Тема 6

Геометрическая теория групп.

Данный раздел посвящен приложениям метрической геометрии в теории гиперболических групп в смысле М. Громова. В качестве источников мы использовали конспекты лекций [9], книжки [10] и [8], а также другие источники.

Геометрическая теория групп возникла в работах Громова и Cannon'a, впервые применивших геометрический подход к доказательству алгебраических свойств широких классов групп. Оказалось, что рассматривать группы как метрические пространства бывает очень полезно.

6.1 Напоминания и обозначения из теории групп.

Пусть A — произвольное множество, элементы которого называются *образующими*. Рассмотрим множество всех конечных слов w, составленных из элементов a множества A и их "обратных" a^{-1}. Слова рассматриваются как произведения образующих и обратных к ним. *Произведением слов* w_1 и w_2 называется слово, полученное из w_1 приписыванием к нему справа слова w_2. При этом слова рассматриваются с точностью до *элементарных сокращений*, т.е. удалений подслов вида $a\,a^{-1}$ и $a^{-1}a$. Такие сокращения называются *редукциями*, а, если все они выполнены, то слово называется *редуцированным*. Нейтральным элементом будет пустое слово, которое принято обозначать через λ. Обратным элементом к слову $w = a_{i_1} \cdots a_{i_k}$ будет слово $w^{-1} = a_{i_k}^{-1} \cdots a_{i_1}^{-1}$. Таким образом, множество редуцированных слов, или множество классов слов, рассматриваемых с точностью до редукции, образует группу, которая называется *свободной группой над* A, или *с множеством образующих* A и обозначается через $F(A)$. Мощность множества A называется *рангом* свободной группы. Свободные группы одинакового ранга изоморфны.

Если $R \subset F(A)$ — произвольное подмножество, то через $\langle\langle R\rangle\rangle$ обозначим пересечение всех нормальных подгрупп, содержащих R. Тогда $\langle\langle R\rangle\rangle$ — нормальная подгруппа, которую называют *подгруппой, нормально порожденной множеством* R. Ясно, что $\langle\langle R\rangle\rangle$ состоит из элементов вида

$$w = (u_1^{-1} r_1^{\varepsilon_1} u_1) \cdots (u_n^{-1} r_n^{\varepsilon_n} u_n), \qquad r_i \in R, \quad u_i \in F(A), \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что группа G *порождается множеством* A, если существует эпиморфизм $\Phi\colon F(A) \to G$, т.е. $\Phi\big(F(A)\big) = G$. Элементы множества A называются *образующими* или *генераторами* группы G. Ядро этого гомоморфизма — нормальная подгруппа. Если эта нормальная подгруппа нормально порождена некоторым множеством R, то R называется *множеством соотношений группы* G *по отношению к порождающему множеству* A. В этом случае пишут $G = \langle A \mid R\rangle$, имея ввиду, что группа G изоморфна фактор группе $F(A)/\langle\langle R\rangle\rangle$, и называют $\langle A \mid R\rangle$ *копредставлением.* Группа называется *конечно порожденной*, если имеет копредставление $\langle A \mid R\rangle$ с конечным множеством образующих A, и *конечно представимой*, если имеет копредставление $\langle A \mid R\rangle$, в котором оба множества A и R — конечны.

6.2 Группа как метрическое пространство.

Пусть G — группа, и S — множество ее порождающих элементов (генераторов). Тогда каждый элемент g группы G представим (многими способами) в виде *слова* вида $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$, где $x_1, \ldots, x_n \in S$ и $\varepsilon_i = \pm 1$. Целое число $n \geq 0$ называется *длиной слова* (пустое слово, в котором по определению нет букв, имеет длину 0 и соответствует единице группы). Для $g, h \in G$ определим величину $d_S(g, h)$ равной длине кратчайшего слова, представляющего элемент $g^{-1}h$.

Лемма 6.1. *Функция d_S задает на G метрику.*

Доказательство. По определению функция d_S неотрицательна, и, кроме того, $d_S(g, h) = 0$, тогда и только тогда, когда слово $g^{-1}h$ представимо пустым словом, т.е. $g^{-1}h = e$, откуда $g = h$.

Симметричность расстояния вытекает из тождества $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Действительно, если $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ — слово минимальной длины, представляющее элемент $g^{-1}h$, то $h^{-1}g = x_n^{-\varepsilon_n} \cdots x_1^{-\varepsilon_1}$, поэтому $d_S(h, g) \leq d_S(g, h)$. Обратное неравенство доказывается точно так же, поэтому функция $d_S(g, h)$ симметрична, т.е. $d_S(g, h) = d_S(h, g)$.

Неравенство треугольника $d_S(g, h) + d_S(h, k) \geq d_S(g, k)$ вытекает из тождества $g^{-1}k = (g^{-1}h)(h^{-1}k)$, выполненного для произвольного $h \in G$. Действительно, если $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ и $y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}$ — слова минимальной длины, представляющие элементы $g^{-1}h$ и $h^{-1}k$ соответственно, то слово

$$x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}$$

представляет элемент $g^{-1}k$, поэтому $d_S(g,k) \leq m+n = d_S(g,h)+d_S(h,k)$, что и требовалось. Лемма доказана. $\square$

Замечание 6.2. Построенная метрика называется *word metric* и принимает целочисленные значения. Чтобы сравнивать ее с более привычными метриками, принимающими значения из $\mathbb{R}_{\geq 0}$, нам придется "смотреть с очень большого расстояния" или, что то же самое, считать единицу измерения очень маленькой.

Метрика d_S есть ни что иное, как расстояние на графе Кэли $\Gamma(G,S)$. Напомним, что граф Кэли группы G с набором образующих S строится так. Множество его вершин — это все элементы группы, при этом две вершины g и h соединены ребром, если и только если они отличаются на образующую, т.е. или $g^{-1}h$, или $h^{-1}g$ принадлежат S. Напомним, что длина пути в графе по определению равна количеству ребер в этом пути. Расстояние $d_S(g,h)$ равно длине кратчайшего пути в графе $\Gamma(G,S)$, соединяющего вершины g и h.

Разумеется, расстояние d_S зависит от выбора семейства образующих. Например, положив $S=G$, мы получим так называемую *дискретную метрику*, а именно, в этом случае $d_S(g,h)=1$ для любых двух различных элементов g и h. Такая метрика не особенно интересна. В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать конечно порожденные группы и выбирать в них конечные семейства образующих.

Для любой пары элементов g и h группы G можно так подобрать семейство образующих S, что $d_S(g,h) \leq 1$ (достаточно включить в семейство образующих S элемент $g^{-1}h$. Тем не менее, оказывается у таких метрик имеются свойства, не зависящие от выбора S. Именно они и являются предметом изучения *геометрической теории групп.*

6.2.1 Квази-изометрии.

Пусть $\lambda > 0$ и $k \geq 0$ — фиксированные числа. Отображение $f\colon X \to X'$ метрического пространства (X,d) в метрическое пространство (X',d') называется (λ,k)-*квази-изометрическим*, если

$$\frac{1}{\lambda}d(x,y)-k \leq d'\big(f(x),f(y)\big) \leq \lambda d(x,y)+k$$

для всех $x,y \in X$.

Замечание 6.3. Если для некоторых положительных λ_1 и λ_2 и неотрицательных k_1 и k_2 выполнено

$$\frac{1}{\lambda_1}d(x,y)-k_1 \leq d'\big(f(x),f(y)\big) \leq \lambda_2 d(x,y)+k_2,$$

то f — квази-изометрическое для $\lambda = \max\{\lambda_1,\lambda_2\}$ и $k=\max\{k_1,k_2\}$.

В отличие от случая изометрии ($\lambda=1$, $k=0$), в квази-изометрическое отображение f не обязано быть ни непрерывным, ни инъективным.

Пример 6.4. Функция Дирихле $f\colon [0,1] \to [0,1]$, заданная на отрезке $[0,1]$ и переводящая каждое рациональное число в 1, а каждое иррациональное — в 0 является $(1,1)$ квази-изометрическим отображением. Действительно, в этом случае $d(x,y) - 1 \le 0$, а $d(x,y) + 1 \ge 1$, откуда

$$d(x,y) - 1 \le 0 \le d'\big(f(x), f(y)\big) \le 1 \le d(x,y) + 1,$$

что и требовалось.

Отображение $f\colon X \to X'$ называется *почти сюръекцией*, если каждая точка из X' находится на ограниченном расстоянии от образа отображения f, т.е. существует такое $c > 0$, что для любого $x' \in X'$ найдется $x \in X$, для которого $d'\big(f(x), x'\big) < c$.

Два отображения $f\colon X \to X'$ и $g\colon X \to X'$ называются *близкими*, если существует константа $c > 0$ такая, что $d'\big(f(x), g(x)\big) < c$ для всех $x \in X$.

Два отображения $f\colon X \to X'$ и $g\colon X' \to X$ называются *почти взаимно обратными*, если отображение $f \circ g$ близко к $\mathrm{id}_{X'}$, а отображение $g \circ f$ близко к id_X.

Определение 6.5. Два метрических пространства (X,d) и (X',d') называются *квази-изометричными*, если существуют почти взаимно обратные квази-изометрические отображения $f\colon X \to X'$ и $f'\colon X' \to X$. Сами отображения f и f' в этом случае называются *квази-изометриями.*

Утверждение 6.6. *Квази-изометрическое отображение $f\colon X \to X'$ является квази-изометрией, если и только если f почти сюръективно.*

Доказательство. Пусть сначала f квази-изометрия. Тогда, по определению, существует почти обратная к ней квази-изометрия $f'\colon X' \to X$. В частности, отображение $f \circ f'$ близко к $\mathrm{id}_{X'}$. Последнее означает, что существует такая константа $c > 0$, что для любой точки x' выполнено неравенство $d'\big(f \circ f'(x'), x'\big) < c$, из которого вытекает почти сюръективность f (достаточно для x' взять $x = f'(x')$).

Обратно, пусть квази-изометрическое отображение f почти сюръективно. Построим почти обратное квази-изометрическое отображение. Так как f почти сюръекция, существует такое $c > 0$, что для каждого $x' \in X'$ существует $x \in X$, для которого выполнено неравенство $d'\big(f(x), x'\big) < c$. Определим отображение $f'\colon X' \to X$, положив $f'(x') = x$. Проверим сначала, что f и f' почти взаимно обратны. Действительно, $f \circ f'(x') = f(x)$, поэтому $d'\big(f \circ f'(x'), x'\big) < c$ для всех $x' \in X'$, т.е. $f \circ f'$ близко к $\mathrm{id}_{X'}$. Теперь воспользуемся тем, что отображение f — квази-изометрическое для некоторых (λ, k). Так как

$$\frac{1}{\lambda} d(x,y) - k \le d'\big(f(x), f(y)\big) \quad \text{для всех } x \text{ и } y,$$

то для $x = f'\big(f(x)\big)$ и $y = x$ имеем:

$$d\big(f' \circ f(x), x\big) \le \lambda d'\big(f \circ f' \circ f(x), f(x)\big) + \lambda k \le \lambda(c + k),$$

где последнее неравенство справедливо, поскольку $d'\big(f \circ f'(x'), x'\big) < c$ для всех $x' \in X'$, как мы уже доказали выше. Поэтому отображение $f' \circ f$ близко к id_X (с постоянной $\lambda(c+k)$). Итак, отображения f и f' почти взаимно обратны.

Покажем теперь, что f' также квази-изометрическое. Пусть x' и y' — произвольные точки из X'. Тогда

$$\begin{aligned} d\big(f'(x'), f'(y')\big) &\le \lambda d'\big(f \circ f'(x'), f \circ f'(y')\big) + \lambda k \le \\ &\le \lambda\Big(d'\big(f \circ f'(x'), x'\big) + d'(x', y') + d'\big(y', f \circ f'(y')\big)\Big) + \lambda k \le \\ &\le \lambda\big(c + d'(x', y') + c\big) + \lambda k = \lambda d'(x', y') + \lambda(2c + k). \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство следует из квази-изометричности f, второе из неравенства треугольника, а третье — из близости $f \circ f'$ и $\mathrm{id}_{X'}$.

Наконец, снова из квази-изометричности f, неравенства треугольника и близости $f \circ f'$ и $\mathrm{id}_{X'}$, получаем

$$\begin{aligned} d\big(f'(x'), f'(y')\big) &\ge \frac{1}{\lambda} d'\big(f \circ f'(x'), f \circ f'(y')\big) - \frac{k}{\lambda} \ge \\ &\ge \frac{1}{\lambda}\Big(d'(x', y') - d'\big(x', f \circ f'(x')\big) - d'\big(f \circ f'(y'), y'\big)\Big) - \frac{k}{\lambda} \ge \\ &\ge \frac{1}{\lambda}\big(d'(x', y') - c - c\big) - \frac{k}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} d'(x', y') - \frac{2c + k}{\lambda}. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться замечанием к определению квази-изометрического отображения. □

Пример 6.7. Метрические пространства $(\mathbb{Z}, d)$ и $(\mathbb{R}, d)$, где $d(x, y) = |x - y|$, квази-изометричны. Действительно, вложение $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ является изометричным вложением, т.е. $(1, 0)$-квази-изометрическое. Оно так же является почти сюръекцией для $c = 1/2$. В данном случае легко построить почти обратную квази-изометрию, отобразив $x \in \mathbb{R}$ в целую часть $[x]$ (т.е. в максимальное не превосходящее x целое). Полученное отображение будет $(1, 1)$-квази-изометрией (сюръективной).

Пример 6.8. Предыдущий пример легко обобщается так. Пусть $\Gamma = \Gamma(G, S)$ — граф Кэли конечно порожденной группы G с множеством образующих S. Превратим этот граф сначала в топологическое пространство, склеив его из отрезков-ребер по отношению инцидентности. Каждое ребро-отрезок отождествим с экземпляром отрезка $[0, 1]$ и превратим Γ в метрическое пространство, определив расстояние δ_S между точками как длину кратчайшего пути по графу (длина пути определяется как сумма длин составляющих его отрезков и подотрезков). Ограничение функции δ_S на множество вершин графа Γ совпадает с определенной выше word metric d_S. Поэтому, вложение множества вершин (G, d_S) в (Γ, δ_S) является изометрией. Так как расстояние от произвольной точки графа Γ до ближайшей вершины не превосходит $1/2$, то это вложение почти сюръективно и, поэтому, является квази-изометрией.

Пример 6.9. Каждое ограниченное метрическое пространство X квази-изометрично точке, так как отображение его в точку является $(1, \operatorname{diam} X)$-квази-изометрической сюръекцией.

Пример 6.10. Решетка $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ квази-изометрична $\mathbb{R}^2$ (расстояния и там и там — стандартные).

Утверждение 6.11. *Пусть S и T — разные семейства генераторов одной и той же конечно-порожденной группы G. Тогда (G, d_S) квази-изометрично (G, d_T).*

Доказательство. Действительно, рассмотрим множество состоящее из слов, выражающих генераторы из множества S через элементы множества T, а также из слов, выражающих генераторы из T через S, и пусть λ — максимальная длина слова из этого конечного множества. Тогда тождественное отображение id_G является $(\lambda, 0)$-квази-изометрией. □

Упражнение 6.12. Отношение квази-изометричности — это отношение эквивалентности *(*достаточно проверить, что композиция квази-изометрий является квази-изометрией*)*.

6.2.2 Геодезические и Квази-геодезические

Геодезической в метрическом пространстве (X, d) называется изометричное вложение $\gamma\colon [0, L] \to X$, где отрезок $[0, L]$ рассматривается со стандартной метрикой. Точки $\gamma(0)$ и $\gamma(L)$ в этом случае называются *началом* и *концом* геодезической γ. Пространство X называется *геодезическим* или *пространством со строго внутренней метрикой*, если любые две его точки соединяются геодезической. Очевидно, что каждая геодезическая непрерывна.

Квази-геодезической или (λ, k)-*квази-геодезической* в метрическом пространстве (X, d) называется отображение каждое $\gamma\colon [a, b] \to X$, являющееся (λ, k)-квази-изометрическим. Пространство X называется (λ, k)-*квази-геодезическим*, если любые две его точки соединяются (λ, k)-квази-геодезической.

Пример 6.13. Конечное метрическое пространство диаметра d является $(1, d)$-квази-геодезическим.

Пример 6.14. Пространство вершин V связного графа $G = (V, E)$ с расстоянием, заданным с помощью путей, представляет собой $(1, 1)$-квази-геодезическое метрическое пространство. Действительно, для произвольной пары вершин p и q рассмотрим путь s в графе G, количество ребер которого равно расстоянию $d(p, q)$ между этими вершинами, и отождествим этот путь с отрезком длины $d(p, q)$, разбитым на отрезки единичной длины точками $p = x_0 < x_1 < \cdots < x_d = q$. Тогда отображение γ, переводящее полуинтервалы $[x_i, x_{i+1})$, $i = 0, \ldots, d - 1$, в последовательные вершины пути s, а последнюю точку $x_d = q$ в вершину q, будет $(1, 1)$-квази-изометрическим.

В частности, если G — группа, порожденная конечным множеством образующих S, то пространство (G, d_S) является $(1,1)$-квази-геодезическим.

Пример 6.15. Пространство $\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}, d(x,y) = |x-y|\big)$ не является геодезическим (никакие две точки $x < 0$ и $y > 0$ не соединены непрерывной кривой, а значит и геодезической), но является $(1,\varepsilon)$-квази-геодезическим для любого $\varepsilon > 0$. В качестве квази-геодезической, соединяющей точки $x < 0$ и $y > 0$ можно взять отображение отрезка $[x, y]$ в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, тождественное вне $0 \in [x, y]$ и переводящее 0 в любую точку проколотой $\varepsilon/2$-окрестности нуля.

Замечание 6.16. Пространство $\big(\mathbb{R}\setminus\{0\}, d(x,y) = |x-y|\big)$ квази-изометрично $\mathbb{R}$, так как включение $\mathbb{R} \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ является изометрическим и почти сюръективным отображением.

6.2.3 Лемма Шварца–Милнора (Švarc–Milnor)

Мы приведем тут две формулировки, геометрическую и более важную для дальнейшего топологическую.

Утверждение 6.17 (Geometrical Švarc–Milnor Lemma)**.** *Пусть группа G действует на метрическом пространстве (X, d) изометриями. Предположим, что X является (λ, k)-квази-геодезическим, $k > 0$, а также что существует подмножество $B \subset X$, удовлетворяющее следующим свойствам*:

- *диаметр B конечен,*
- *G-сдвиги множества B покрывают все X, т.е. $X = \cup_{g \in G} (g \cdot B)$,*
- *если B' — $2k$-окрестность множества B, т.е. $B' = U_{2k}(B) = \big\{x \in X \mid \exists y \in B : d(x,y) \leq 2k\big\}$, то множество $S = \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ конечно.*

Тогда

(1) *группа G порождается множеством S, в частности, G конечно порождена,*

(2) *для каждого элемента $x \in X$ определяемое действием отображение $f_x \colon G \to X$, $f_x(g) = g \cdot x$, переводящее G в орбиту элемента x, является квази-изометрией пространства (G, d_S) на (X, d).*

Доказательство. Мы покажем сначала, что произвольный элемент $g \in G$ выражается через элементы множества S. Для этого фиксируем произвольный элемент $x \in B$ и рассмотрим (λ, k)-квази-геодезическую γ, соединяющую x и $g \cdot x$. Пусть $\gamma \colon [0, L] \to X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = g \cdot x$. Построим разбиение отрезка $[0, L]$, откладываю от нуля равные отрезки величины k/λ. Для этого положим $n = \lceil L\lambda/k \rceil \geq 1$, где через $\lceil x \rceil$ обозначено ближайшее к x не меньшее целое, и построим точки t_j, $j = 0, \ldots, n$, положив $t_j = jk/\lambda$,

$j = 0, \ldots, n-1$, и $t_n = L$. Рассмотрим точки $x_j = \gamma(t_j)$. Заметим, что $x_0 = x$ и $x_n = g \cdot x$.

Так как множества $g \cdot B$ покрывают все пространство X, то для каждого j существует g_j такой, что $x_j \in g_j \cdot B$. При этом выберем $g_0 = 1$ и $g_n = g$ (напомним, что $x \in B$). Так как γ — это (λ, k)-квази-изометрическое отображение, то

$$d(x_{j-1}, x_j) = d\big(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)\big) \le \lambda |t_{j-1} - t_j| + k \le \lambda \frac{k}{\lambda} + k = 2k, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

поэтому, так как $x_{j-1} \in g_{j-1} \cdot B$, то $x_j \in U_{2k}(g_{j-1} \cdot B) = g_{j-1} \cdot U_{2k}(B) = g_{j-1} \cdot B'$. С другой стороны, $x_j \in g_j \cdot B \subset g_j B'$, откуда $g_j \cdot B' \cap g_{j-1} B'$ не пусто, значит не пусто и $(g_{j-1}^{-1} g_j) \cdot B' \cap B'$, откуда, по определению, элементы $s_j = g_{j-1}^{-1} g_j$, $j = 1, \ldots, n$, принадлежат S. Остаётся заметить, что

$$g = g_n = g_{n-1} g_{n-1}^{-1} g_n = g_{n-1} s_n = \cdots = g_0 s_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_n \in S,$$

так как $g_0 = 1$, что и требовалось.

Покажем теперь, что (G, d_S) и (X, d) квази-изометричны. Для этого мы покажем, что отображение $f_x \colon G \to X$, $f_x \colon g \mapsto g \cdot x$ квази-изометрическое и почти сюръективное. Прежде всего, так как G действует на X изометриями и образы B покрывают все X, можно предполагать не ограничивая общности, что $x \in B$.

Покажем сначала, что f_x почти сюръективно. Действительно, для произвольного $x' \in X$ существует такой $g \in G$, что $x' \in g \cdot B$, откуда $d\big(x', f_x(g)\big) \le \operatorname{diam} B$, а диаметр B предполагается конечным. Поэтому каждая точка $x' \in X$ удалена от образа $f_x(G)$ не более чем на конечное число, равное $\operatorname{diam} B$, значит f_x — почти сюръекция.

Теперь перейдем к доказательству квази-изометричности отображения f_x. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$ и сначала оценим $d\big(f_x(1), f_x(g)\big)$. Для этого снова рассмотрим ту же (λ, k)-квази-геодезическую $\gamma \colon [0, L] \to X$, соединяющую точки $x = f_x(1)$ и $g \cdot x = f_x(g)$. Как и выше, положим $n = \lceil L\lambda / k \rceil \ge 1$, тогда

$$\begin{aligned} d\big(f_x(1), f_x(g)\big) = d(x, g \cdot x) = d\big(\gamma(0), \gamma(L)\big) \ge \frac{1}{\lambda}|L - 0| - k \ge \frac{k(n-1)}{\lambda^2} - k = \\ = \frac{k}{\lambda^2} n - \frac{k}{\lambda^2} - k \ge \frac{k}{\lambda^2} d_S(e, g) - \frac{k}{\lambda^2} - k, \end{aligned}$$

где последнее неравенство вытекает из соотношения $d_S(e, g) \le n$, которое следует из разложения $g = s_1 \cdots s_n$, полученного выше.

Получим теперь противоположную оценку. Предположим что $d_S(e, g) = n$, тогда существует разложение $g = s_1 \cdots s_n$, где $s_i \in S \cup S^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} & d\big(f_x(1), f_x(g)\big) = d(x, g \cdot x) \le \\ & \quad \le d(x, s_1 \cdot x) + d(s_1 \cdot x, s_1 s_2 \cdot x) + \cdots + d(s_1 \cdots s_{n-1} \cdot x, s_1 \cdots s_n \cdot x) = \\ & \qquad = d(x, s_1 \cdot x) + d(x, s_2 \cdot x) + \cdots + d(x, s_n \cdot x). \end{aligned}$$

Лемма 6.18. *Если $s \in S$ и $x \in B$, то $d(x, s \cdot x) \leq 2(\operatorname{diam} B + 2k)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что если $z \in B' = U_{2k}(B)$, то $d(x,z) \leq \operatorname{diam} B + 2k$. По предположению $s \cdot B' \cap B'$ не пусто, поэтому, если z — точка из этого пересечения, т.е. $z \in B'$ и $z = s \cdot z'$ для некоторой точки $z' \in B'$, то, как мы только что отметили, $d(x,z) \leq \operatorname{diam} B + 2k$, и, кроме того, $d(s \cdot x, z) = d(s \cdot x, s \cdot z') = d(x, z') \leq \operatorname{diam} B + 2k$. Поэтому, $d(x, s \cdot x) \leq d(x,z) + d(z, s \cdot x) \leq 2(\operatorname{diam} B + 2k)$, что и требовалось. □

Таким образом, применяя лемму 6.18 к предыдущему неравенству, имеем:

$$d\big(f_x(1), f_x(g)\big) \leq 2n(\operatorname{diam} B + 2k) = (2 \operatorname{diam} B + 4k) d_s(e, g).$$

Остаётся заметить, что для произвольных $g, h \in G$ выполнены равенства

$$d\big(f_x(g), f_x(h)\big) = d\big(f_x(1), f_x(g^{-1}h)\big), \qquad d_S(g,h) = d_S(1, g^{-1}h),$$

поэтому предыдущие оценки показывают квази-изометричность отображения f_x. Утверждение доказано. □

Перейдем к топологической формулировке. Напомним несколько определений. Метрическое пространство называется *собственным* (*proper*), если все шары конечного радиуса компактны в соответствующей метрической топологии. Действие $G \times X \to X$ группы G на топологическом пространстве X называется *собственным* (*proper*), если для каждого компакта $B \subset X$ множество $S = \{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ конечно. Действие $G \times X \to X$ группы G на топологическом пространстве X называется *кокомпактным*, если факторпространство X/G компактно в фактор топологии.

Пример 6.19. Действие $\mathbb{Z}^k$ в $\mathbb{R}^k$ сдвигами является собственным и кокомпактным (факторпространство гомеоморфно k-мерному тору). Аналогично, действие фундаментальной группы связного компактного многообразия на его универсальном накрытии также является собственным и кокомпактным. Действие $\mathbb{Z}$ на окружности, порождённое поворотом на π-иррациональный угол не является собственным. Действие $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}^2$ горизонтальными сдвигами собственно но не кокомпактно (фактор — цилиндр).

Следствие 6.20 (Topological Švarc–Milnor Lemma)**.** *Пусть G — группа, действующая изометриями на собственном метрическом пространстве (X,d) со строго внутренней метрикой. Предположим также, что это действие собственное и кокомпактное. Тогда G конечно порождена, и для каждого $x \in X$ отображение $f_x \colon G \to X$, $f_x(g) = g \cdot x$ является квази-изометрией.*

Доказательство. В сделанных предположениях, пространство X является $(1,\varepsilon)$-квази-геодезическим для любого $\varepsilon > 0$. Чтобы применить утверждение 6.17, нам нужно построить множество B. В силу собственности действия группы, нам достаточно найти компакт B конечного диаметра, G-сдвиги которого покрывают все X. Действительно, замкнутая окрестность

$B' = U_{2k}(B)$ такого компакта является замкнутым подмножеством некоторого замкнутого шара, который, в свою очередь, компактен по предположению. Поэтому B' — компакт, и множество $S = \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ конечно по предположению.

Построим такой компакт B. Обозначим через $\pi\colon X \to X/G$ каноническую проекцию на фактор пространство. Рассмотрим семейство открытых шаров $\big\{O_r(x)\big\}_{x\in X}$ фиксированного радиуса $r > 0$. Покажем, что семейство $\Big\{V_x = \pi\big(O_r(x)\big)\Big\}$ образует открытое покрытие фактор пространства X/G. Действительно, π-прообраз множества V_x представляет собой орбиту шара $O_r(x)$ под действием группы G, и, так как группа G действует на X изометриями (и, в частности, гомеоморфизмами), является объединение открытых множеств $g \cdot O_r(x)$ и, поэтому открыт. Поэтому V_x открыто в фактор топологии.

Далее, в силу кокомпактности действия, т.е. компактности X/G, можно выбрать из открытого покрытия $\{V_x\}$ конечное подпокрытие $\{V_{x_i}\}$. Тогда орбиты шаров $O_r(x_i)$ покрывают все X, поэтому в качестве множества B можно взять конечное объединение соответствующих замкнутых шаров $U_r(x_i)$. Множество $B = \cup_i U_r(x_i)$ ограничено, компактно, и его орбита покрывает все X.

Таким образом, мы находимся в условиях геометрической леммы Шварца–Милнора (утверждение 6.17). Следствие доказано. $\square$

Приведем теперь некоторые характерные примеры использования леммы Шварца–Милнора. Напомним, что индексом подгруппы называется число ее смежных классов.

Следствие 6.21. *Подгруппа конечного индекса в конечно порожденной группе сама конечно порождена и квази-изометрична объемлющей группе.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа конечного индекса в группе G, и S — конечное множество генераторов группы G. Рассмотрим действие группы H на (G, d_S) левыми сдвигами. Проверим, что это действие находится в условиях леммы Шварца–Милнора (Утверждение 6.17). Действительно, левые сдвиги — изометрии метрики d_S, метрическое пространство (G, d_S) является $(1,1)$-квази-геодезическим (см. пример в предыдущем разделе). Далее, так как индекс подгруппы H конечен, то множество G/H смежных классов конечно. Выберем в каждом классе по представителю и составим из них конечное множество B. Диаметр B конечен, H-сдвиги множества B покрывают всю группу G, множество $B' = U_2(B)$ конечно, поскольку конечны и само B, и множество S. Наконец, конечно и множество $\{h \in H \mid h \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$, так как каждый его элемент имеет вид $g_2 g_1^{-1}$ для некоторых g_1 и g_2 из конечного множества B'.

Таким образом, в силу утверждения 6.17, группа H конечно порождена и, рассматриваемая как метрическое пространство с метрикой, порожденной любым конечным набором ее образующих, квази-изометрична пространству (G, d_S), что и требовалось. При этом квази-изометрией является стандартное включение $H \subset G$, поскольку H совпадает с орбитой элемента $1 \in G$. $\square$

Две группы называются *соизмеримыми* (*commensurable*), если они содержат изоморфные подгруппы конечного индекса. Так как пересечение двух подгрупп конечного индекса само является подгруппой конечного индекса (смежные классы пересечения суть пересечения смежных классов), то отношение соизмеримости является отношением эквивалентности.

Более общо, две группы G и H называются *слабо соизмеримыми*, если они содержат подгруппы конечного индекса $G' \subset G$ и $H' \subset H$, которые, в свою очередь, содержат конечные (?) нормальные подгруппы $N \subset G'$ и $M \subset H'$, для которых фактор-группы G'/N и H'/M изоморфны.

Упражнение 6.22. Проверить, что отношение слабой соизмеримости является отношением эквивалентности на классе всех групп.

Следствие 6.23. *Пусть G — произвольная группа.*

- *Пусть $G' \subset G$ — подгруппа конечного индекса. Тогда G' конечно порождена, если и только если G конечно порождена. Если же обе эти группы конечно порождены, то они квази-изометричны.*
- *Пусть N — конечная нормальная подгруппа. Фактор-группа G/N конечно порождена, если и только если G конечно порождена. Если же обе эти группы конечно порождены, то они квази-изометричны.*

В частности, если G конечно порождена, то любая группа слабо соизмеримая с G также кончено порождена и квази-изометрична G.

Доказательство. **1.** Если G конечно порождена, то все доказано, благодаря следствию 6.21. Обратно, если $G' \subset G$ — конечно порождённая подгруппа конечного индекса, то, добавив к множеству генераторов группы G' конечное множество представителей смежных классов G/G', получим конечное множество образующих для всей группы G. Но теперь снова применимо следствие 6.21. Первое утверждение доказано.

2. Если G конечно порождена, то G/N тем более. Обратно, если G/N конечно порождена, то сама группа G порождается объединением конечного множества прообразов генераторов при канонической проекции $G \to G/N$ и конечного множества N.

Пусть теперь обе группы G и G/N конечно порождены, и S — конечное семейство образующих в G/N. Группа G действует на G/N так: если $[g] \in G/N$ — смежный класс элемента g, то $g \cdot [x] = [g][x] = [gx]$. Отображение $[x] \mapsto [g][x]$ — это, очевидно, изометрия пространства $(G/N, d_S)$, так как это просто левый сдвиг на $[g]$. В качестве B выберем одноэлементное множество $\big\{[1]\big\}$. Так как проекция $G \to G/N$ сюръективна, семейство множеств $\big\{g \cdot [1]\big\} = \big\{[g]\big\}$ покрывает G/H. Наконец, множество $B' = U_2([1])$ конечно, поэтому конечно и множество $\{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$, так как если g принадлежит ему, то $[g][x_1] = [x_2]$ для некоторых $[x_i] \in B'$, откуда $[g] =$

$[x_1^{-1}x_2]$, т.е. $g \in [x_1^{-1}x_2]$, а каждый смежный класс конечен. Таким образом, мы находимся в условиях геометрической леммы Шварца–Милнора, что и требовалось. □

6.2.4 Подгруппы свободных групп

Оказывается, подгруппа свободной группы может иметь больший ранг, чем исходная группа. Для доказательства свободности нам будет полезно следующее утверждение.

Лемма 6.24 (О пинг-понге)**.** *Пусть группа G порождена двумя элементами x и y и действует на некотором множестве M, содержащем непустые непересекающиеся подмножества X и Y так, что $x^n \cdot Y \subset X$ и $y^n \cdot X \subset Y$ для всех ненулевых целых n. Тогда группа G свободна, причем $G = F(x, y)$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что любое непустое несократимое слово w, составленное из элементов x и y и к ним обратных не действует нетривиально и, поэтому, не равно тождественному. Без ограничения общности можно считать, что слово w начинается и заканчивается на ненулевую степень x (если это не так, рассмотрим сопряженное слово $x^{-1}wx$ или xwx^{-1}). Тогда

$$w \cdot Y = x^{n_1}y^{m_1}\cdots y^{m_p}x^{n_p} \cdot Y \subset x^{n_1}y^{m_1}\cdots y^{m_p} \cdot X \subset \cdots \subset x^{n_1} \cdot Y \subset X,$$

что и требовалось. □

Пример 6.25. Подгруппа H группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, порождённая матрицами

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{и} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

является свободной группой ранга 2. Действительно, рассмотрим действие группы H на $\mathbb{R}^2$, и положим $X = \big\{(u, v) \mid |u| > |v|\big\}$ и $Y = \big\{(u, v) \mid |u| < |v|\big\}$. Тогда мы находимся в условиях леммы 6.24.

Упражнение 6.26. Покажите, что подгруппа H группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ из предыдущего примера является подгруппой конечного индекса. Поэтому $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ соизмерима с F_2 и квази-изометрична любой свободной группе ранга $n \geq 2$.

Следующая лемма обобщает лемму 6.24 и доказывается точно так же.

Лемма 6.27 (О пинг-понге произвольного ранга)**.** *Пусть группа G порождена множеством образующих X и действует на некотором множестве M, содержащем непустые попарно непересекающиеся подмножества M_x, $x \in X$, так, что $x^n \cdot M_y \subset M_x$ для любых различных $x, y \in X$ и всех ненулевых целых n. Тогда группа G свободна, причем $G = F(X)$.*

Пример 6.28. Рассмотрим свободную группу $F(a,b)$ и в ней семейство элементов $X = \{a, b^{-1}ab, b^{-2}ab^2, \dots\}$. Покажем, что подгруппа $H \subset F(a,b)$, порожденная X, свободна и равна $F(X)$. Для этого рассмотрим действие H на $F(a,b)$ умножением слева и подмножества $M_j \subset F(a,b)$, $j = 1, 2, \dots$, определенные так: $M_j = \{b^{-j}a^k \cdots\}$, где k отлично от нуля. Тогда ясно, что

$$\left(b^{-i}ab^i\right)^n \cdot M_j \subset M_i, \quad \text{при любых различных } i \text{ и } j,$$

и мы находимся в условиях леммы 6.27.

Пример 6.29. Пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Свободная группа $F(x,y)$ ранга 2 содержит в качестве подгруппы конечного индекса свободную группу любого ранга n. Действительно, достаточно рассмотреть множество G_k всех слов, составленных из x и y и таких, что их длины делятся на k. Порожденная ими подгруппа имеет индекс k (смежный класс состоит из слов с фиксированным остатком от деления на k). По теореме Шрайера–Нильсена любая подгруппа свободной группы свободна, см. например [11], а теорема Шрайера, см. [11], утверждает, что ранг n подгруппы индекса k в свободной группе ранга m может быть вычислен по формуле $n = 1 + k(m-1)$, откуда, так как в нашем случае $m = 2$, заключаем, что $n = k+1$. Например, подгруппа из чётных слов имеет индекс $k = 2$ и ранг $n = 3$. Если a и b — свободные образующие в F_2, то в качестве образующих в G_3 можно взять a^2, b^2 и ab (проверьте).

Итак, любая свободная группа ранга $n \geq 2$ изоморфна подгруппе конечного индекса в F_2, поэтому по следствию 6.21 все свободные группы конечного ранга $n \geq 2$ соизмеримы и квази-изометричны друг другу.

Замечание 6.30. Квази-изометричные группы, вообще говоря, не должны быть соизмеримыми.

6.2.5 Фундаментальная группа

Напомним стандартные топологические определения. Пусть X — топологическое пространство, и $x_0 \in X$ — фиксированная точка. *Петлей* в точке x_0 называется непрерывная кривая $\gamma\colon [0,1] \to X$ такая, что $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Будем рассматривать петли с точностью до непрерывной гомотопии с фиксированной точкой, а именно, две петли γ_0 и γ_1 назовем *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $\Gamma\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ такое, что $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ для любого $t \in [0,1]$, и $\Gamma(0,s) = \Gamma(1,s) = x_0$ для любого $s \in [0,1]$. Другими словами, найдется непрерывное семейство петель $\gamma_s\colon [0,1] \to X$ в точке x_0, соединяющее петли γ_0 и γ_1.

Очевидно, отношение гомотопности с фиксированной точкой представляет сбой отношение эквивалентности на множестве петель. Множество классов эквивалентности обозначим через $\pi_1(X,x_0)$. Множество $\pi_1(X,x_0)$ образует группу относительно операции “последовательного прохождения”, которая определяется так:

$$[\gamma][\sigma] = [\gamma\sigma], \qquad (\gamma\sigma)(t) = \left[\begin{array}{ll} \gamma(2t), & t \in [0,1/2], \\ \sigma(2t-1) & t \in [1/2,1]. \end{array} \right.$$

Петля α в точке x_0 определена корректно, поскольку $\alpha(0) = \gamma(0) = x_0 = \sigma(1) = \alpha(1)$ и $\alpha(1/2) = \gamma(1) = \sigma(0) = x_0$. Ассоциативность очевидна. Нейтральный элемент — класс постоянной петли $o(t) = x_0$, $t \in [0,1]$, состоящий из стягиваемых в точку x_0 петель (с неподвижными концами), а элемент, обратный к $[\gamma]$ — класс эквивалентности петли $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$.

Определение 6.31. Группа $\pi_1(X, x_0)$ называется *фундаментальной группой* пространства X с отмеченной точкой x_0.

Упражнение 6.32. Фундаментальная группа $\mathbb{R}^n$ тривиальна. Более общо, пространство X называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке. Фундаментальная группа стягиваемого пространства тривиальна.

Утверждение 6.33. *Пусть x_0 и x_1 — две разные точки линейно связного топологического пространства X. Тогда группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны.*

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть непрерывный путь $\alpha\colon [0,1] \to X$, соединяющий $x_0 = \alpha(0)$ и $x_1 = \alpha(1)$, и для каждой петли γ в x_1 построить петлю $\alpha\gamma\bar{\alpha}$ в x_0, которая получается последовательным прохождением пути α от x_0 к x_1, петли γ и пути $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ — того же пути α, но от x_1 к x_0. Легко проверить, что отображение $[\gamma] \mapsto [\alpha\gamma\bar{\alpha}]$ задает изоморфизм групп. Ясно также, что этот изоморфизм зависит от выбора пути α. □

Замечание 6.34. Утверждение 6.33 позволяет говорить о фундаментальной группе линейно связного топологического пространства, не указывая при этом отмеченную точку. В этом случае фундаментальная группа рассматривается с точностью до изоморфизма.

Упражнение 6.35. Фундаментальная группа S^1 изоморфна $\mathbb{Z}$. Фундаментальная группа букета окружностей — свободна, причем ее ранг равен числу окружностей в букете.

Замечание 6.36. По определению, точка $\gamma\sigma(1/2) = x_0$ может смещаться при гомотопии.

Упражнение 6.37. Постройте гомотопию, стягивающую в точку петлю $\gamma\bar{\gamma}$.

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Каждой петле $\gamma\colon [0,1] \to X$ в $x_0 \in X$ соответствует петля $f \circ \gamma\colon [0,1] \to Y$ в точке $y_0 = f(x_0)$, поэтому возникает отображение $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, определенное так: $f_*\big([\gamma]\big) = [f \circ \gamma]$.

Утверждение 6.38. *Отображение $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ — определено корректно и является гомоморфизмом групп. Гомотопные отображения задают одинаковые гомоморфизмы.*

Следствие 6.39. *Гомотопически эквивалентные топологические пространства имеют изоморфные гомотопические группы.*

Упражнение 6.40. Фундаментальная группа произвольного графа свободна. Её ранг равен мощности множества фундаментальных циклов графа.

6.2.6 Накрытия и фундаментальные группы

Пусть X и T — линейно связные топологические пространства. Отображение $p\colon T \to X$ называется *накрытием*, если для любой точки $x \in X$ найдется такая ее открытая окрестность $U(x)$, что полный прообраз $p^{-1}\big(U(x)\big)$ гомеоморфен $U(x) \times D$, где D — дискретное топологическое пространство, причем, если $\Phi\colon U \times D \to p^{-1}(U)$ — соответствующий гомеоморфизм, то $p \circ \Phi(u,d) = u$ для любого $u \in U$ и $d \in D$. Пространство X называется *базой* накрытия, пространство T — *накрывающим* или *тотальным* пространством. Каждая окрестность точки x с указанным свойством называется *элементарной*. Множество $p^{-1}(x)$ для фиксированной точки $x \in X$ называется *слоем* над x. Ясно, что каждый слой гомеоморфен D.

Лемма 6.41 (о накрывающем пути)**.** *Пусть $p\colon T \to X$ — накрытие, и $\gamma\colon [a,b] \to X$ произвольная непрерывная кривая с началом в точке $x = \gamma(a)$. Тогда для любой точки $t \in p^{-1}(x)$ слоя над x существует единственная непрерывная кривая $\tilde\gamma\colon [a,b] \to T$ такая, что $\tilde\gamma(a) = t$ и $p \circ \tilde\gamma = \gamma$.*

Доказательство. Для каждой точки $\gamma(s) \in X$, $s \in [a,b]$, существует элементарную окрестность U. Поэтому существует окрестность $I(s)$ точки $s \in [a,b]$ (интервал для внутренних точек и полуинтервал для концевых точек), образ которой содержится в элементарной окрестности точки $\gamma(s)$. Выберем конечное покрытие компакта $[a,b]$ последовательными окрестностями $I_i = I(s_i)$, $i = 1,\dots,k$, и пусть $s_1 = a$. Пусть U_1 — элементарная окрестность $\gamma(a)$, содержащая $\gamma(I_1)$. По определению накрытия, $p^{-1}(U_1)$ гомеоморфно $U_1 \times D$, причем существует единственное $d \in D$, для которого $\Phi(U_1,d) \subset p^{-1}(U_1)$ содержит t. При этом $W(t) = \Phi(U_1,d)$ — открытая окрестность точки t в T, гомеоморфная U_1. Этот последний гомеоморфизм однозначно определяет в $W(t)$ такую кривую $\tilde\gamma$ на I_1, что $p \circ \tilde\gamma = \gamma$ (на I_1). Если I_1 совпадает с $[a,b]$, то мы построили искомую кривую $\tilde\gamma$. Иначе рассмотрим следующую (вдоль $[a,b]$) окрестность I_2, выберем в ней точку s из пересечения с I_1, тогда определена точка $\tilde\gamma(s) \in T$, накрывающая $\gamma(s)$. Повторим только что описанную процедуру для фрагмента кривой γ на I_2 и построим однозначно определенное поднятие, начинающееся с $\tilde\gamma(s)$. В силу конечности выбранного покрытия, мы доберемся до b за конченое число шагов. □

Кривая $\tilde\gamma$ из леммы 6.41 называется *накрывающим путем* для γ.

Лемма 6.42 (о накрывающей гомотопии)**.** *Пусть $p\colon T\to X$ — накрытие, $f\colon Z\to X$ непрерывное отображение, и $F\colon Z\times[0,1]\to X$ — гомотопия отображения f, т.е., $F(z,0)=f(z)$. Предположим, что существует накрывающее отображение $\tilde f\colon Z\to T$, т.е. такое отображение, что $p\circ\tilde f=f$. Тогда существует накрывающая гомотопия $\tilde F\colon Z\times[0,1]\to T$, т.е. такая гомотопия отображения $\tilde f$, что $p\circ\tilde F=F$.*

Доказательство. Гомотопия $F\colon Z\times[0,1]\to X$ задает семейство непрерывных кривых $\gamma_z(s)=F(z,s)$ на базе X, при этом для каждой начальной точки $\gamma_z(0)\in X$ определена “накрывающая” точка $t_z=\tilde f(z)\in p^{-1}\bigl(\gamma_z(0)\bigr)$ в накрывающем пространстве, поэтому, по лемме 6.41, определена кривая $\tilde\gamma_z\colon[0,1]\to T$, накрывающая γ_z. Отображение $\tilde F(z,s)=\tilde\gamma_z(s)$ задает требуемую гомотопию. □

Утверждение 6.43. *Пусть $p\colon T\to X$ — накрытие, тогда $p_*\colon\pi_1(T,t_0)\to\pi(X,x_0)$, где $p(t_0)=x_0$, — мономорфизм.*

Доказательство. Действительно, если образ $p_*\bigl([\gamma]\bigr)$ класса петель $[\gamma]$ оказывается гомотопным точке (т.е. класс $[\gamma]$ в ядре гомоморфизма p_*), то по лемме 6.42 о накрывающей гомотопии петля γ тоже стягивается, что и требовалось. □

Подгруппа $p_*\bigl(\pi_1(T,t_0)\bigr)$ называется *группой накрытия*. Далее, подгруппы $p_*\bigl(\pi_1(T,t_0)\bigr)$ и $p_*\bigl(\pi_1(T,t_1)\bigr)$ для разных точек t_0 и t_1 из одного слоя $p^{-1}(x_0)$ сопряжены друг с другом с помощью элемента из $\pi_1(X,x_0)$, соответствующего петле, получающейся проекцией пути в T, соединяющего t_0 и t_1.

Подгруппа $p_*\bigl(\pi_1(T,t_0)\bigr)$ не обязана быть нормальной. Однако, множество $\pi_1(X,x_0)/p_*\bigl(\pi_1(T,t_0)\bigr)$ смежных классов определено всегда и имеет прозрачный топологический смысл.

Утверждение 6.44. *Пусть $p\colon T\to X$ — накрытие, $p(t_0)=x_0$, тогда существует каноническое взаимно-однозначное соответствие между множеством смежных классов $\pi_1(X,x_0)/p_*\bigl(\pi_1(T,t_0)\bigr)$ и слоем $p^{-1}(x_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную петлю γ в точке x_0, и пусть $\tilde\gamma$ — поднятие этой петли на T с началом в t_0. Тогда конец пути $\tilde\gamma$ принадлежит слою $p^{-1}(x_0)$. Более того, по лемме о накрывающей гомотопии, гомотопные петли поднимаются в гомотопные пути. При этом, концы этих путей при гомотопии неподвижны (они непрерывно меняются при гомотопии и принадлежат дискретному множеству $p^{-1}(x_0)$). Поэтому точка слоя $p^{-1}(x_0)$, соответствующая концу поднятого пути, корректно определена для гомотопического класса петли $[\gamma]$.

Далее, петли γ_1 и γ_2 определяют одну и ту же точку слоя $p^{-1}(x_0)$, если и только если пути $\tilde\gamma_1$ и $\tilde\gamma_2$ заканчиваются в одной и той же точке слоя, поэтому последовательно пройденные пути $\tilde\gamma_1\tilde\gamma_2^{-1}$ образуют петлю в тотальном пространстве T, которая накрывает петлю $\gamma_1\gamma_2^{-1}$. Поэтому элемент $[\gamma_1][\gamma_2]^{-1}$ фундаментальной группы $\pi_1(X,x_0)$ принадлежит $p_*\bigl(\pi_1(T,t_0)\bigr)$.

Итак, каждому элементу фактор множества $\pi_1(X,x_0)/p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$ мы поставили в соответствие элемент слоя. Осталось проверить, что каждый элемент t слоя соответствует какой-нибудь петле. Однако, последнее очевидно: достаточно соединить t и t_0 путем в T и рассмотреть петлю, в которую переходит этот путь при отображении p на базе. $\square$

Замечание 6.45. С помощью путей легко установить биекцию между прообразами разных точек базы. Действительно, если x_0 и x_1 — точки базы, и γ — соединяющий их путь в базе, то накрывающие пути с началом в разных точках слоя $p^{-1}(x_0)$ заканчиваются в разных точках слоя $p^{-1}(x_1)$ задают отображение между слоями. Это отображение биективно, так как накрывающий путь с данным началом единственнен, а поднятие пути γ^{-1} (т.е. того же пути γ, но пройденного в обратном направлении) задает обратное отображение.

Замечание 6.46. Пусть t_0 и t_1 — разные точки слоя, γ — произвольный путь в T, соединяющий их. Тогда образ пути γ — петля в x_0 не гомотопная точке, т.е. нетривиальный элемент группы $\pi_1(X,x_0)$.

Накрытие $p\colon T\to X$ называется *регулярным*, если подгруппа $p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$ — нормальная.

Утверждение 6.47. *Накрытие $p\colon T\to X$ является регулярным, если и только если никакая петля в X не служит образом незамкнутого пути и петли одновременно.*

Доказательство. Действительно, если образ $\gamma=p\circ\tilde\gamma$ петли $\tilde\gamma$ поднимается только в петли (другими словами, накрывающий путь с началом в любой точке слоя является петлей), то для любой петли β на X элемент $\beta\gamma\beta^{-1}$ также поднимается в петлю, которая получается последовательным прохождением пути $\tilde\beta$, петли, являющейся понятием петли γ с началом в конце пути $\tilde\beta$, и пути $\tilde\beta^{-1}$. Поэтому $[\beta\gamma\beta^{-1}]\in p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$ для любого $[\gamma]\in p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$, т.е. подгруппа $p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$ нормальна.

Обратно, если подгруппа $p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$ нормальна, то для любой петли $\tilde\gamma$ на T началом в t_0 и любой петли β на X с началом в x_0 петля $\beta\gamma\beta^{-1}$, где $\gamma=p\circ\tilde\gamma$, также накрывается петлей с началом в t_0. Выберем в качестве β петлю, полученную проекцией пути $\tilde\beta$ из t_0 в произвольную точку слоя t. Тогда поднятие петли $\beta\gamma\beta^{-1}$ представляет собой последовательно пройденные путь $\tilde\beta$, поднятие петли γ с началом в t и путь $\tilde\beta^{-1}$, откуда поднятие петли γ с началом в t — петля с началом в t. Итак, любая петля из $p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$ поднимается только в петли, в не зависимости от начала поднятия. Если же петля γ на X с началом в x_0 не принадлежит $p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$, то она поднимается на T в некоторый путь с началом в t_0. Если при этом эта же петля поднимается в петлю с началом в некоторой точке t, то сопряженная петля поднимается в петлю с началом в t_0, что противоречит нормальности подгруппы $p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$. $\square$

Действие группы G на топологическом пространстве X называется *дискретным*, если орбита каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U, что ее образы под действием разных элементов группы не пересекаются.

Утверждение 6.48. *Накрытие $p\colon T \to X$ регулярно, если и только если существует группа G, действующая на тотальном пространстве свободно и дискретно, так что $X = T/G$. В этом случае $G = \pi_1(X)/\pi_1(T)$.*

Доказательство. Если накрытие регулярно, то $p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$ — нормальная подгруппа, поэтому определена фактор-группа $G = \pi_1(X,x_0)/p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$. Эта группа действует на слое так: $[\beta]\cdot t$ — это конец накрывающего пути $\tilde\beta$ с началом в точке t. Концы путей $\tilde\beta_1$ и $\tilde\beta_2$ совпадают, если и только если $\beta_1\beta_2^{-1} \in p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big)$, поэтому мы корректно определили действие фактор-группы G на слое. При этом, построенное действие свободно и дискретно. Остается продолжить действие на все тотальное пространство.

Чтобы определить действие элемента $[\beta]$ на слое над точкой x_1, фиксируем путь α на базе с началом в x_1 и концом в x_0. Пусть $t_1 \in p^{-1}(x_1)$ — произвольная точка из слоя над x_1. Построим единственное поднятие $\tilde\alpha$ пути α с началом в точке t_1, и пусть t — конец пути $\tilde\alpha$. Ясно, что $t \in p^{-1}(x_0)$, поэтому определено действие $[\beta]\cdot t$, а именно, это конец накрывающего пути $\tilde\beta$ с началом в t. Наконец, построим единственное поднятие пути α^{-1} с началом в точке $[\beta]\cdot t$. Конец этого пути лежит в слое $\pi^{-1}(t_1)$ и, по определению, и есть результат действия элемента $[\beta]$ на точку t_1. Таким образом, $[\beta]\cdot t_1$ — это конец пути $\tilde\alpha\tilde\beta\tilde\alpha^{-1}$. Другими словами, на слое над x_1 действует образ группы $\pi_1(X,x_0)$ в $\pi_1(X,x_1)$, под действием изоморфизма, порожденного путем α, см. утверждение 6.33. Если мы рассмотрим разные пути α_1 и α_2, то соответствующие изоморфизмы отличаются на сопряжение элементом $\alpha_2\alpha_1^{-1}$, поэтому действие нормальной подгруппы корректно определено.

Обратно, если накрытие порождено действием группы G, то орбита точки $t \in T$ — это слой накрытия. Поэтому группа действует на путях, начинающихся и заканчивающихся в точках слоя. Поэтому каждая петля на базе накрывается или только петлями, или только путями, значит накрытие регулярно по утверждению 6.47. $\square$

Утверждение 6.49. *Пусть X — достаточно хорошее линейно связное топологическое пространство, x_0 — точка из X, и G — произвольная подгруппа группы $\pi_1(X,x_0)$. Тогда существует накрытие $p\colon T \to X$ и точка $t_0 \in T$, такие, что $p_*\big(\pi_1(T,t_0)\big) = G$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $E(X,x_0)$ непрерывных путей в пространстве X с началом в x_0, и введем на нем отношение эквивалентности, объявив два пути γ_1 и γ_2 эквивалентными, если у них совпадают не только начала, но и концы, и, к тому же, класс петли $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ принадлежит G. Обозначим через T соответствующее фактор-пространство, и выберем в качестве отображения $p\colon T \to X$ проекцию $p(\gamma) = \gamma(1)$, где $\gamma\colon [0,1] \to X$. Тогда для достаточно хорошего пространства X мы получаем накрытие, группа которого равна G. $\square$

Следствие 6.50. *Для каждого достаточно хорошего линейно связного топологического пространства существует универсальное накрытие.*

Доказательство. Достаточно в утверждении 6.49 выбрать $G = \{e\}$. Тогда пространство T окажется односвязным. $\square$

Важная серия примеров относится к римановой геометрии.

Следствие 6.51. *Пусть M — замкнутое (компактное без края) связное риманово многообразие, и $\tilde{M}$ — его универсальное накрытие, снабжённое естественной римановой метрикой. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M)$ конечно порождена и квази-изометрична накрывающему пространству $\tilde{M}$, причем в качестве квази-изометрии можно взять естественное отображение, порождённое действием группы $\pi_1(M)$ на пространстве $\tilde{M}$, т.е. вложение $\pi_1(M)$ в $\tilde{M}$ в виде орбиты $\big\{g \cdot x \mid g \in \pi_1(M)\big\}$.*

Доказательство. Отметим, что риманова метрика на универсальном накрывающем пространстве порождается самим накрытием $\nu\colon \tilde{M} \to M$ (метрика, как и дифференциальные формы, переносится назад). Относительно этих метрик отображение ν — локальная изометрия. Далее, по определению (универсального) накрытия, фундаментальная группа $\pi(M, m_0)$ с отмеченной точкой $m_0 \in M$ действует на слое $\nu^{-1}(m_0)$, и это действие порождает действие изометриями на окрестностях–прообразах малой окрестности $U(m_0)$ точки m_0. Отметим, что действие элемента $g \in \pi(M, m_0)$ на произвольную точку $y \in \tilde{M}$ определено с точностью до сопряжения: чтобы определить такое действие нужно фиксировать путь из точки $\pi(y)$ в точку m_0.

Выберем конечное покрытие базы M окрестностями U, прообразы которых представляют собой дизъюнктное объединение окрестностей точек соответствующего слоя, и выберем компоненту прообраза любой такой окрестности в качестве множества B. Тогда мы находимся в условиях топологической леммы Шварца–Милнора, что и требовалось. $\square$

В частности, если многообразие допускает плоскую метрику, т.е. его универсальное накрытие — это $\mathbb{R}^n$, то его фундаментальная группа квази-изометрична $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, $\mathbb{Z}^n$. Аналогично, если многообразие допускает гиперболическую метрику, т.е. его универсальное накрытие — это гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$, то его фундаментальная группа квази-изометрична $\mathbb{H}^n$.

6.2.7 Спаривание групп

Помимо леммы Шварца–Милнора есть и другие способы доказывать квази-изометричность. Здесь мы вкратце опишем так называемый *метод спаривания (coupling)*.

Пусть G и H — произвольные группы и непустое множество X, на котором задано левое действие группы G и правое действие группы H, коммутирующие друг с другом, т.е. $g \cdot (x \cdot h) = (g \cdot x) \cdot h$ для любых $g \in G$, $h \in H$

и $x \in X$. В этом случае говорят, что задано *теоретико-множественным спариванием групп G и H*, если X содержит подмножество K, обладающее следующими свойствами:

(1) сдвиги множества K посредством каждой из групп покрывают все X, а именно $G \cdot K = K \cdot H = X$,

(2) множества

$$F_G = \{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\} \qquad \text{и} \qquad F_H = \{h \in H \mid K \cdot h \cap K \neq \emptyset\}$$

конечны,

(3) для каждого элемента $g \in G$ существует такое конечное семейство $F_H(g) \subset H$, что $g \cdot K \subset K \cdot F_H(g)$, и наоборот, для каждого элемента $h \in H$ существует такое конечное семейство $F_G(h) \subset G$, что $K \cdot h \subset F_G(h) \cdot K$.

Пример 6.52. Пусть G и H — подгруппы конечного индекса в произвольной группе X. Определим левое действие G на X и правое действие H на X левыми и правыми сдвигами соответственно: $g \cdot x = gx$ и $x \cdot h = xh$. Эти действия коммутируют, так как групповая операция ассоциативна, и задают теоретико-множественное спаривание групп G и H. Действительно, фактор множества X/G и X/H конечны по определению, поэтому в качестве K можно выбрать конечную совокупность представителей всех элементов этих фактор множеств. Тогда сдвиги K на элементы групп покрывают всё X по определению (K содержит представителя каждой из орбит). Далее, если $g \cdot K \cap K$ не пусто, то $gk_1 = k_2$, где $k_i \in K$, т.е. $g = k_1^{-1}k_2$, поэтому множество таких элементов g конечно, так как конечно само множество K. Наконец, так как $g \cdot K$ — конечное множество, то можно поэлементно покрыть его множествами вида $K \cdot h$, получив требуемое конечное множество $F_H(g)$, для которого $g \cdot K \subset K \cdot F_H(g)$.

Предложение 6.53. *Если две конечно порожденные группы допускают теоретико-множественное спаривание, то они квази-изометричны.*

Доказательство. Только идея доказательства. В обозначениях определения спаривания, фиксируем произвольный элемент $x \in K$. Построим отображение $g \colon G \to H$ так. Для каждого элемента $g \in G$ существует элемент $h \in H$ (и не один), для которого $g^{-1} \cdot x \in K \cdot h$. Положим $f(g) = h$. Тогда можно показать, что отображение g почти сюръективное и квази изометрическое. □

Замечание 6.54. В доказательстве естественным образом возникают коциклы и когомологии. Разобрать.

Напомним, что топологическое пространство называется *локально компактным*, если для каждой его точки и каждой её открытой окрестности

U существует компакт K, содержащий эту окрестность. Метрическое пространство локально компактно, если и только если оно собственное (каждый шар конечного радиуса компактен).

Пусть теперь X — локально компактное не пустое топологическое пространство, на котором заданы два коммутирующих действия гомеоморфизмами, группы G слева и группы H справа. Говорят, что задано *топологическое спаривание групп G и H*, если оба действия являются собственными и кокомпактными.

Теорема 6.55. *Пусть G и H конечно порождённые группы. Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группы G и H квази изометричны.*

(2) *Существует топологическое спаривание групп G и H.*

(3) *Существует теоретико-множественное спаривание групп G и H.*

Пусть G — топологическая группа (т.е. группа снабжённая топологией, причём групповые операции в ней непрерывны). Подгруппа Γ топологической группы называется *дискретной*, если существует такая окрестность U единицы e группы, что $U \cap \Gamma = \{e\}$.

Дискретная подгруппа Γ локально компактной группы G называется *равномерной решёткой*, если действие подгруппы Γ на G левыми сдвигами является кокомпактным.

Следствие 6.56. *Любые конечно порождённые равномерные решётки локально компактной топологической группы квази изометричны.*

Пример 6.57. Для любого натурального n подгруппа $\mathbb{Z}^n$ является конечно порожденной равномерной решёткой локально компактной топологической группы $\mathbb{R}^n$.

Подгруппа $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ не является дискретной.

Подгруппа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ дискретна, но фактор $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ не компактен, поэтому $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ не является равномерной решёткой в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Пусть M — компактное риманово многообразие и $\tilde{M}$ — его универсальное накрытие. Тогда $\pi_1(M)$ является равномерной решёткой в локально компактной топологической группе изометрий $\mathrm{Iso}(\tilde{M})$ универсального накрытия.

6.3 Рост

Общая задача геометрии групп — классифицировать группы с точностью до квази изометрии. Для доказательства не изометричности полезно иметь какие-нибудь инварианты. Функция роста, обсуждаемая в данном разделе, — это важный инвариант квази изометрий.

6.3.1 Рост конечно порождённых групп

Для конечно порожденной группы G с множеством образующих S определим *функцию роста* $\beta_{G,S}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, положив

$$\beta_{G,S}(r) = \Big|\big\{g \in G \mid d_S(g,e) \le r\big\}\Big|,$$

т.е. $\beta_{G,S}(r)$ — количество элементов в замкнутом шаре радиуса r с центром в e в пространстве (G, d_S).

Пример 6.58. Функция роста зависит от выбора семейства генераторов. Действительно, рассмотрим группу $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению. Для порождающего множества $\{1\}$ имеем: $\beta_{\mathbb{Z},\{1\}}(r) = 2r+1$. Если же взять множество $\{2,3\}$ в качестве порождающего, то

$$\beta_{\mathbb{Z},\{2,3\}}(r) = \left[\begin{array}{ll} 0, & r = 0, \\ 5, & r = 1, \\ 6r+1, & r \ge 2. \end{array}\right.$$

Пример 6.59. Функция роста группы $\mathbb{Z}^2$ относительно стандартной системы образующих $S = \big\{(1,0),(0,1)\big\}$ квадратична. Действительно, расстояние d_S от $e = (0,0)$ до (x,y) совпадает с манхаттанским и равно $|x| + |y|$, поэтому шар радиуса r — это квадрат с вершинами $(\pm r, 0)$ и $(0, \pm r)$. Разбив этот квадрат на центр и четыре равных равнобедренных прямоугольных треугольника, на катете каждого из которых r точка из $\mathbb{Z}^2$, получим:

$$\beta_{\mathbb{Z}^2,S}(r) = 1 + 4\sum_{j=1}^{r} j = 1 + 4\frac{r+1}{2}r = 2r^2 + 2r + 1.$$

Более общо, функция роста группы $\mathbb{Z}^n$ со стандартной системой образующих — многочлен степени n от r.

Пример 6.60. Пусть F_n — свободная группа ранга n, и $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ — семейство свободных образующих. Тогда из вершины e графа Кэли выходит $2n$ ребер, а из каждой следующей — $2n-1$ “новое ребро”, поэтому

$$\beta_{F_n,S}(r) = 1 + 2n\sum_{j=0}^{r-1}(2n-1)^j = 1 + 2n\frac{(2n-1)^r - 1}{2n-2} = 1 + \frac{n}{n-1}\big((2n-1)^r - 1\big),$$

т.е. функция роста зависит от r экспоненциально.

Следующее утверждение очевидно из определений.

Предложение 6.61 (Общие свойства функций роста)**.** *Пусть G — конечно порождённая группа и S — конечное множество её образующих. Тогда выполнены следующие свойства.*

(1) *Для любых r и r' из $\mathbb{N}_0$ выполнено неравенство*

$$\beta_{G,S}(r + r') \le \beta_{G,S}(r)\beta_{G,S}(r').$$

(2) *Если группа G бесконечна, то функция $\beta_{G,S}(r)$ строго возрастает и $\beta_{G,S}(r) \geq r$ при всех $r \in \mathbb{N}_0$.*

(3) *Для всех $r \in \mathbb{N}_0$ имеет место неравенство*

$$\beta_{G,S}(r) \leq \beta_{F(S),S} = 1 + \frac{|S|}{|S|-1}\big((2|S|-1)^r - 1\big),$$

где $F(S)$ — свободная группа с множеством свободных образующих S.

6.3.2 Типы роста

Обобщённой функцией роста назовем произвольную возрастающую функцию $f\colon \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$. Пусть f и g — обобщённые функции роста. Будем говорить, что *функция g квази-доминирует функцию f* и записывать $f \prec g$, если существуют положительные константы b и c, для которых выполнено неравенство

$$f(r) \leq cg(cr+b) + b \qquad \text{для любого } r \in \mathbb{R}_{\geq}.$$

Далее, если одновременно $f \prec g$ и $g \prec f$, то будем говорить, что функции f и g *квази эквивалентны* и записывать это так: $f \sim g$.

Лемма 6.62. *Отношение $f \prec g$ задаёт отношение частичного пред порядка, а отношение $f \sim g$ — отношение эквивалентности на множестве обобщённых функций роста.*

Доказательство. Рефлексивность отношения $\prec$ очевидна. Также очевидна рефлексивность и симметричность отношения $\sim$. Для завершения доказательства достаточно проверить транзитивность отношения $\prec$. Пусть $f \prec g$ и $g \prec h$, тогда

$$f(r) \leq c_1 g(c_1 r + b_1) + b_1, \text{ и } g(r) \leq c_2 h(c_2 r + b_2) + b_2,$$

откуда

$$f(r) \leq c_1\Big(c_2 h\big(c_2(c_1 r + b_1) + b_2\big) + b_2\Big) + b_1 = \\ = c_1c_2 h(c_1c_2 r + b_1c_2 + b_2) + b_2c_2 + b_1 \leq c\,h(cr+b) + b,$$

где $c = c_1c_2$ и $b = \max\{b_1c_2 + b_2, b_2c_2 + b_1\}$, где последнее неравенство верно в силу монотонного возрастания h. $\square$

Пример 6.63. Степенная функция $x \mapsto x^a$, $a \geq 0$, монотонно возрастает при $x \geq 0$, поэтому является обобщенной функцией роста. Покажем, что $x^a \prec x^{a'}$, если и только если $a < a'$. Действительно, если $a < a'$, то $x^a < x^{a'} + 1$ при всех неотрицательных x, так как при $x \geq 1$ $x^a < x^{a'}$, а при

$0 \le x \le 1$ выполнено $x^a \le 1$ и $x^{a'} \ge 0$. Обратно, если $a' < a$, то для любых фиксированных положительных b и c выполнено

$$\frac{x^a}{c(cx+b)^{a'}+b} \to \infty \qquad \text{при } x \to \infty,$$

откуда найдется достаточно большое число r, для которого $r^a > c(cr+b)^{a'} + b$, т.е. $x^a \not\prec x^{a'}$.

В частности, $x^a \sim x^{a'}$, если и только если $a = a'$.

Пример 6.64. Показательная функция $x \mapsto a^x$ является обобщенной функцией роста для всех $a > 1$. Покажем, что $a^x \sim (a')^x$ для всех $a > 1$ и $a' > 1$. Действительно, достаточно показать, что $(a')^x \prec a^x$. Для выполнения неравенства $(a')^x \le ca^{cx+b} + b$ при всех $x \ge 0$ достаточно чтобы $(a')^x \le ca^{cx+b}$. Последнее равносильно

$$1 \le c2^{(cx+b)\log_2 a - x\log_2 a'} = c2^{x(c\log_2 a - \log_2 a') + b\log_2 a}.$$

Остается выбрать $c \ge 1$ так, чтобы $c\log_2 a - \log_2 a' > 0$, тогда линейная функция в показателе степени будет положительна при неотрицательных x и неравенство будет выполнено.

Также легко проверить, что $x^{a'} \prec a^x$ при всех $a' > 0$ и $a > 1$, и обратное не верно.

Пусть G — конечно порождённая группа с конечным множеством образующих S. Тогда функция роста $\beta_{G,S}$ порождает обобщенную функцию роста по формуле $\beta_{G,S}(x) = \beta_{G,S}\big(\lceil x\rceil\big)$, где $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Будем говорить, что группа H с системой образующих T квази-доминирует группу G с ситемой образующих S, если $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$. Отметим, что на самом деле достаточно проверять это для не обобщенных функций роста и целых констант b и c.

6.3.3 Квази изометрии групп и функции роста

Ключевым результатом, объясняющим значение функций роста, является следующая теорема.

Теорема 6.65. *Пусть G и H конечно порожденные группы и $S \subset G$ и $T \subset H$ — их конечные системы образующих. Если существует квази изометрическое вложение $(G, d_S) \to (H, d_T)$, то $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$. В частности, если группы G и H квази изометричны, то их функции роста квази эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $f\colon G \to H$ — квази изометрчское вложение. Тогда, согласно определению, существует константа c такая, что для любых g и $g' \in G$ выполнено

$$\frac{1}{c}\, d_S(g,g') - c \le d_T\big(f(g), f(g')\big) \le c\, d_S(g,g') + c.$$

Обозначим через $\hat{e}$ образ единицы e группы G, пусть $r \in \mathbb{N}$, и обозначим через $B_r^S(e)$ шар радиуса r с центром в e в метрике d_S.

Тогда, если $g \in B_r^S(e)$, то $d_T\big(f(g), \hat{e}\big) \le c\, d_S(g, e) + c \le c\, r + c$, поэтому $f\big(B_r^S(e)\big) \subset B_{c\,r+c}^T(\hat{e})$.

Кроме того, для любых g и g' из G таких, что $f(g) = f(g')$, выполнено:

$$d_S(g, g') \le c\Big(d_T\big(f(g), f(g')\big) + c\Big) = c^2,$$

т.е. количество прообразов элемента $f(g)$ не больше чем число элементов в шаре $B_{c^2}^S(g)$.

Таким образом, так как метрика слов инвариантна относительно сдвигов, имеем:

$$\beta_{G,S}(r) \le \big|B_{c\,r+c}^T(\hat{e})\big|\,\big|B_{c^2}^S(g)\big| = \big|B_{c\,r+c}^T(e')\big|\,\big|B_{c^2}^S(g)\big| = \beta_{H,T}(c\,r+c)\beta_{G,S}(c^2),$$

где e' — единица в группе G'. Последнее означает, что $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$, так как величина $\beta_{G,S}(c^2)$ не зависит от r. Теорема доказана. □

В силу теоремы 6.65 и утверждения 6.11 для конечно порожденных группы корректно определяется *тип роста группы* G как класс квази эквивалентности (всех) функций роста группы G относительно всех ее конечных семейств порождающих.

Следствие 6.66. *Тип роста конечно порожденной группы является ее квази изометрическим инвариантом, т.е. группы с разным типом роста не могут быть квази изометричны.*

Упражнение 6.67. Группа $\mathbb{Z}^n$ имеет тип роста $x \mapsto x^n$. Некоммутативная свободная группа имеет тип роста $x \mapsto e^x$.

Говорят, что рост конечно порожденной группы G *полиномиален*, если для некоторой (а значит и для всех) конечной системы образующих S выполнено: $\beta_{G,S} \prec x^a$ для некоторого a. Далее, рост G *экспоненциален* если ее тип роста — это $x \mapsto e^x$. Если же тип роста ни тот и не другой, то говорят что группа G *промежуточного роста*.

Из предложения 6.61 вытекает, что тип роста не может быть больше чем экспоненциальным. Кроме того, мы показали выше, что полиномиальный рост не эквивалентен экспоненциальному.

Пример 6.68. Ранг свободной абелевой группы восстанавливается по ее типу роста, так как $\mathbb{Z}^n$ квази изометрично $\mathbb{Z}^m$, если и только если $m = n$ (см. выше).

Так как тип роста свободной некоммутативной группы конечного ранга экспоненциален, то она не может быть квази изометрична никакой свободной абелевой группе.

Следствие 6.69. *Пусть G — конечно порожденная группа, и H — конечно порожденная подгруппа в G. Если $T \subset H$ и $S \subset G$ — конечные семейства образующих, то $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S}$.*

Доказательство. Множество $S' = S \cup T$ — конечное семейство образующих для G. Поэтому, если $h \in B_r^T(e)$, то

$$d_{S'}(h,e) \le d_T(h,e) \le r,$$

откуда $B_r^{H,T}(e) \subset B_r^{G,S'}(e)$, в частности $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S'}$. Осталось воспользоваться утверждением 6.11, в силу которого (G, d_S) и $(G, d_{S'})$ квази изометричны и, в силу теоремы 6.65, их функции роста квази эквивалентны. таким образом $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S}$. $\square$

Пример 6.70. Если конечно порожденная группа G содержит не абелеву свободную подгруппу, то G имеет экспоненциальный рост. Поэтому группы полиномиального роста не содержат таких подгрупп.

Замечание 6.71. Первый пример группы промежуточного роста был построен Ростиславом Ивановичем Григорчуком в 1984 году.

6.3.4 Нетривиальный пример: группа Гейзенберга

Этот нетривиальный пример мы выделили в отдельный подраздел. *Группой Гейзенберга* над $\mathbb{Z}$ называется следующая группа целочисленных треугольных матриц

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Если

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то легко проверяется, что $[x,z] = e$, $[y,z] = e$, $[y,x] = z$, где e — единичная матрица, т.е. нейтральный элемент группы.

Далее,

$$x^a\, y^b\, z^c = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z = [y,x],$$

поэтому группа H порождается как тремя образующими $\{x,y,z\}$ так и двумя образующими $\{x,y\}$.

Взаимодействие произвольного элемента группы с образующими дается следующим утверждением.

Лемма 6.72. *Имеют место следующие соотношения:*

$$(x^a\, y^b\, z^c)x = x^{a+1}\, y^b\, z^{c+b},\ (x^a\, y^b\, z^c)y = x^a\, y^{b+1}\, z^c,$$
$$(x^a\, y^b\, z^c)z = x^a\, y^b\, z^{c+1},\ (x^a\, y^b\, z^c)x^{-1} = x^{a-1}\, y^b\, z^{c-b},$$
$$(x^a\, y^b\, z^c)y^{-1} = x^a\, y^{b-1}\, z^c,\ (x^a\, y^b\, z^c)z^{-1} = x^a\, y^b\, z^{c-1}.$$

Кроме того, $x^a\, y^{-b}\, x^{-a}\, y^b = z^{ab}$.

Доказательство. Проверим первое соотношение. Для этого заметим, что так как $y\,x\,y^{-1}\,x^{-1} = z$, то $y\,x = z\,x\,y = x\,y\,z$, где последнее равенство справедливо так как z коммутирует со всеми элементами группы. Тогда имеем:

$$(x^a\,y^b\,z^c)x = x^a\,y^b\,x\,z^c = x^a\,y^{b-1}\,yx\,z^c = x^a\,y^{b-1}\,(xy)z\,z^c = \cdots = x^a\,x\,y^b\,z^b\,z^c.$$

Соотношение с x^{-1} доказывается точно так же. Еще четыре соотношения тривиальны, так как y и z, а тем более z и z коммутируют.

Докажем теперь последнее тождество. Так как $[y,x] = z$, то $x\,y^{-1} = y^{-1}\,z\,x = y^{-1}\,x\,z$, откуда

$$\begin{aligned}x^a\,y^{-b}\,x^{-a}\,y^b &= x^{a-1}(xy^{-1})y^{-b+1}\,x^{-a}\,y^b = \\ &= x^{a-1}(y^{-1}xz)y^{-b+1}\,x^{-a}\,y^b = x^{a-1}(y^{-1}x)y^{-b+1}\,x^{-a}\,y^b\,z = \\ &= \cdots = x^{a-1}\,y^{-b}\,x^{-a+1}\,y^b\,z^b = \cdots = x^0\,y^{-b}\,x^0\,y^b\,z^{ab} = z^{ab},\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Лемма 6.73. *Рассмотрим* (H, d_S)*, где* $S = \{x, y, z\}$*, и положим* $|g| = d_S(e, g)$*. Тогда*

- $|x^a\,y^b\,z^c| \le |a| + |b| + 6\sqrt{|c|}$,
- *если* $|x^a\,y^b\,z^c| \le n$*, то* $|a| + |b| \le n$ *и* $|c| \le n^2$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное натуральное c, выберем наибольшее целое i не превосходящее $\sqrt{c}$, и положим $j = c - i^2 \ge 0$, т.е., мы представили c в виде $c = i^2 + j$ с неотрицательным j и максимальным возможным i. Из определения величины i вытекает, что $0 \le \sqrt{c} - i < 1$, откуда $c < 1 + 2i + i^2$, и значит $j = c - i^2 < 1 + 2i$. Так как j и i целые, последнее неравенство можно переписать в виде $j \le 2i \le 2\sqrt{c}$. Итак, $0 \le j \le 2\sqrt{c}$, $0 \le i \le 2\sqrt{c}$.

Теперь рассмотрим выражение z^{i^2}, которое равно $x^i\,y^{-i}\,x^{-i}\,y^i$ в силу тождества из леммы 6.72. Тогда для $c = i^2 + j$ имеем $z^c = x^i\,y^{-i}\,x^{-i}\,y^i\,z^j$, поэтому $|z^c| \le 4i + j \le 4\sqrt{c} + 2\sqrt{c} = 6\sqrt{c}$, что и завершает доказательство первого утверждения для случая положительных c. Для отрицательных c доказательство полностью аналогично.

Перейдем ко второму утверждению леммы. Пусть $g = g_1 \cdots g_m$, где $m = |g|$, а g_i — или образующие элементы, или обратные к ним. Пользуясь коммутационными соотношениями, приведем слово $g_1 \cdots g_m$ к виду $x^a\,y^b\,z^c$. При этом, как видно из леммы 6.72, количество букв x и y (с учетом степеней) не увеличивается, поэтому $|a| + |b| \le m = |g|$, что и доказывает первое неравенство второго утверждения. Далее, при этих преобразованиях мы переносим вперед x не более чем на $n-1$ позицию, а y — не более чем на $n-2$, поэтому количество z в итоговом слове не превосходит $(n-1)(n-2) \le n^2$. Лемма доказана. □

Утверждение 6.74. *Группа Гейзенберга имеет полиномиальный рост. Более точно, $\beta_{H,S}(n) \sim n^4$.*

Доказательство. В самом деле, если $|a| < n/8$, $|b| < n/8$, и $|c| < (n/8)^2$, то по первому утверждению леммы 6.73 $|x^a\, y^b\, z^b| \le n/8 + n/8 + 6n/8 = n$, поэтому $\beta_{H,S}(n) \ge (2n/8)(2n/8)\big(2(n/8)^2\big)$, откуда $n^4 \prec \beta_{H,S}$. Обратно, в силу второго утверждения леммы 6.73, $\beta_{H,S}(n) \le (2n+1)(2n+1)(2n^2+1)$, поэтому $\beta_{H,S} \prec n^4$, что и требовалось. $\square$

Пример 6.75. Отображения $c \mapsto z^c$, $x^a\, y^b\, z^c \mapsto (a,b)$ задают точную последовательность гомоморфизмов $1 \to \mathbb{Z} \to H \to \mathbb{Z}^2 \to 1$. Поэтому $H/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$. Однако, поскольку функции $n \mapsto n^4$ и $n \mapsto n^3$ не эквивалентны, группа Гейзенберга H не квази изометрична группе $\mathbb{Z}^3$.

Упражнение 6.76. Показать, что группа Гейзенберга образует равномерную решётку в *вещественной группе Гейзенберга* (которая устроена так же как обычная, только коэффициенты матриц — произвольные вещественные числа, и поэтому последняя изоморфна $\mathbb{R}^3$).

Пример 6.77. Вложение $S \to H$ конечно порожденной подгруппы S конечно порожденной группы H в объемлющую группу H не обязано быть квази изометрическим вложением. Например, вложение $f\colon n \mapsto z^n$ группы $\mathbb{Z}$ в группу Гейзенберга (H, d_S) таковым не является. Действительно, $d_S(e, z^{n^2}) = d_S(e, [x^n, y^{-n}]) \le 4n$, т.е. образ шара из $\mathbb{Z}$, содержащего n^2 элементов, содержит не более $4n$, что не возможно при квази изометрии, которая сохраняет порядок роста.

Упражнение 6.78. Группа целочисленных $(n\times n)$ верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали имеет полиномиальный рост.