A и B в p-положении, а второе — в q-положении (эти множества определены однозначно и являются соответствующими точками), имеем $d_H(P, Q) = q - p$.

Упражнение 1.47. Верно ли, что если C_p и C_q — максимальные множества, находящиеся соответственно в p- и q-положениях между произвольными A и B из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, то $d_H(C_p, C_q) = |p - q|$?

Замечание 1.48. Утверждение, обратное к следствию 1.44, вообще говоря, не имеет места, т.е. не верно, что каждое непустое замкнутое подмножество, лежащее в C_s, расположено между A и B. В качестве примера рассмотрим два отрезка $A = [0, 2]$ и $B = [3, 5]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, тогда $d_H(A, B) = 3$. Возьмем $s = 1.5$, тогда $C_s = [1.5, 3.5]$. Пусть $C = \{2.5\} \in C_s$. Тогда $d_H(A, C) = d_H(B, C) = 2.5$, так что $d_H(A, C) + d_H(B, C) > d_H(A, B)$.

Замечание 1.49. Вообще говоря, между данными A и B из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ может лежать более одного (даже бесконечно много) множеств на одном и том же расстоянии от A. В качестве примера рассмотрим те же A, B и s, что и в замечании 1.48, а в качестве C возьмем произвольное замкнутое подмножество отрезка $C_s = [1.5, 3.5]$, содержащее границу $\partial C_s = \{1.5, 3.5\}$ этого отрезка. Тогда все такие C находятся в s-положении между A и B, так как $d_H(A, C) = d_H(B, C) = 1.5 = s$. Тем самым, мы видим, что промежуточная точка неединственна.

Замечание 1.50. Изобилие таких примеров привело к тому, что в [5] был сформулирован и неправильно доказан следующий результат: *пусть $A \neq B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A, B) > 0$, $s \in (0, r)$, $C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$ и C — произвольное замкнутое подмножество в C_s, содержащее границу ∂C_s множества C_s. Тогда множество C находится в s-положении между A и B.*

Контрпример 1.51. Вновь рассмотрим подмножества прямой $\mathbb{R}$, а именно, $A = [-1, 1]$, $B = [-2, 2]$, тогда $d_H(A, B) = 1$; положим $s = 0.5$, тогда $C_s = [-1.5, 1.5]$ и $\partial C_s = \{-1.5, 1.5\}$; в качестве C возьмем ∂C_s, тогда $d_H(A, C) = 1.5$, $d_H(B, C) = 1.5$ и, поэтому, C не лежит между A и B.

Суть происходящего здесь в том, что множество A оказалось “слишком большим” и сильно удаленным (в смысле d_H) от своей границы по сравнению с расстоянием между A и B. Справедливости ради, отметим, что авторы [5] сами заметили свою ошибку и исправили ее в [6].

Приведем корректную версию теоремы 1 из [5]. Наша версия отличается от того, что было сформулировано в [6], однако ее вполне достаточно для целей работы [5]. Предварительно напомним необходимые топологические определения.

Пусть A — подмножество метрического пространства X. Точка $a \in A$ называется *внутренней для A*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $U_\varepsilon(a) \subset A$, т.е. a содержится в A вместе с некоторой своей окрестностью. Множество всех внутренних точек для A называется *внутренностью A* и обозначается через $\operatorname{Int} A$.

Предложение 1.52. *Пусть A — произвольное замкнутое подмножество метрического пространства X. Тогда*

(1) $A = \partial A \sqcup \operatorname{Int} A$;

(2) *для любого открытого $B \subset A$ имеем $\partial B \subset A \setminus B$;*

(3) *для любого открытого $B \subset A$ имеем $\partial A \cap B = \emptyset$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Так как A замкнуто, то у каждой точки $x \in X \setminus A$ имеется окрестность, лежащая вне A, так что такая x не является граничной точкой для A, поэтому $\partial A \subset A$. По определению внутренности, $\operatorname{Int} A \subset A$, таким образом, $\partial A \cup \operatorname{Int} A \subset A$. С другой стороны, каждая окрестность произвольной точки a из A пересекает A, поэтому или существует такая окрестность, которая содержится целиком в A, и тогда $a \in \operatorname{Int} A$, или каждая такая окрестность пересекает $X \setminus A$, и тогда $a \in \partial A$. Таким образом, $A \subset \partial A \cup \operatorname{Int} A$ и, значит, $A = \partial A \cup \operatorname{Int} A$. С другой стороны, непосредственно из определения вытекает, что $A \cap \operatorname{Int} A = \emptyset$, поэтому $A = \partial A \sqcup \operatorname{Int} A$.

Докажем второе утверждение. Покажем сначала, что все граничные точки множества B лежат в A. Действительно, так как $B \subset A$, то $\partial B \subset \bar{B} \subset \bar{A} = A$. С другой стороны, так как B открыто, то B не содержит своих граничных точек, поэтому $\partial B \subset A \setminus B$.

Докажем третье утверждение. Ясно, что $B \subset \operatorname{Int} A$. Осталось применить пункт (1). □

Теорема 1.53. *Пусть $A \neq B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A,B)$, $s \in (0,r)$, $C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$. Предположим, что C_s имеет непустую внутренность $\operatorname{Int} C_s$. Тогда для каждой точки $c \in \operatorname{Int} C_s$ и положительного $\varepsilon \le \min\{s, r-s\}$, для которого $U_\varepsilon(c) \subset C_s$, множество $D = C_s \setminus U_\varepsilon(c)$ находится в s-положении между A и B.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $d_H(A,D) \le s$ и $d_H(B,D) \le r-s$. Мы ограничимся первым неравенством, так как доказательство второго дословно повторяет доказательство первого.

Так как $D \subset C_s \subset B_s(A)$, то, в силу следствия 1.36, достаточно проверить, что $A \subset B_s(D)$. Для этого достаточно показать, что для произвольной точки $a \in A$ существует $d \in D$ такое, что $a \in B_s(d)$. Итак, выберем произвольное $a \in A$.

Пусть сначала $a \notin C_s$. По теореме 1.43, имеем $d_H(A, C_s) = s$, поэтому, в силу следствия 1.36, существует точка $c' \in C_s$ такая, что $a \in B_s(c')$ и, значит, $|ac'| \le s$. Положим $T = C_s \cap [a,c']$, тогда T — непустое компактное множество и $a \notin T$, поэтому $|aT| > 0$. В силу компактности T, существует такая точка $d \in T$, для которой $|ad| = |aT|$. Так как все точки полуинтервала $[a,d)$ находятся от a на расстоянии меньшем, чем $|aT|$, то $[a,d) \cap C_s = [a,d) \cap T = \emptyset$, поэтому d — граничная точка C_s в силу того, что любая окрестность точки d содержит точки из $[a,d)$. По предложению 1.52, точка d не содержится в $U_\varepsilon(c)$, так что $d \in D$. Кроме того, $|ad| \le |ac'| \le s$, так что $a \in B_s(d) \subset B_s(D)$.

Пусть теперь $a \in C_s$. По предложению 1.52, имеем $\partial U_\varepsilon(c) \subset D$, поэтому

$$U_\varepsilon(c) \subset B_\varepsilon(\partial U_\varepsilon) \subset B_s(\partial U_\varepsilon) \subset B_s(D),$$

откуда $C_s \subset B_s(D)$ и, значит, $a \in B_s(D)$. □

Следствие 1.54. *Пусть $A \neq B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A,B)$, $s \in (0,r)$, $C_s = B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$. Предположим, что внутренность $\operatorname{Int} C_s$ множества C_s непуста. Тогда имеется бесконечно много $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, которые находятся в одинаковом s-положении между A и B.*

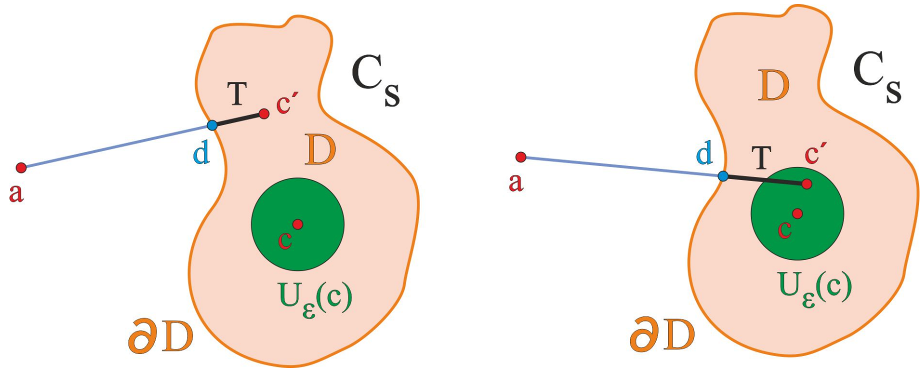

Рис. 1.1: К доказательству теоремы 1.53.

Доказательство. По теореме 1.53, для каждого $s \in (0, r)$, каждого $c \in \operatorname{Int} C_s$ и каждого положительного $\varepsilon \le \min\{s, r-s\}$, для которого $U_\varepsilon(c) \subset \operatorname{Int} C_s$, множество $D = C_s \setminus U_\varepsilon(c)$ находится в s-положении между A и B. Но при каждом s таких ε бесконечно много, так что и соответствующих D также бесконечно много. □

Пример 1.55. Даже если множества A и B конечные, все равно между ними в одном и том же положении может оказаться бесконечное число множеств. Простейшим примером является двухточечное подмножество $A = \{0, 3\}$ вещественной прямой и одноточечное $B = \{1\}$. Тогда $d_H(A, B) = 2$ и при $s = 1$ имеем $C_s = [0, 1] \cup \{2\}$, так что любое замкнутое $C \subset C_s$, содержащее $\{0, 1, 2\}$, находится в s-положении между A и B. Таких C, очевидно, бесконечно много. В приводимом ниже предложении выясняется одна из причин того, почему в одном и том же положении может оказаться бесконечно много множеств.

Теорема 1.56. *Пусть $A \ne B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $r = d_H(A, B)$. Предположим, что существуют $a \in A$ и $b \in B$, для которых $|ab| < r$. Тогда при каждом $0 < s < r$ имеется бесконечно много $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, которые находятся в одинаковом s-положении между A и B.*

Доказательство. Так как $|ab| < r$, открытое множество $U = U_s(a) \cap U_{r-s}(b)$ непусто. Так как $U_s(a) \subset B_s(a) \subset B_s(A)$ и, аналогично, $U_{r-s}(b) \subset B_{r-s}(B)$, имеем

$$U \subset B_s(A) \cap B_{r-s}(B) = C_s,$$

так что C_s имеет непустую внутренность. Осталось применить следствие 1.54. □

Из теоремы 1.56 вытекают следующие результаты.

Следствие 1.57. *Предположим, что для $A \ne B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A, B)$ и некоторого $s \in (0, r)$ имеется лишь конечное число элементов $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$,* *находящихся в s-положении между A и B. Тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|ab| \ge r$.*

Следствие 1.58. *Предположим, что для $A \ne B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $r = d_H(A, B)$ и некоторого $s \in (0, r)$ имеется лишь конечное число элементов $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, находящихся в s-положении между A и B. Тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $|aB| = |Ab| = r$.*