Тема 1

Метрические пространства. Геометрия расстояния Хаусдорфа.

Мы будем изучать множества, наделенные функцией расстояния, сопоставляющей каждой неупорядоченной паре точек неотрицательное вещественное число, равное нулю на совпадающих точках, и удовлетворяющей неравенству треугольника. Если такая функция не может принимать нулевых значений ни на какой паре различных точек, то она называется *метрикой*, а если может — то *псевдометрикой* или *полуметрикой*. Таким образом, возникают понятия *метрического* и *псевдометрического пространств* как пар, состоящих из множества и соответствующей функции расстояния. Бывает удобно обозначать расстояние между точками x и y через $|xy|$, чем мы часто будем пользоваться.

Простейшим примером псевдометрики является функция расстояния, тождественно равная нулю. Простейший пример метрики получается, если для каждой пары различных x и y положить $|xy| = \mathrm{const} > 0$. Модуль разности чисел задает метрику на вещественной прямой. Норма разности векторов задает метрику на нормированном пространстве (предыдущий пример — частный случай). На пространстве вещественных функций естественной метрикой является функция, сопоставляющая каждой паре функций супремум модуля их разности по всем точкам из области определения этих функций. На пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке, можно в качестве метрики рассмотреть интеграл от модуля разности. Если же расширить это пространство до интегрируемых функций, то определенная в предыдущем примере метрика превратится в псевдометрику: функции, отличающиеся, скажем, в одной точке, находятся на нулевом расстоянии друг от друга.

Упражнение 1.1. Пусть $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ — выпуклая вверх функция, причем $f(x) = 0$ только в точке $x = 0$. Покажите, что для каждого метрического пространства (X, ρ) функция $\rho_f(x, y) = f\big(\rho(x, y)\big)$ является метрикой на X.

Огромная коллекция метрических пространств может быть найдена в книге [1].

1.1 Топология метрических пространств

Топология — наука о непрерывности, состоящей в том, что значения изучаемых отображений мало меняются при малых отклонениях от исходных точек. Для формализации понятия непрерывности задаются системы окрестностей точек рассматриваемых пространств. Вообще говоря, такие системы могут быть определены на произвольных множествах, однако для наших целей вполне хватит метрических пространств, в которых окрестности задаются функцией расстояния и понятие малого отклонения имеет более наглядную формализацию.

Пусть X — метрическое пространство, а $x \in X$ — произвольная его точка. Для каждого $\varepsilon > 0$ определим *ε-окрестность $U_\varepsilon(x)$ точки x*, положив $U_\varepsilon(x) = \{y \in X : |xy| < \varepsilon\}$. Каждое объединение ε-окрестностей (вообще говоря, при различных ε) называется *открытым множеством.* Также к открытым относят и пустое множество. Семейство всех открытых подмножеств метрического пространства называется (*метрической*) *топологией.*

Упражнение 1.2. Докажите, что непустое подмножество метрического пространства является открытым, если и только если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ее ε-окрестность.

Упражнение 1.3. Докажите, что произвольные объединения и конечные пересечения открытых множеств также открыты.

Отметим, что $U_\varepsilon(x)$ также называют *открытым шаром радиуса ε с центром в точке x*. Кроме того, если A — непустое подмножество пространства X, то открытое множество

$$U_\varepsilon(A) = \cup_{a \in A} U_\varepsilon(a)$$

называется *ε-окрестностью множества A* или *открытым шаром радиуса ε с центром в A*. Иногда, следую Хаусдорфу, мы будем писать $U(A, \varepsilon)$ вместо $U_\varepsilon(A)$.

Упражнение 1.4.

(1) Пусть $A \subset B \subset X$ и r — положительное число, тогда $U_r(A) \subset U_r(B)$.

(2) Пусть $A \subset X$ и r, s — положительные числа. Тогда

$$U_r\big(U_s(A)\big) \subset U_{r+s}(A).$$

Подмножество, являющееся дополнением до открытого множества, называется *замкнутым.*

Упражнение 1.5. Докажите, что произвольные пересечения и конечные объединения замкнутых множеств также замкнуты.

Положим $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : |xy| \le \varepsilon\}$.

Упражнение 1.6. Докажите, что $B_\varepsilon(x)$ — замкнутое множество.

Множество $B_\varepsilon(x)$ называют *замкнутым шаром радиуса* ε *с центром в точке* x или *замкнутой* ε*-окрестностью точки* x. Отметим, что для непустого подмножества $A \subset X$ также определено $B_\varepsilon(A)$ как объединение $B_\varepsilon(a)$ по всем $a \in A$. Однако в этом случае $B_\varepsilon(A)$ не обязано быть замкнутым подмножеством: например, если $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$, то $B_1(A) = (-1, 2)$.

Упражнение 1.7. Докажите, что для компактного подмножества A метрического пространства X множество $B_\varepsilon(A)$ замкнуто. Верно ли это же для замкнутого A?

Положим $S_\varepsilon(x) = \{y \in X : |xy| = \varepsilon\}$.

Упражнение 1.8. Докажите, что $S_\varepsilon(x)$ — замкнутое множество.

Множество $S_\varepsilon(x)$ называют *сферой радиуса* ε *с центром в точке* x.

Пусть $A \subset X$ — произвольное подмножество в X. Точка $x \in X$ называется *граничной для* A, если каждая ε-окрестность $U_\varepsilon(x)$ пересекает как A, так и его дополнение $X \setminus A$. Множество всех граничных точек для A называется *границей множества* A и обозначается через ∂A.

Отметим, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ выполняется $S_\varepsilon(x) = \partial U_\varepsilon(x) = \partial B_\varepsilon(x)$. В общем случае это уже не так.

Пример 1.9. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ состоит имеет вид $\{-1, 0, 1, -1+1/n, 1+1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда $\partial U_1(0) = \{-1\}$, $\partial B_1(0) = \{-1\}$ и $S_1(0) = \{-1, 1\}$, так что ни одно из $\partial U_1(0)$, $\partial B_1(0)$ не содержится в другом, однако оба они лежат в $S_1(0)$.

Упражнение 1.10. Докажите, что $\partial U_\varepsilon(x)$ и $\partial B_\varepsilon(x)$ являются подмножествами в $S_\varepsilon(x)$.

Последовательностью в метрическом пространстве X называется отображение f из множества натуральных чисел в пространство X. При этом обычно полагают $f_i = f(i)$ и говорят, что *задана последовательность* f_i. Говорят, что последовательность f_i *сходится к некоторой точке* $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число n такое, что для любого $i > n$ выполняется $f_i \in U_\varepsilon(x)$. При этом пишут $f_i \to x$ при $i \to \infty$, а число x называют *пределом последовательности* f_i и обозначают через $\lim\limits_{i\to\infty} f_i$.

Упражнение 1.11. Пусть A — произвольное подмножество метрического пространства X. Докажите, что A замкнуто, если и только если любая последовательность a_i точек из A сходится к некоторой точке $a \in A$. Верно ли это же для топологического пространства?

Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что $f\big(U_\delta(x)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Упражнение 1.12. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств. Докажите эквивалентность следующих условий:

(1) отображение f непрерывно;

(2) прообраз каждого открытого множества при отображении f открыт;

(3) прообраз каждого замкнутого множества при отображении f замкнут;

(4) образ при отображении f любой сходящейся последовательности сходится к образу ее предела.

Что остается верным для топологического пространства?

1.2 Хаусдорфово расстояние между подмножествами метрического пространства

В данном разделе мы будем изучать различные семейства подмножеств метрического пространства. Мы наделим эти семейства функцией расстояния, которая, по-видимому, впервые появилась в книге Феликса Хаусдорфа “Grundzüge der Mengenlehre” (Основы теории множеств), изданной в 1914 году, русский “перевод”, являющийся творческой переработкой этой книги, а также “Mengenlehre” 1927, вышел в 1937 году [2]. Отметим, что это расстояние существенно используется в таких популярных прикладных дисциплинах как распознавание образов, робототехнике, компьютерной хирургии и др.

Пусть X — метрическое пространство. Пусть x — произвольная точка из X, а A — произвольное непустое подмножество в X. Напомним, что расстояние $|xA|$ между x и A определяется как точная нижняя грань расстояний $|xa|$ по всем точкам $a \in A$. Если вместо x рассмотреть подмножество B пространства X и определить расстояние $|BA|$ как точную нижнюю грань расстояний $|bA|$ по всем точкам $b \in B$, то полученная симметричная функция будет равна нулю на пересекающихся множествах и не будет удовлетворять неравенству треугольника: в качестве примера достаточно взять на числовой прямой отрезки $A = [0,1]$, $B = [1,2]$ и $C = [2,3]$, тогда $1 = |AC| \not\le |AB|+|BC| = 0$. Ситуацию можно попробовать исправить, определив $d(B,A)$ как точную **верхнюю** грань расстояний $|bA|$ по всем точкам $b \in B$. Однако полученная функция не будет симметричной: если $A = [0,1]$ а $B = [1,3]$, то $d(B,A) = 2$, а $d(A,B) = 1$.

Тем не менее, эту функцию можно симметризовать, положив

$$d_H(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\} = \\ = \max\big\{\sup\{|aB| : a \in A\}, \sup\{|Ab| : b \in B\}\big\}.$$

Ниже мы покажем, что полученная функция, ограниченная на естественное семейство подмножеств метрического пространства, является метрикой.

Напомним, что подмножество A метрического пространства X называется *ограниченным*, если для некоторой точки $x \in X$ и положительного числа ε выполняется $A \subset U_\varepsilon(x)$. Легко видеть, что если $A \subset X$ — ограниченное множество, то для каждого $y \in X$ существует $\delta > 0$ такое, что $A \subset U_\delta(y)$.

Упражнение 1.13. Пусть $A \subset X$ — ограниченное подмножество метрического пространства. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ множества $U_\varepsilon(A)$ и $B_\varepsilon(A)$ также ограничены.

Предложение 1.14. *Пусть A и B — ограниченные непустые подмножества метрического пространства X, тогда $d_H(A,B) < \infty$.*

Доказательство. Ограниченность множеств A и B влечет существование точки $x \in X$ и положительного числа ε, для которых $A \subset U_\varepsilon(x)$ и $B \subset U_\varepsilon(x)$, но тогда для любых $a \in A$ и $b \in B$, в силу неравенства треугольника, имеем $|ab| < 2\varepsilon$, так что для каждого $a \in A$ и $b \in B$ получаем $|aB| \le 2\varepsilon$ и $|Ab| \le 2\varepsilon$, так что $d(A,B) \le 2\varepsilon$ и $d(B,A) \le 2\varepsilon$, откуда $d_H(A,B) \le 2\varepsilon < \infty$, что и требовалось. □

Отметим, что функция d_H может быть конечна и на неограниченных множествах, например, на параллельных прямых в евклидовом пространстве она равна наименьшему расстоянию между точками этих прямых.

Для дальнейшего нам будет полезно дать альтернативное определение функции d_H. Рассмотрим два произвольных непустых подмножества A и B пространства X. Положим

$$d'_H(A,B) = \inf\{r \mid A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\}.$$

Предложение 1.15. *Для любых ограниченных A и B имеем $d_H(A,B) = d'_H(A,B)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $d'_H(A,B) \le d_H(A,B)$. Так как $d(A,B) = \sup\bigl\{|aB| : a \in A\bigr\}$, то для любого $a \in A$ имеем $|aB| \le d(A,B)$. Так как $|aB| = \inf\bigl\{|ab| : b \in B\bigr\}$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $b \in B$, для которого $|ab| < |aB| + \varepsilon \le d(A,B) + \varepsilon$. Из сказанного вытекает, что для каждого $a \in A$ и не зависящего от a положительного числа ε существует такое $b \in B$, что $a \in U\bigl(b, d(A,B)+\varepsilon\bigr)$, поэтому $A \subset U\bigl(B, d(A,B)+\varepsilon\bigr)$. Аналогично показывается, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $B \subset U\bigl(A, d(B,A)+\varepsilon\bigr)$, откуда

$$A \subset U\bigl(B, d_H(A,B)+\varepsilon\bigr) \text{ и } B \subset U\bigl(A, d_H(A,B)+\varepsilon\bigr),$$

так что $d'_H(A,B) \le d_H(A,B) + \varepsilon$ и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, имеем $d'_H(A,B) \le d_H(A,B)$.

Докажем теперь обратное неравенство. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$A \subset U\big(B, d'_H(A,B) + \varepsilon\big),$$

откуда при каждом $a \in A$ существует такое $b \in B$, что $a \in U(b, d'_H(A,B)+\varepsilon)$, так что $|aB| \le d'_H(A,B) + \varepsilon$ и, значит,

$$d(A,B) = \sup\big\{|aB| : a \in A\big\} \le d'_H(A,B) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $d(A,B) \le d'_H(A,B)$. Аналогично $d(B,A) \le d'_H(A,B)$, откуда $d_H(A,B) \le d'_H(A,B)$. $\square$

Упражнение 1.16. Обобщите предложение 1.15 на случай произвольных непустых, не обязательно ограниченных множеств.

Приведем еще одно полезное для дальнейшего определение функции d_H. Для этого положим

$$d''_H(A,B) = \inf\{r : A \subset B_r(B) \text{ и } B \subset B_r(A)\}$$

и докажем, что следующий результат.

Предложение 1.17. *Для любых ограниченных A и B имеем $d'_H(A,B) = d''_H(A,B)$.*

Доказательство. Выберем любые непустые множества A и B из $\mathbb{R}^n$. Ясно, что $d''_H(A,B) \le d'_H(A,B)$. Докажем обратное неравенство.

Предположим противное, т.е. что для некоторых A и B имеем $r'' = d''_H(A,B) < d'_H(A,B) = r'$. Выберем произвольные $r'' < r_1 < r_2 < r'$. Но тогда $B \subset B_{r_1}(A) \subset U_{r_2}(A)$ и, аналогично, $A \subset U_{r_2}(B)$, поэтому $d'_H(A,B) \le r_2 < r'$, противоречие. $\square$

Упражнение 1.18. Обобщите предложение 1.17 на случай произвольных, не обязательно ограниченных множеств.

Замечание 1.19. Из того, что $r = d_H(A,B)$ не вытекает, что $A \subset B_r(B)$. В качестве примера рассмотрим подмножества вещественной прямой $\mathbb{R}$: $A = \{-1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тогда $r = 1$, но $A \not\subset B_1(B)$.

В дальнейшем мы всегда будем писать d_H для любого из трех приведенных выше определений функции Хаусдорфа.

Обозначим через $\mathcal{B}(X)$ семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства X.

Предложение 1.20. *Функция d_H является псевдометрикой на $\mathcal{B}(X)$.*

Доказательство. Нетривиальным является лишь неравенство треугольника, которое мы сейчас и докажем. Пусть A_i, $i = 1, 2, 3,$ — ограниченные подмножества X. Положим $r_{ij} = d_H(A_i, A_j)$. Тогда, для произвольного $\varepsilon > 0$, имеем

$$A_1 \subset U(A_2, r_{12} + \varepsilon/2) \text{ и } A_2 \subset U(A_3, r_{23} + \varepsilon/2),$$

откуда, учитывая упражнение 1.4, заключаем, что

$$A_1 \subset U(A_2, r_{12} + \varepsilon/2) \subset U\big(U(A_3, r_{23} + \varepsilon/2), r_{12} + \varepsilon/2\big) \subset U(A_3, r_{23} + r_{12} + \varepsilon).$$

Аналогично доказывается, что $A_3 \subset U(A_1, r_{23} + r_{12} + \varepsilon)$. Так как ε произвольно, получаем $d_H(A_1, A_3) \le r_{12} + r_{23}$, что и требовалось. □

Функция d_H называется *расстоянием Хаусдорфа.* Из предыдущего предложения вытекает, что $\big(\mathcal{B}(X),\, d_H\big)$ — псевдометрическое пространство.

Отметим, что расстояние Хаусдорфа в общем случае не является метрикой, так как может равняться нулю между различными множествами. Например, это имеет место для отрезка $A = [a, b]$ и полуинтервала $B = [a, b)$, рассматриваемых как подмножества числовой прямой со стандартной функцией расстояния. Действительно, при каждом $\varepsilon > 0$ выполняется $A \subset U_\varepsilon(B)$ и $B \subset U_\varepsilon(A)$, так что $d_H(A, B) = 0$. Чтобы выяснить, для каких подмножеств метрического пространства расстояние по Хаусдорфу равно нулю, введем еще одно важное топологическое понятие.

Пусть X — произвольное метрическое пространство и A — его подмножество. Элемент $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества* A, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $A \cap U_\varepsilon(x) \ne 0$. Множество всех точек прикосновения для A называется его *замыканием* и обозначается через $\bar{A}$.

Упражнение 1.21. Докажите, что подмножество A метрического пространства замкнуто, если и только если $A = \bar{A}$.

Упражнение 1.22. Докажите, что замыкание множества A равно пересечению всех замкнутых множеств, содержащих A. Таким образом, замыкание множества A — это наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A.

Предложение 1.23. *Пусть A и B — непустые ограниченные подмножества метрического пространства X. Тогда $d_H(A, B) = 0$, если и только если $\bar{A} = \bar{B}$ (про такие множества говорят, что они* **принадлежат к одному классу плотности***).*

Доказательство. Пусть сначала $d_H(A, B) = 0$. Мы должны показать, что $\bar{A} = \bar{B}$. Предположим противное. Без ограничения общности, можно считать, что в $\bar{A}$ имеется некоторая точка x, которой нет в $\bar{B}$. Так как $x \notin \bar{B}$, существует $\varepsilon > 0$, для которого $U_\varepsilon(x) \cap B = \emptyset$, т.е. расстояние от x до произвольной точки из B не меньше ε. Так как x — точка прикосновения для A, в $U_{\varepsilon/2}(x)$ имеется некоторая точка $y \in A$. Из неравенства треугольника вытекает, что расстояние от y до произвольной точки из B больше $\varepsilon/2$, поэтому $y \notin U_{\varepsilon/2}(B)$ и, значит, $A \not\subset U_{\varepsilon/2}(B)$, так что $d_H(A, B) \ge \varepsilon/2 > 0$, противоречие.

Пусть теперь $\bar{A} = \bar{B}$. Мы должны показать, что $d_H(A, B) = 0$. Это равносильно тому, что при каждом $\varepsilon > 0$ выполняется $A \subset U_\varepsilon(B)$ и $B \subset U_\varepsilon(A)$. Пусть это не так. Без ограничения общности, можно считать, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется $A \not\subset U_\varepsilon(B)$, т.е. в A существует некоторая точка x, не лежащая в $U_\varepsilon(B)$. Но x является точкой прикосновения для B, поэтому $U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$, так что если y — точка из этого пересечения, то $x \in U_\varepsilon(y) \subset U_\varepsilon(B)$, противоречие. □

Следствие 1.24. *Пусть A и B — замкнутые ограниченные подмножества метрического пространства, тогда $d_H(A, B) = 0$, если и только если $A = B$. Таким образом, на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства функция d_H является метрикой.*

Упражнение 1.25. Докажите предложение 1.23 и первую часть следствия 1.24 для неограниченных множеств.

Обозначим через $\mathcal{H}(X)$ семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X. Из следствия 1.24 вытекает, что $\big(\mathcal{H}(X), d_H\big)$ — метрическое пространство.

Рассмотрим отображение $\nu\colon X \to \mathcal{H}(X)$, определенное по формуле $\nu(x) = \{x\}$.

Предложение 1.26. *Отображение ν является изометрическим вложением.*

Доказательство. Достаточно показать, что $d\big(\{x\}, \{y\}\big) = |xy|$. Для любого $\varepsilon > |xy|$ имеем $\{y\} \subset U_\varepsilon\big(\{x\}\big)$ и $\{x\} \subset U_\varepsilon\big(\{y\}\big)$, поэтому $d_H\big(\{x\}, \{y\}\big) \le |xy|$. С другой стороны, если $\varepsilon \le |xy|$, то $\{y\} \not\subset U_\varepsilon\big(\{x\}\big)$, поэтому $d_H\big(\{x\}, \{y\}\big) \ge |xy|$. □

Таким образом, расстояние Хаусдорфа можно рассматривать как продолжение расстояния исходного пространства.

Пусть A — произвольное подмножество метрического пространства X. Тогда для каждой точки $x \in A$ положим

$$r_x(A) = \sup\big\{|xy| : y \in A\big\}.$$

Число $r_x(A)$ назовем *относительным радиусом множества A с центром в точке x*. Число

$$r(A) = \inf\{r_x(A) : x \in A\}$$

называется *радиусом множества A*, а число

$$d(A) = \sup\{r_x(A) : x \in A\}$$

— *диаметром множества A*.

Упражнение 1.27. Докажите, что $r_x(A) = d_H(x, A) \le d(A)$, в частности, $r(A) = \inf\{d_H(x, A) : x \in A\}$.

Пусть A — произвольное подмножество метрического пространства X, и ε — положительное число. Множество $Y \subset A$ называется *ε-сетью множества A*, если для каждой точки $a \in A$ существует точка $y \in Y$ такая, что $|ay| < \varepsilon$.

Упражнение 1.28. Докажите, что если $Y \subset A$ — произвольная ε-сеть, то $d_H(A, Y) \le \varepsilon$.

Дополнительные упражнения

Упражнение 1.29. Пусть $x \in X$, $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(X)$. Докажите, что $|xA| \le |xB| + d_H(A, B)$.

Упражнение 1.30. Пусть A, $B \in \mathcal{B}(X)$. Докажите, что $\bigl|d(A) - d(B)\bigr| \le 2d_H(A, B)$.

Упражнение 1.31. Предположим, что для A, $B \in \mathcal{B}(X)$ множество $A \cap B$ имеет непустую внутренность. Докажите, что существует $r > 0$, для которого выполняется следующее: каждое множество $C \in \mathcal{B}(X)$, $d_H(A, C) < r$, пересекает B.

Упражнение 1.32. Обобщите предыдущие упражнения этого раздела на неограниченные множества.