2.9 Критерий Громова предкомпактности семейства метрических компактов

Подмножество метрического пространства называется *предкомпактным*, если его замыкание компактно. В настоящем разделе мы сформулируем и докажем критерий Громова предкомпактности семейства метрических компактов.

Начнем с ряда наблюдений.

Предложение 2.58. *Пусть $X_i \in \mathcal{M}$ — последовательность конечных метрических компактов, сходящаяся к некоторому $X \in \mathcal{M}$. Предположим, что существует n, для которого $\#X_i \le n$ при всех i. Тогда $\#X \le n$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что X содержит подмножество S, состоящее из $(n+1)$-ой точки. Пусть r — наименьшее расстоянием между различными точками из S. Выберем i столь большим, чтобы $d_{GH}(X_i, X) < r/2$. Тогда, по теореме 2.27, существует соответствие $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(X, X_i)$, для которого $\operatorname{dis}\mathcal{R} < r$. Так как S содержит больше точек, чем X_i, в S существуют по крайней мере две точки s_1 и s_2, для которых $\mathcal{R}(s_1) \cap \mathcal{R}(s_2) \ne \emptyset$. Пусть $x \in \mathcal{R}(s_1) \cap \mathcal{R}(s_2)$, тогда $\operatorname{dis}\mathcal{R} \ge |s_1 s_2| \ge r$, противоречие. □

Расширим понятие ε-сети. Пусть Y — произвольное подмножество метрического пространства X. Множество $S \subset X$ называется *ε-сетью в X для Y*, если для любого $y \in Y$ существует $s \in S$ такое, что $|ys| < \varepsilon$. Таким образом, ε-сеть в X для Y не обязана содержаться в Y.

Предложение 2.59. *Пусть $Y \subset X$ — произвольное подмножество метрического пространства X, и для некоторого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть S_X для Y. Тогда в самом Y существует конечная (2ε)-сеть S_Y, причем $\#S_Y \le \#S_X$.*

Доказательство. Пусть $S_X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Рассмотрим множество тех x_i, для которых существуют $y \in Y$ такие, что $|x_i y| < \varepsilon$. Это множество попрежнему образует ε-сеть для Y, поэтому, без ограничения общности, сразу будем считать, что множество выбранных x_i совпадает со всем S_X. Далее, для каждого $x_i \in S_X$ выберем любой y, $|x_i y| < \varepsilon$, обозначим его через y_i и положим $S_Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Тогда для любого $y \in Y$ существует $x_i \in S_X$, для которого $|y x_i| < \varepsilon$, но тогда $|y_i y| \le |y_i x_i| + |x_i y| < 2\varepsilon$, так что S_Y является 2ε-сетью в Y. По построению, количество элементов в S_Y не превосходит количества элементов в исходном S_X. □

Обозначим через $\mathcal{M}_n(D)$ подмножество в $\mathcal{M}$, состоящее из (классов изометрии) метрических пространств, каждое из которых имеет не более чем n точек и диаметр которого не превосходит D.

Предложение 2.60. *Семейство $\mathcal{M}_n(D)$ — компактно.*

Доказательство. (1) Покажем сначала, что $\mathcal{M}_n(D)$ — полное. Пусть $X_i \in \mathcal{M}_n(D)$ — фундаментальная последовательность. Так как, по теореме 2.48, $\mathcal{M}$ — полное пространство, существует $X \in \mathcal{M}$, к которому X_i сходится. Так как, по предложению 2.22, $d_{GH}(X, X_i) \geq |\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} X_i|/2$, то $\operatorname{diam} X \leq D$. Осталось показать, что X имеет не более n точек. Но это — результат предложения 2.58.

(2) Покажем теперь, что $\mathcal{M}_n(D)$ вполне ограниченное. Обозначим через $\mathcal{M}_{n,m}(D')$ подмножество в $\mathcal{M}_n(D')$, состоящее из всех пространств, в которых расстояния кратны $1/m$. Ясно, что каждое $\mathcal{M}_{n,m}(D')$ конечно (возможно, пусто).

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем такое m, чтобы выполнялось $4/m < \varepsilon$. Возьмем произвольное $X \in \mathcal{M}_n(D)$, и пусть X' получается из X увеличением всех расстояний на $3/m$. Ясно, что X' — метрическое пространство, причем $\operatorname{diam} X' \leq D + 3/m$. Заметим, что если a_i, $i = 1, 2, 3$, — длины сторон произвольного треугольника в X, то длины сторон соответствующего треугольника в X' равны $a'_i = a_i + 3/m$, поэтому имеем $a'_1 + a'_2 - a'_3 = a_1 + a_2 - a_3 + 3/m \geq 3/m$. Отсюда вытекает, что если заменить a'_i на ближайшие к ним a''_i, кратные $1/m$, то все a''_i будут по-прежнему положительными, и, кроме того, будет выполняться $a''_1 + a''_2 - a''_3 \geq 0$. Таким образом, эти “округления” приводят нас к некоторому метрическому пространству X'' с длинами, кратными $1/m$, и диаметром, не превосходящим $D + 4/m$, т.е. $X'' \in \mathcal{M}_{n,m}(D + 4/m)$.

Возьмем в качестве соответствия между X и X', а также между X' и X'', тождественные отображения, тогда искажение первого соответствия равно $3/m$, а у второго — не больше $1/m$. По теореме 2.27 имеем $d_{GH}(X, X') \leq 3/(2m)$, $d_{GH}(X', X'') \leq 1/(2m)$, откуда $d_{GH}(X, X'') \leq 2/m < \varepsilon/2$. Таким образом, мы показали, что $\mathcal{M}_{n,m}(D + 4/m)$ является конечной $(\varepsilon/2)$-сетью в $\mathcal{M}$ для $\mathcal{M}_n(D)$. Но тогда, по предложению 2.59, в $\mathcal{M}_n(D)$ существует конечная ε-сеть. □

Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ — некоторое семейство метрических компактов. Будем говорить, что $\mathcal{K}$ *равномерно вполне ограничено*, если выполняются следующие два условия:

(1) существует число $D \geq 0$ такое, что для любого $X \in \mathcal{K}$ выполняется $\operatorname{diam} X \leq D$ (диаметры пространств из $\mathcal{K}$ равномерно ограничены);

(2) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что каждое $X \in \mathcal{K}$ содержит некоторую ε-сеть, состоящую не более чем из $n(\varepsilon)$ точек (количества элементов ε-сетей равномерно ограничены).

Теорема 2.61. *Семейство $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ — предкомпактно, если и только если оно — равномерно вполне ограничено.*

Доказательство. (1) Пусть сначала $\mathcal{K}$ предкомпактно. Покажем, что диаметры пространств $X \in \mathcal{K}$ равномерно ограничены.

Предположим, что это не так, т.е. существует последовательность $X_i \in \mathcal{K}$, для которой $\operatorname{diam} X_i \to \infty$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, без ограничения общности будем сразу считать, что $\operatorname{diam} X_{i+1} - \operatorname{diam} X_i > 1$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Так как при $j > i$ выполняется $d_{GH}(X_j, X_i) \ge (\operatorname{diam} X_j - \operatorname{diam} X_i)/2 > 1/2$, никакая подпоследовательность X_{i_k} не является фундаментальной а, потому, не сходится в $\mathcal{M}$, что противоречит предкомпактности $\mathcal{K}$.

Покажем, что количества элементов ε-сетей равномерно ограничены. Предположим, что это не так. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $X_i \in \mathcal{K}$, для которой при каждом i наименьшее число элементов ε-сетей в X_i стремится к бесконечности. По условию, в последовательности X_i имеется подпоследовательность, сходящаяся к некоторому $X \in \mathcal{K}$. Без ограничения общности, будем сразу считать, что сама последовательность X_i сходится к X. Выберем в X произвольную конечную $\varepsilon/3$-сеть S, и пусть n — количество элементов в S. Выберем m столь большим, чтобы для любого $i > m$ выполнялось $d_{GH}(X_i, X) < \varepsilon/3$. Тогда, по лемме 2.56, в X_i существует ε-сеть, состоящая из n элементов, противоречие.

(2) Пусть теперь $\mathcal{K}$ равномерно вполне ограничено. Покажем, что $\mathcal{K}$ предкомпактно.

Обозначим через $\bar{\mathcal{K}}$ замыкание $\mathcal{K}$. Так как, по теореме 2.48, пространство $\mathcal{M}$ — полное, то и каждое его замкнутое подмножество также является полным, в частности, это имеет место для $\bar{\mathcal{K}}$.

Таким образом, нам осталось доказать, что $\bar{\mathcal{K}}$ — вполне ограничено. Так как каждая ε-сеть для подмножества метрического пространства является также ε-сетью для замыкания этого подмножества, достаточно проверить, что вполне ограниченным является $\mathcal{K}$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что в $\mathcal{K}$ существует конечная ε-сеть. По предложению 2.59, достаточно показать, что в $\mathcal{M}$ существует конечная $\varepsilon/2$-сеть для $\mathcal{K}$.

Так как $\mathcal{K}$ — равномерно вполне ограничено, существует такое n, что в каждом $X \in \mathcal{K}$ имеется конечная $(\varepsilon/4)$-сеть, состоящая не более чем из n точек. Множество таких $(\varepsilon/4)$-сетей обозначим через $\mathcal{S}$. Так как расстояние Громова–Хаусдорфа от компактного пространства до его ε-сети не превосходит ε, заключаем, что $\mathcal{S}$ является $(\varepsilon/4)$-сетью в $\mathcal{M}$ для $\mathcal{K}$.

Кроме того, равномерная полная ограниченность $\mathcal{K}$ влечет существование $D \ge 0$ такого, что диаметры всех $X \in \mathcal{K}$ не превосходят D, следовательно, $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(D)$. В силу предложения 2.60, в $\mathcal{M}_n(D)$ существует конечная $(\varepsilon/4)$-сеть $\mathcal{S}'$. Из неравенства треугольника вытекает, что $\mathcal{S}'$ является (конечной) $(\varepsilon/2)$-сетью в $\mathcal{M}$ для $\mathcal{K}$. Последнее наблюдение и завершает доказательство теоремы. $\square$

2.10 Расстояние по Громову–Хаусдорфу и конечные ε-сети

В данном разделе мы поговорим о том, как можно свести сходимость по Громову–Хаусдорфу метрических компактов к сходимости их конечных подмножеств.

Следующий тривиальный результат уже упоминался, и мы приведем его лишь для полноты картины.

Предложение 2.62. *Каждый метрический компакт является пределом по Громову–Хаусдорфу конечных метрических пространств.*

Определение 2.63. Пусть ε и δ — положительные числа. Говорят, что метрические компакты X и Y являются *(ε,δ)-аппроксимациями друг друга*, если в X существует ε-сеть $\{x_1,\dots,x_n\}$, в Y существует ε-сеть $\{y_1,\dots,y_n\}$, и биекция $x_i \mapsto y_i$ имеет искажение, меньшее δ. Если $\varepsilon=\delta$, то (ε,δ)-аппроксимацию называют просто ε-аппроксимацией.

Предложение 2.64. *Пусть X и Y — метрические компакты. Тогда*

(1) *если X и Y являются (ε,δ)-аппроксимацией друг друга, то $d_{GH}(X,Y)<2\varepsilon+\delta$;*

(2) *если $d_{GH}(X,Y)<\varepsilon$, то X и Y являются (3ε)-аппроксимацией друг друга.*

Доказательство. (1) Пусть $X_0=\{x_1,\dots,x_n\}$ и $Y_0=\{y_1,\dots,y_n\}$ обозначают ε-сети из определения (ε,δ)-аппроксимации, тогда $d_{GH}(X,X_0)\le\varepsilon$, $d_{GH}(Y,Y_0)\le\varepsilon$ и $d_{GH}(X_0,Y_0)<\delta/2$ в силу теоремы 2.27. Осталось применить неравенство треугольника.

(2) Пусть $X_0=\{x_1,\dots,x_n\}\subset X$ — произвольная ε-сеть. По лемме 2.56, в Y существует (3ε)-сеть $Y_0=\{y_1,\dots,y_n\}$, причем искажение биекции $a_i\mapsto b_i$ меньше 2ε, поэтому X и Y являются (3ε)-аппроксимацией друг друга. □

Предложение 2.65. *Пусть X_i — последовательность метрических компактов. Тогда эта последовательность сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому компакту X, если и только если для каждого $\varepsilon>0$ существуют такие конечные ε-сети $S_i\subset X_i$ и $S\subset X$, что последовательность S_i сходится к S по Громову–Хаусдорфу. Более того, эти ε-сети можно выбрать так, чтобы при достаточно больших i сети S_i состояли из такого же числа элементов, что и S.*

Доказательство. Пусть X_i сходится к X. Тогда $r_i=d_{GH}(X_i,X)\to0$. Пусть $S\subset X$ — некоторая конечная $(\varepsilon/2)$-сеть. По лемме 2.56, при достаточно больших i (когда $r_i<\varepsilon/4$) в X_i существует ε-сеть S_i, состоящая из того же числа точек, что и S. Осталось выбрать какие-нибудь ε-сети для оставшихся i.

Обратно, пусть при каждом ε существуют ε-сети $S_i\subset X_i$, сходящиеся к ε-сети $S\subset X$. Покажем, что $d_{GH}(X_i,X)\to0$. Выберем произвольное $\varepsilon>0$, рассмотрим $(\varepsilon/3)$-сети $S_i \subset X_i$, сходящиеся к $(\varepsilon/3)$-сети $S \subset X$. Существует n такой, что при всех $i \geq n$ выполняется $d_{GH}(S, S_i) < \varepsilon/3$. Но $d_{GH}(S_i, X_i) \leq \varepsilon/3$ и $d_{GH}(X, S) \leq \varepsilon/3$, поэтому, в силу неравенства треугольника, имеем $d_{GH}(X, X_i) < \varepsilon$. □

2.11 Сепарабельность пространства Громова–Хаусдорфа

Напомним, что подмножество топологического пространства X называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает с X. Пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует не более чем счетное всюду плотное подмножество.

Теорема 2.66. *Пространство $\mathcal{M}$ сепарабельно.*

Доказательство. По предложению 2.62, каждый компакт является пределом по Громову–Хаусдорфу конечных метрических пространств. Таким образом, все конечные метрические пространства всюду плотны в $\mathcal{M}$. Но каждое конечное метрическое пространство приближается с любой точностью конечным метрическим пространством с рациональными расстояниями (докажите), а последних пространств — счетное множество. □

2.12 Другие сходимости

В настоящем параграфе мы обсудим разные другие типы сходимостей.

2.12.1 Равномерная сходимость

Говорят, что последовательность метрических компактов X_i *равномерно сходится к* X, если существуют гомеоморфизмы $f_i\colon X_i \to X$ такие, что $\operatorname{dis} f_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Из теоремы 2.27 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 2.67. *Если последовательность $X_i \in \mathcal{M}$ сходится к X равномерно, то она сходится к X по Громову–Хаусдорфу.*

2.12.2 Равномерная сходимость к полуметрике

Пусть d_i — последовательность метрик на некотором множестве X. Будем говорить, что d_i *равномерно сходится* к некоторой функции $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что для любого $i \geq n$ и любых x_1, $x_2 \in X$ выполняется $\bigl|d_i(x_1, x_2) - d(x_1, x_2)\bigr| < \varepsilon$.

Упражнение 2.68. Покажите, что определенная выше функция d является псевдометрикой.

Предложение 2.69. *Если последовательность метрик d_i, заданных на некотором множестве X, равномерно сходится к псевдометрике d, то X_i сходятся по Громову–Хаусдорфу в метрическому пространству X/d.*

Доказательство. Обозначим через $\pi\colon X \to X/d$ каноническую проекцию и выберем произвольные точки x_1, $x_2 \in X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что для любого $i \ge n$ выполняется

$$\Big|d_i(x_1,x_2) - d\big(\pi(x_1),\pi(x_2)\big)\Big| = \big|d_i(x_1,x_2) - d(x_1,x_2)\big| < \varepsilon,$$

поэтому искажение проекции π относительно метрики d_i стремится к нулю при $i \to \infty$. Осталось применить теорему 2.27. $\square$

2.12.3 Сходимость по Липшицу

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств. Это отображение называется *липшицевым*, если существует такая постоянная $C > 0$, что $\big|f(x_1)f(x_2)\big| \le C|x_1x_2|$ для любых x_1, $x_2 \in X$. Число C называется *постоянной Липшица*, а точная нижняя грань постоянных Липшица — *растяжением отображения* f и обозначается через $\operatorname{dil} f$.

Упражнение 2.70. Докажите, что

(1) каждое липшицево отображение непрерывно;

(2) если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — липшицевы отображения, то их композиция $g \circ f$ также является липшицевой, причем $\operatorname{dil}(g\circ f) = \operatorname{dil} f \cdot \operatorname{dil} g$;

(3) множество всех липшицевых отображений $f\colon X \to Y$ в нормированное пространство Y образует векторное пространство, в котором dil — полунорма, т.е. $\operatorname{dil}(f+g) \le \operatorname{dil} f + \operatorname{dil} g$ и $\operatorname{dil} \lambda f = |\lambda| \operatorname{dil} f$ для любой постоянной λ; за исключением тривиального случая $Y = \{0\}$, dil не является нормой, так как $\operatorname{dil} f = 0$, если и только если $f = \mathrm{const}$.

Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется *билипшицевым*, если существуют постоянные $c > 0$ и $C > 0$ такие, что для любых x_1, $x_2 \in X$ выполняется $c|x_1x_2| \le \big|f(x_1)f(x_2)\big| \le C|x_1x_2|$.

Упражнение 2.71. Покажите, что каждое билипшицево отображение является гомеоморфизмом с образом. Таким образом, сюръективное билипшицево отображение может быть определено как биекция, у которой прямое и обратное отображения — липшицевы.

Определение 2.72. *Расстоянием по Липшицу* между метрическими пространствами X и Y называется величина

$$d_L(X,Y) = \inf \log\big(\max\{\operatorname{dil} f,\, \operatorname{dil} f^{-1}\}\big),$$

где точная нижняя грань берется по всем билипшицевым гомеоморфизмам $f\colon X \to Y$.

Упражнение 2.73. Докажите, что

(1) функция d_L — псевдометрика;

(2) для компактных X и Y условие $d_L(X, Y) = 0$ равносильно их изометричности.

Таким образом, d_L — метрика на классах изометричности гомеоморфных метрических компактов.

Упражнение 2.74. Пусть X_i — последовательность метрических компактов, сходящаяся по Липшицу к метрическому компакту X. Докажите, что эта последовательность сходится к X равномерно.

Из упражнения 2.74 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 2.75. *Пусть X_i — последовательность метрических компактов, сходящаяся по Липшицу к метрическому компакту X. Тогда последовательность X_i сходится к X по Громову–Хаусдорфу.*