

Тема 5

Геометрия Александрова.

В этой лекции мы определим пространства Александрова и обсудим некоторые их свойства.

5.1 Треугольники и углы сравнения

Пусть (X, d) — произвольное метрическое пространство. Выберем любые три точки x_1, x_2 и x_3 в X , тогда числа $d(x_i, x_j)$, $i \neq j$, удовлетворяют неравенству треугольника, поэтому существует треугольник $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ на евклидовой плоскости, для которого $|\bar{x}_i\bar{x}_j| = d(x_i, x_j)$.

Определение 5.1. Треугольник $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ называется *треугольником сравнения* для $x_1x_2x_3$. Если точка x_i отлична x_j и x_k , $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, то в треугольнике $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ определен угол при вершине $\bar{x}_i$; его величина называется *углом сравнения* и обозначается через $\angle x_jx_ix_k$.

Пусть $\gamma(s)$, $s \in [a, b]$, и $\delta(t)$, $t \in [c, e]$, — кривые в пространстве (X, d) , выходящие из одной и той же точки p , т.е. $\gamma(a) = \delta(c) = p$. Будем предполагать, что кривые γ и δ больше *не возвращаются в p* , т.е. для любых $s \in (a, b]$ и $t \in (c, e]$ выполняется $\gamma(s) \neq p$ и $\delta(t) \neq p$.

Определение 5.2. Верхний предел $\limsup_{s \rightarrow a, t \rightarrow c} \angle \gamma(s)p\delta(t)$ и нижний предел $\liminf_{s \rightarrow a, t \rightarrow c} \angle \gamma(s)p\delta(t)$ называются соответственно *верхним и нижним углами между кривыми γ и δ в точке p* и обозначаются через $\angle_{\sup} \gamma\delta$ и $\angle_{\inf} \gamma\delta$. Если $\angle_{\sup} \gamma\delta = \angle_{\inf} \gamma\delta$, то существует предел $\lim_{s \rightarrow a, t \rightarrow c} \angle \gamma(s)p\delta(t)$, который называется *углом между кривыми γ и δ в точке p* и обозначается через $\angle \gamma\delta$.

Замечание 5.3. Легко видеть, что определенные только что углы между кривыми не меняются при замене параметризации.

Предложение 5.4. Пусть (X, d) — метрическое пространство с внутренней метрикой d . Тогда имеют место следующие утверждения.

- (1) Каждая кратчайшая кривая образует нулевой угол с самой собой.
- (2) Если объединение двух кратчайших, выходящих из одной точки, также является кратчайшей (после соответствующей перепараметризации составляющих ее кривых), то угол между этими кривыми равен π .

Доказательство. Так как метрика внутренняя, то, в силу аддитивности функционала длины, каждый треугольник сравнения вырожден и имеет нулевой угол в соответствующей вершине в первом случае, и угол величины π — во втором. $\square$

Замечание 5.5. Если отбросить условие того, что метрика является внутренней, то оба утверждения из предложения 5.4 становятся неверными.

Контрпример к (1). Для каждого натурального k положим

$$A_{4k} = \left(\frac{1}{(2k)^2}, \frac{1}{(2k)^2} \right), \quad A_{4k+1} = \left(\frac{1}{(2k+1)^2}, \frac{1}{(2k+1)^2} \right),$$

$$A_{4k+2} = \left(\frac{1}{(2k+1)^2}, -\frac{1}{(2k+1)^2} \right), \quad A_{4k+3} = \left(\frac{1}{(2k+2)^2}, -\frac{1}{(2k+2)^2} \right),$$

и пусть $X = \{O\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n, A_{n+1}]$, где O — начало координат. Ясно, что сумма длин входящих в X отрезков конечна, и что X , рассматриваемое как бесконечная ломаная с добавленной точкой O , представляет собой образ некоторой вложенной спрямляемой кривой γ . Пусть d — евклидово расстояние между точками из X . Тогда кривая γ является кратчайшей для своих концов. Однако в точке O угол не определен, так как при каждом k имеем $\angle A_{4k}OA_{4k+1} = 0$, а $\angle A_{4k+1}OA_{4k+2} = \pi/2$, см. рис. 5.1, слева.

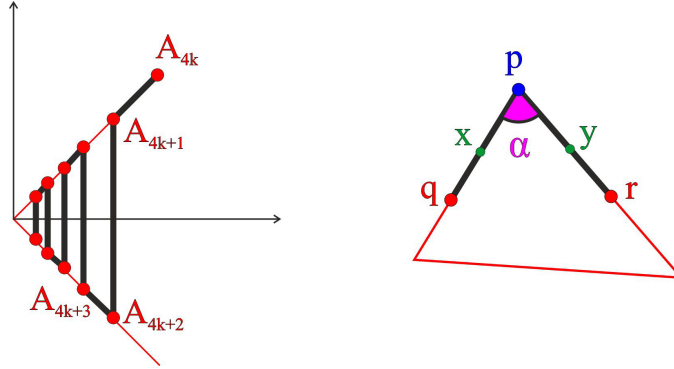


Рис. 5.1: Контрпримеры.

Контрпример к (2). Этот пример можно получить из конструкции контр-примера (1), выбрав, скажем, в качестве точки p любую внутреннюю точку на любом вертикальном отрезке. Однако имеется более простое построение, которое мы сейчас опишем.

Рассмотрим на плоскости границу X некоторого треугольника, и пусть d — евклидово расстояние между точками из X . Рассмотрим точки q и r из X , лежащие на разных сторонах X достаточно близко от некоторой вершины p треугольника. Пусть α — величина угла с вершиной p в рассматриваемом треугольнике. Тогда ломаная qpr является кратчайшей в (X, d) , соединяющей q и r , поэтому она составлена из двух кратчайших pq и pr . Однако для любой $x \in [q, p)$ и $y \in [r, p)$ имеем $\angle xpy = \alpha < \pi$, см. рис. 5.1, справа.

Упражнение 5.6. Покажите, что угол между регулярными кривыми в $\mathbb{R}^n$, выходящими из одной точки, равен углу между их векторами скоростей в этой точке.

Теорема 5.7 (неравенство треугольника для верхних углов). *Рассмотрим произвольное метрическое пространство (X, d) , и пусть $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow X$, $i = 1, 2, 3$, — кривые, выходящие из одной точки p и не возвращающиеся в нее. Тогда*

$$\angle_{\sup} \gamma_i \gamma_k \leq \angle_{\sup} \gamma_i \gamma_j + \angle_{\sup} \gamma_j \gamma_k,$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. Положим $\alpha_{ij} = \angle_{\sup} \gamma_i \gamma_j$. Достаточно проверить неравенство $\alpha_{13} \leq \alpha_{12} + \alpha_{23}$. Если $\alpha_{13} \leq \alpha_{12}$, то неравенство выполняется автоматически, поэтому будем считать, что $\alpha_{13} > \alpha_{12}$, в частности, $\alpha_{13} > 0$. Положим $\Delta = \alpha_{13} - \alpha_{12}$.

При каждом значении параметров t_i сделаем следующее построение. Положим $x_i = \gamma_i(t_i)$. Обозначим через $\bar{p}\bar{x}_1\bar{x}_2$ и $\bar{p}\bar{x}_1\bar{x}_3$ треугольники сравнения для px_1x_2 и px_1x_3 , расположенные так (рис. 5.2):

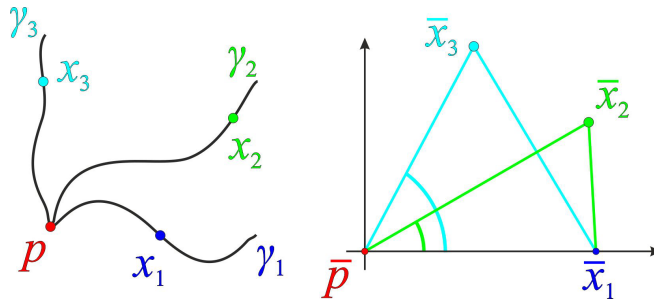


Рис. 5.2: Выбор расположения треугольников сравнения.

- (1) точка $\bar{p}$ находится в начале координат;
- (2) точка $\bar{x}_1$ лежит на положительной части оси абсцисс;

(3) точки $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$ расположены в верхней полуплоскости.

Для $i = 1, 3$ выберем такие последовательности $t_i^1, t_i^2, \dots \rightarrow a_i+$, для которых углы сравнения $\varphi_{13}^n = \angle \gamma_1(t_1^n) p \gamma_3(t_3^n)$ стремятся к α_{13} при $n \rightarrow \infty$. Для этих же i обозначим через $\bar{x}_i^n$ точки $\bar{x}_i$, соответствующие $t_i = t_i^n$.

Рассмотрим два случая.

(1) В последовательности φ_{13}^n имеется подпоследовательность, все члены которой строго меньше π . Не желая менять обозначения, мы будем считать, что эта подпоследовательность совпадает с исходной.

Положим $\varphi_{12}^n(t_2) = \angle x_1^n p \gamma_2(t_2)$, и через $\bar{x}_2^n(t_2)$ обозначим точку $\bar{x}_2$, соответствующую $t_1 = t_1^n$ и t_2 . Иными словами, $\bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_2^n(t_2)$ является треугольником сравнения для $x_1^n p \gamma_2(t_2)$. Таким образом, $\varphi_{12}^n(t_2) = \angle \bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_2^n(t_2)$. Отметим, что при фиксированном t_2 все точки $\bar{x}_2^n(t_2)$ находятся на одном и том же расстоянии от начала координат, а именно, на расстоянии $d(p, \gamma_2(t_2))$. Прделанные построения изображены на рис. 5.3.

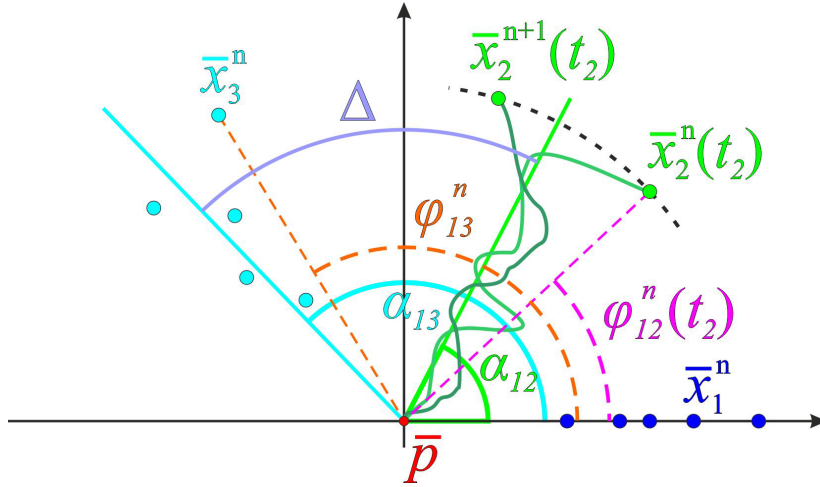


Рис. 5.3: Точки $\bar{x}_1^n$, $\bar{x}_3^n$ и кривые $\bar{x}_2^n(t_2)$.

Существует такое N_1 , что для всех $n > N_1$ выполняется $\alpha_{13} - \Delta/3 < \varphi_{13}^n$. Кроме того, существуют такие $\varepsilon > 0$ и N_2 , что при всех $t_2 \in (a_2, a_2 + \varepsilon]$ и $n > N_2$ имеем $\varphi_{12}^n(t_2) < \alpha_{12} + \Delta/3$. Пусть $N = \max(N_1, N_2)$, тогда для $n > N$ и всех $t_2 \in (a_2, a_2 + \varepsilon]$ имеем

$$\varphi_{12}^n(t_2) < \alpha_{12} + \Delta/3 = \alpha_{13} - 2\Delta/3 < \varphi_{13}^n - \Delta/3.$$

Таким образом, существует $\varepsilon > 0$ такое, что при каждом $n > N$ кривая $\bar{\gamma}^n(t_2) = \bar{x}_2^n(t_2)$, $t_2 \in [a_2, a_2 + \varepsilon]$, лежит в угле $\angle \bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_3^n$.

При $n \rightarrow \infty$ точки $\bar{x}_1^n$ и $\bar{x}_3^n$ стремятся к началу координат. С другой стороны, как мы уже отмечали, при фиксированном t_2 все точки $\bar{x}_2^n(t_2)$ удалены от начала координат на одно и то же расстояние $d(p, \gamma_2(t_2)) > 0$.

Поэтому при фиксированном t_2 существует такое N_3 , что при всех $n > N_3$ точки $\bar{x}_2^n(t_2)$ лежат вне треугольника $\bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_3^n$. Кроме того, как мы отметили выше, при любом фиксированном $n > N$ кривая $\bar{\gamma}^n(t_2)$ лежит в угле $\angle \bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_3^n$ треугольника $\bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_3^n$, соединяя вершину $\bar{p}$ этого угла внешней точкой этого треугольника, рис. 5.4. Отсюда вытекает, что кривая $\bar{\gamma}^n(t_2)$ пересекает отрезок $[\bar{x}_1^n, \bar{x}_3^n]$. Выберем любую точку из этого пересечения и обозначим ее через $\bar{x}_2^n$. Через x_2^n обозначим соответствующую $\bar{x}_2^n$ точку на кривой $\gamma_2(t_2)$.

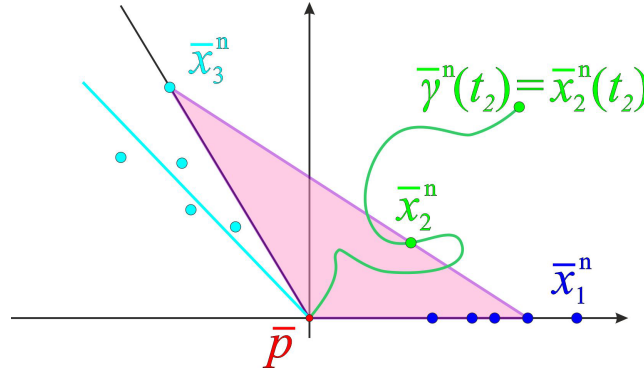


Рис. 5.4: Кривая $\bar{\gamma}^n(t_2) = \bar{x}_2^n(t_2)$ пересекает отрезок $[\bar{x}_1^n, \bar{x}_3^n]$ при достаточно больших n .

Из приведенных рассуждений вытекает, что для некоторой подпоследовательности точек x_1^n и x_3^n можно определить соответствующие точки x_2^n . Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать это условие выполняющимся для всей последовательности. Но тогда

$$|\bar{x}_1^n \bar{x}_3^n| = |\bar{x}_1^n \bar{x}_2^n| + |\bar{x}_2^n \bar{x}_3^n| = d(x_1^n, x_2^n) + |\bar{x}_2^n \bar{x}_3^n| = d(x_1^n, x_3^n) \leq d(x_1^n, x_2^n) + d(x_2^n, x_3^n),$$

поэтому $|\bar{x}_2^n \bar{x}_3^n| \leq d(x_2^n, x_3^n)$, так что $\angle \bar{x}_2^n \bar{p} \bar{x}_3^n \leq \angle x_2^n p x_3^n$, следовательно,

$$\angle x_1^n p x_3^n = \angle \bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_3^n = \angle \bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_2^n + \angle \bar{x}_2^n \bar{p} \bar{x}_3^n \leq \angle x_1^n p x_2^n + \angle x_2^n p x_3^n,$$

осталось выполнить предельный переход.

(2) Все элементы последовательности φ_{13}^n , за исключением конечного числа, равны π , в частности, $\alpha_{13} = \pi$. Снова, в целях сохранения обозначений, мы будем считать, что все углы исходной последовательности равны π .

Предположим противное, т.е. что $\alpha_{13} > \alpha_{12} + \alpha_{23}$, и пусть $\Delta = \alpha_{13} - \alpha_{12} - \alpha_{23}$. При каждом n и t_2 построим треугольник сравнения $\bar{x}_2^n(t_2) \bar{p} \bar{y}_3^n(t_2)$ для $\gamma_2(t_2) p x_3^n$, причем разместим этот треугольник так, чтобы он пересекал треугольник $\bar{x}_1^n \bar{p} \bar{x}_2^n(t_2)$ по стороне $\bar{p} \bar{x}_2^n(t_2)$. Так как $\alpha_{12} + \alpha_{23} = \pi - \Delta$, то существуют такие $\varepsilon > 0$ и N , что при всех $t_2 \in [a_2, a_2 + \varepsilon]$ и $n > N$ точка $\bar{y}_3^n(t_2)$ лежит в верхней полуплоскости, и угол $\angle \bar{x}_1^n \bar{p} \bar{y}_3^n(t_2) < \pi - \Delta/3$, см. рис. 5.5.

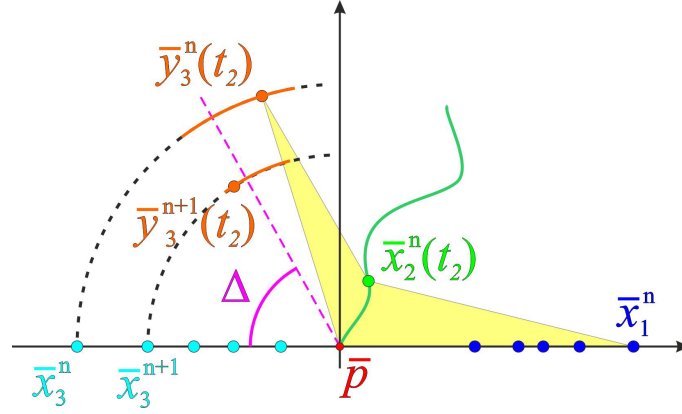


Рис. 5.5: Построение треугольника сравнения $\bar{x}_2^n(t_2)\bar{p}\bar{y}_3^n(t_2)$ для треугольника $\gamma_2(t_2)px_3^n$.

Заметим, что при фиксированном n точка $\bar{y}_3^n(t_2)$ находится от начала координат на одном и том же расстоянии $d(p, x_3^n)$ при всех t_2 . Отсюда и из описанного выше условия на угол $\angle \bar{x}_1\bar{p}\bar{y}_3^n(t_2)$ вытекает следующее наблюдение: при фиксированном $n > N$ существует такое $t_2 \in (a_2, a_2 + \varepsilon]$, что четырехугольник $\bar{x}_1^n\bar{x}_2^n(t_2)\bar{y}_3^n(t_2)\bar{p}$ — невыпуклый, и его угол $\bar{x}_1^n\bar{x}_2^n(t_2)\bar{y}_3^n(t_2)$ больше π . Но тогда

$$|\bar{x}_1^n\bar{x}_2^n(t_2)| + |\bar{x}_2^n(t_2)\bar{y}_3^n(t_2)| < |\bar{x}_1^n\bar{p}| + |\bar{p}\bar{y}_3^n(t_2)|,$$

поэтому

$$d(x_1^n, \gamma_2(t_2)) + d(\gamma_2(t_2), x_3^n) < d(x_1^n, p) + d(p, x_3^n) = d(x_1^n, x_3^n),$$

что противоречит неравенству треугольника. $\square$

Чаще используется следующее ослабление предыдущего утверждения.

Следствие 5.8. Пусть (X, d) — произвольное метрическое пространство, и $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow X$, $i = 1, 2, 3$, — кривые, выходящие из одной точки p . Предположим, что при всех $1 \leq i < j \leq 3$ существуют углы $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \angle \gamma_i \gamma_j$. Тогда $\alpha_{ik} \leq \alpha_{ij} + \alpha_{jk}$ при всех $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

5.2 Пространство направлений

Определение 5.9. Говорят, что кривая γ , выходящая из точки p , имеет в p направление, если существует $\angle \gamma \gamma$. Говорят, что кривые γ и δ , выходящие из точки p , имеют одинаковые направления, если $\angle \gamma \delta$ существует и равен нулю.

Предложение 5.10. Пусть (X, d) — произвольное метрическое пространство, и $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — кривая, выходящая из точки p , для которой существует $\angle\gamma\gamma$ в p . Тогда $\angle\gamma\gamma = 0$.

Доказательство. Ясно, что $\angle\gamma(t)p\gamma(t) = 0$ для любого $t \in [a, b]$. Так как $\angle\gamma\gamma$ существует, то $\angle\gamma\gamma = \lim_{t \rightarrow a} \angle\gamma(t)p\gamma(t) = 0$, что и требовалось. $\square$

Предложение 5.11. Пусть (X, d) — произвольное метрическое пространство, и $p \in X$. Рассмотрим множество $\overline{D}_p(X)$ всех кривых, выходящих из p и имеющих направление. Пусть ν — следующее отношение на $\overline{D}_p(X)$: две кривые из $\overline{D}_p(X)$ находятся в отношении ν , если они имеют одно и то же направление. Тогда ν — эквивалентность.

Доказательство. Рефлексивность ν вытекает из предложения 5.10. Симметричность ν из того, что $\angle\gamma\delta = \angle\delta\gamma$. Докажем транзитивность.

Пусть $\angle\gamma_1\gamma_2 = \angle\gamma_2\gamma_3 = 0$. По теореме 5.7, имеем

$$\angle_{\sup}\gamma_1\gamma_3 \leq \angle_{\sup}\gamma_1\gamma_2 + \angle_{\sup}\gamma_2\gamma_3 = \angle\gamma_1\gamma_2 + \angle\gamma_2\gamma_3 = 0,$$

поэтому $\angle_{\sup}\gamma_1\gamma_3 = 0$, и так как $0 \leq \angle_{\inf}\gamma_1\gamma_3 \leq \angle_{\sup}\gamma_1\gamma_3 = 0$, имеем $\angle_{\inf}\gamma_1\gamma_3 = \angle_{\sup}\gamma_1\gamma_3$, так что $\angle\gamma_1\gamma_3$ существует и равен нулю, следовательно, γ_1 и γ_3 находятся в отношении ν . $\square$

Предложение 5.12. Пусть (X, d) — произвольное метрическое пространство, $p \in X$ и $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \overline{D}_p(X)$. Предположим, что $\angle\gamma_1\gamma_2 = 0$ и $\angle\delta_1\delta_2 = 0$. Тогда $\angle_{\sup}\gamma_1\delta_1 = \angle_{\sup}\gamma_2\delta_2$. Таким образом, $\angle_{\sup}$ определяет метрику на классах определенной эквивалентности ν .

Доказательство. Из теоремы 5.7 вытекает, что

$$\angle_{\sup}\gamma_1\delta_1 \leq \angle_{\sup}\gamma_1\gamma_2 + \angle_{\sup}\gamma_2\delta_2 + \angle_{\sup}\delta_2\delta_1 = \angle_{\sup}\gamma_2\delta_2.$$

Аналогично доказывается и обратное неравенство. $\square$

Определение 5.13. Множество классов эквивалентности ν , определенной на $\overline{D}_p(X)$, вместе с метрикой $\angle_{\sup}$, обозначим через $D_p(X)$ и будем называть *пространством направлений*.

Замечание 5.14. Если две кривые γ и δ , выходящие из точки p , имеют направления, то отсюда, вообще говоря, не вытекает существование $\angle\gamma\delta$ (ниже мы приведем пример). Тем не менее, если для любых таких кривых угол $\angle$ определен, то $\angle$ совпадает с $\angle_{\sup}$ и, следовательно, является метрикой на $D_p(X)$.

Пример 5.15. Рассмотрим манхеттенскую плоскость с координатами x, y и расстоянием, заданным нормой $\|(x, y)\| = |x| + |y|$. Так как метрика любого нормированного пространства является строго внутренней, а отрезки прямых — кратчайшими, то, в силу предложения 5.4, определены направления всех лучей. Однако между некоторыми лучами угол не определен.

Пусть r_1 — луч, идущий в направлении $(1, 1)$, а r_2 — луч, идущий в направлении $(-1, 1)$. Если угол между этими лучами существует, то все треугольники OA_1A_2 , где $O = (0, 0)$, а A_i — внутренняя точка луча r_i , должны иметь один и тот же евклидов угол при вершине O . Однако если взять $A_1 = (1/2, 1/2)$, $A_2 = (-1/2, 1/2)$, то треугольник OA_1A_2 будет равносторонним, поэтому, если угол при вершине O существует, то он равен $\pi/3$. Если же точку A_1 заменить на $(1, 1)$, то получим равнобедренный треугольник с основанием длины 1 и боковыми сторонами, равными 2. Поэтому, если угол между лучами r_i существует, то он — отличен от $\pi/3$.

Упражнение 5.16. Докажите, что на нормированной плоскости, отличной от евклидовой, всегда существуют два луча, угол между которыми не определен.

5.3 Пространства Александрова

В данном разделе мы опишем важные классы метрических пространств со строго внутренней метрикой, которые выделяются с помощью треугольников сравнения. Выше мы сравнивали только вершины этих треугольников (в случае общих метрических пространств, стороны исходного треугольника не определены). Теперь же мы будем соединять вершины кратчайшими кривыми и сравнивать полученный “одномерный” треугольник с его реализацией на плоскости. Здесь также имеется возможность рассматривать в качестве “плоскости сравнения” не только евклидову, но и “плоскость” ненулевой постоянной кривизны, а именно, плоскость Лобачевского или сферу. Как уже отмечалось, на сфере данного радиуса нельзя реализовать слишком большие треугольники. Но это не будет служить для нас препятствием, так как мы собираемся изучать лишь локальные характеристики метрического пространства, т.е. рассматривать треугольники в достаточно малых окрестностях точек.

Чтобы интуитивно понять смысл сравнения треугольников, обратим внимание на то, чем отличаются треугольники с равными по длине сторонами, реализованные на евклидовой плоскости, плоскости Лобачевского и на сфере. Ясно, что треугольники на плоскости Лобачевского “уже” треугольников на евклидовой плоскости, которые, в свою очередь, “уже” соответствующих треугольников на сфере. Это отличие, в частности, приводит к тому, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше π , на евклидовой плоскости — равна π , а на сфере — больше π . Чтобы измерить “узость”, мы введем в рассмотрение дистанционные функции, которые будут измерять расстояние от вершины треугольника до точек противоположной стороны. Естественно, чем больше эта функция, тем “шире” треугольник. Затем мы выясним, что рассматриваемые ограничения на дистанционные функции эквивалентны соответствующим ограничениям на углы сравнения. В результате, мы дадим три эквивалентных определения пространств Александрова.

Перейдем к подробностям.

Прежде всего, в этом разделе метрики изучаемых пространств всегда будут предполагаться строго внутренними, т.е. для каждой пары точек такого пространства существует соединяющая их кратчайшая кривая (конечной длины). Итак, пусть (X, ρ) — такое пространство.

5.3.1 Дистанционные функции

Если мы хотим подчеркнуть, что в функции расстояния $\rho(p, x)$ точка p фиксирована и мы интересуемся зависимостью этой функции именно от x , будем записывать ее в виде $\rho_p(x)$.

Пусть $\gamma: [0, T] \rightarrow X$ — произвольная натурально параметризованная кратчайшая, соединяющая точка $a = \gamma(0)$ и $b = \gamma(T)$. Так как метрика d — строго внутренняя, имеем $T = \rho(a, b)$. Рассмотрим произвольную точку $c \in X$, и пусть $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ — треугольник сравнения для треугольника abc . Так как $|\bar{a}\bar{b}| = \rho(a, b) = T$, определена натуральная параметризация $\bar{\gamma}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ отрезка $[\bar{a}, \bar{b}]$, $\bar{\gamma}(0) = \bar{a}$, $\bar{\gamma}(T) = \bar{b}$.

Определение 5.17. Во введенных выше обозначениях,

- (1) функция $g(s) = \rho_c(\gamma(s))$ называется (одномерной) *дистанционной функцией* для пары (c, γ) , а
- (2) функция $\bar{g}(s) = |\bar{c}\bar{\gamma}(s)|$ — *функцией сравнения* для g , см. рис. 5.6.

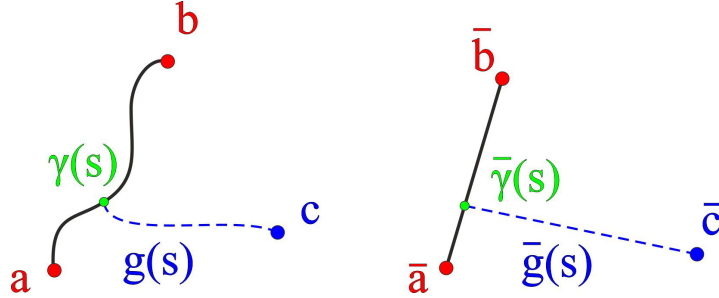


Рис. 5.6: Дистанционная функция $g(s)$ и функция сравнения $\bar{g}(s)$.

Определение 5.18 (Сравнение дистанционных функций). Говорят, что пространство (X, ρ) имеет *неположительную кривизну*, если у каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U^x , называемая *нормальной областью*, что для каждой точки $p \in U^x$ и кратчайшей γ , также лежащей в U^x , дистанционная функция g для пары (p, γ) удовлетворяет $g \leq \bar{g}$, где, как и выше, $\bar{g}$ — функция сравнения для g . Если в данном только что определении заменить знак “ $\leq$ ” на “ $\geq$ ”, то получим определение пространства *неотрицательной кривизны*.

Упражнение 5.19. Докажите, что если в определении 5.18 ограничиться сравнением расстояния между точкой p и серединой кратчайшей γ , то полученное определение останется эквивалентным исходному.

Замечание 5.20. Пространства, в которых выполняются ограничения на кривизну, называются *пространствами Александрова*.

Замечание 5.21. Введение натурального параметра на кривой γ из определения 5.18 было сделано для удобства изложения. Легко сформулировать это определение для произвольной точки и любой, как угодно параметризованной кратчайшей. Кроме того, легко видеть, что если рассматривать дистанционную функцию как функцию от точки кривой γ , то эта функция не будет зависеть от параметризации кривой.

Замечание 5.22. Легко видеть, что если каждая точка пространства X содержится в некоторой нормальной области U^x , то у любой точки $x \in X$ имеется такая нормальная область $V^x \subset U^x$, что любая кратчайшая, соединяющая точки из V^x , целиком лежит в U^x . Это замечание делает очевидным эквивалентность приводимой ниже переформулировки определения пространств неположительной (неотрицательной) кривизны.

Для произвольной тройки точек $x_1, x_2, x_3 \in X$, *одномерным треугольником* $x_1x_2x_3$ назовем любую тройку $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ кратчайших, где кривая γ_i соединяет точки x_j и x_k , $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Точки x_1, x_2, x_3 называются *вершинами*, а кривые γ_i — *ребрами* или *сторонами* этого треугольника. В дальнейшем нам будет удобно записывать стороны γ_i через x_jx_k или через x_kx_j в зависимости от того, является ли начальной точкой кривой γ_i точка x_j или x_k .

Пусть g_i — дистанционная функция пары (x_i, γ_i) , а $\bar{g}_i$ — функция сравнения для g_i .

Определение 5.23 (Сравнение треугольников). Во введенных выше обозначениях, одномерный треугольник назовем *тощим*, если $g_i \leq \bar{g}_i$ при всех i ; если заменить “ $\leq$ ” на “ $\geq$ ”, то такой этот треугольник назовем *толстым*. Говорят, что пространство (X, ρ) имеет *неположительную кривизну* (*неотрицательную кривизну*), если у каждой точки имеется такая окрестность, что все лежащие в ней одномерные треугольники являются тощими (соответственно, толстыми).

5.3.2 Монотонность углов

Выпустим из точки $p \in X$ две кратчайших $\gamma(s)$, $s \in [a, b]$, и $\delta(t)$, $t \in [c, d]$. В разделе 5.1 мы определили углы сравнения в предположении, что кривые γ и δ не возвращаются в точку p . Заметим, что в нашем случае, когда γ и δ предполагаются кратчайшими, это условие выполняется автоматически.

Определение 5.24 (Монотонность углов). Говорят, что пространство (X, ρ) имеет *неположительную кривизну*, если у каждой точки $x \in X$ существует

такая окрестность U^x , что для каждой точки $p \in U^x$ и любых выходящих из p кратчайших $\gamma(s)$, $s \in [a, b]$, и $\delta(t)$, $t \in [c, d]$, также лежащих в U^x , угол сравнения $\angle \gamma(s)p\delta(t)$ не возрастает при каждом фиксированном значении одной из переменных s и t и уменьшении другой (т.е. угол сравнения — неубывающая функция по каждой из переменных s и t). Если в данном только что определении “не возрастает” заменить на “не убывает”, то получим определение пространства *неотрицательной кривизны*.

Так как у монотонной функции всегда есть предел, имеет место следующий результат.

Предложение 5.25. *Если (X, ρ) — пространство неположительной или неотрицательной кривизны в смысле определения 5.24, то между любыми двумя кратчайшими с общим началом всегда существует угол.*

5.3.3 Сравнение углов

Пусть γ_1 , γ_2 и γ_3 — кратчайшие, выходящие из одной и той же точки p и соединяющие p соответственно с точками x_1 , x_2 и x_3 , причем кривая, полученная последовательным прохождением γ_1 и γ_2 , также является кратчайшей. Тогда если существуют углы $\angle \gamma_1 \gamma_3$ и $\angle \gamma_2 \gamma_3$, то они называются *смежными*.

Определение 5.26 (Сравнение углов). Говорят, что пространство (X, ρ) имеет *неположительную кривизну*, если у каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U^x , что для каждой точки $p \in U^x$ и любого одномерного треугольника, лежащего в U^x , углы в его вершинах существуют и не превосходят соответствующих углов сравнения для этого треугольника. Если в данном только что определении “не превосходят” заменить на “не меньше”, причем **дополнительно потребовать, чтобы сумма смежных углов всегда равнялась π** , то получим определение пространства *неотрицательной кривизны*.

Замечание 5.27. Как отмечено в [1], необходимость условия на смежные углы, по-видимому, до сих пор не выяснена.

Ниже мы докажем эквивалентность определений 5.23, 5.24 и 5.26, используя следующий результат, доказательство которого элементарно и мгновенно усматривается из рис. 5.7.

5.3.4 Лемма Александрова

Лемма 5.28 (Лемма Александрова). *В четырехугольнике $abcd$, расположенном на евклидовой плоскости, точки a и c лежат в разных полуплоскостях относительно прямой bd , а числа $|ab|$, $|bc|$ и $|ad| + |dc|$ удовлетворяют неравенству треугольника. Обозначим через $a'b'c'$ треугольник, в котором $|a'b'| = |ab|$, $|b'c'| = |bc|$ и $|a'c'| = |ad| + |dc|$, и пусть $d' \in [a', c']$ такая, что $|a'd'| = |ad|$. Тогда $\angle adb + \angle bdc < \pi$, если и только если $|b'd'| < |bd|$.*

При этом, имеем также $\angle b'a'd' < \angle bad$ и $\angle b'c'd' < \angle bcd$, см. рис. 5.7, слева. Кроме того, предыдущее утверждение, в котором все знаки “<” заменены на “>”, также имеет место, см. рис. 5.7, справа.

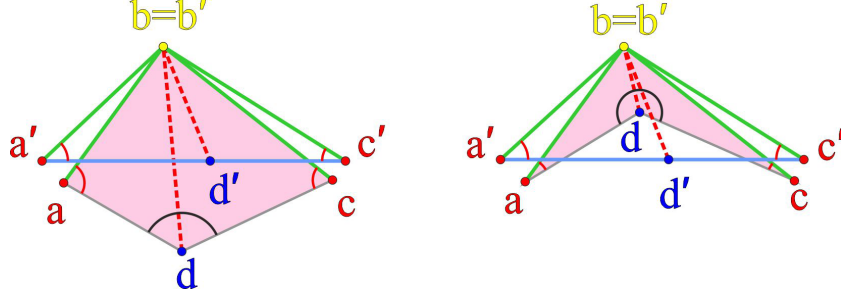


Рис. 5.7: Лемма Александрова.

5.3.5 Эквивалентность трех определений

Докажем теперь эквивалентность данных выше определений пространств Александрова.

Теорема 5.29. *Определения 5.23, 5.24 и 5.26 эквивалентны.*

Доказательство. Так как доказательства для неположительной и для неотрицательной кривизны аналогично, приведем доказательство для неположительной кривизны, а затем объясним, какие дополнения нужно сделать в случае неотрицательной кривизны.

Мы докажем следующие импликации:

сравнение треугольников $\xRightarrow{(1)}$ монотонность углов $\xRightarrow{(2)}$ сравнение углов $\xRightarrow{(3)}$
сравнение треугольников.

(1) Пусть выполнено условие сравнения треугольников. Покажем, что тогда выполняется условие монотонности углов.

Возьмем произвольную точку $p \in X$ и выпустим из нее кратчайшие γ и δ . Пусть a_1 и a_2 — точки на γ , причем a_1 лежит между p и a_2 ; пусть b — произвольная точка на δ ; все три точки лежат в некоторой нормальной области. Мы покажем, что $\angle a_1pb \leq \angle a_2pb$, чем и завершим разбор случая (1).

Рассмотрим треугольник сравнения $\bar{a}_2\bar{p}\bar{b}$ для a_2pb , и пусть точка $\bar{a}_1 \in [\bar{p}, \bar{a}_2]$ такова, что $|\bar{p}\bar{a}_1| = \rho(p, a_1)$. По условию, треугольник a_2pb тощий, поэтому $\rho(b, a_1) \leq |\bar{b}\bar{a}_1|$. Таким образом, если $a'_1p'b'$ обозначает треугольник сравнения для a_1pb , то в нем $|p'a'_1| = |\bar{p}\bar{a}_1|$, $|p'b'| = |\bar{p}\bar{b}|$, $|b'a'_1| \leq |\bar{b}\bar{a}_1|$, см. рис. 5.8, поэтому

$$\angle a_1pb = \angle a'_1p'b' \leq \angle \bar{a}_1\bar{p}\bar{b} = \angle \bar{a}_2\bar{p}\bar{b} = \angle a_2pb,$$

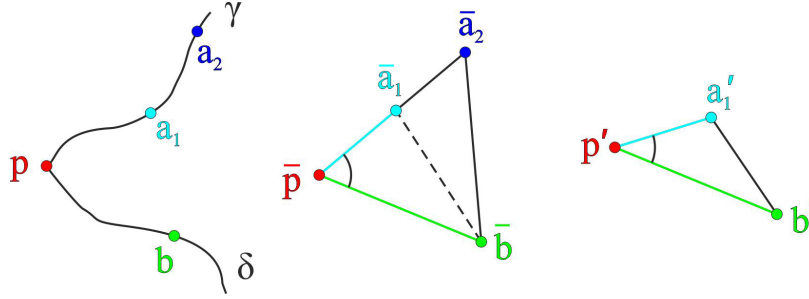


Рис. 5.8: Доказательство теоремы 5.29, случай (1).

что и требовалось.

(2) Пусть выполнено условие монотонности углов. Покажем, что тогда выполняется условие сравнения углов.

Возьмем произвольный одномерный треугольник abc , лежащий в нормальной области. Пусть $\gamma = ab$ и $\delta = ac$ — стороны этого треугольника, параметризованные так, что $\gamma(0) = \delta(0) = a$. Как было отмечено выше, условие монотонности гарантирует существование углов между любыми кратчайшими, в частности, существует $\angle\gamma\delta$.

Пусть $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ — треугольник сравнения для abc . Мы покажем, что $\angle\gamma\delta \leq \angle\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, чем и завершим разбор случая (2).

Из существования углов вытекает, что

$$\angle\gamma\delta = \lim_{t \rightarrow 0+} \angle\gamma(t)a\delta(t).$$

Но, по условию монотонности, последний предел не превосходит $\angle bac = \angle\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, что и требовалось.

(3) Наконец, пусть выполнено условие сравнения углов. Покажем, что тогда выполняется условие сравнения треугольников.

Пусть $x \in X$ — произвольная точка; V^x — такая окрестность x , что все кратчайшие, соединяющие точки из V^x , лежат в некоторой нормальной области $U^x \supset V^x$. Рассмотрим в V^x произвольный одномерный треугольник abc и точку d на стороне ac . Используя эту точку, мы покажем, что треугольник abc — тощий, чем и завершим разбор случая (3).

Обозначим через γ_a и γ_b части стороны ac треугольника abc , на которые ее поделила точка d ; пусть γ_b — произвольная кратчайшая, соединяющая d с b . Заметим, что, в силу следствия 5.8, имеем $\angle\gamma_a\gamma_b + \angle\gamma_b\gamma_c \geq \angle\gamma_a\gamma_c$. По предложению 5.4, $\angle\gamma_a\gamma_c = \pi$. Так как имеет место условие сравнения углов, получаем

$$\angle adb + \angle bdc \geq \angle\gamma_a\gamma_b + \angle\gamma_b\gamma_c \geq \angle\gamma_a\gamma_c = \pi.$$

Обозначим через $\bar{a}\bar{b}\bar{d}$ и $\bar{b}\bar{d}\bar{c}$ треугольники сравнения для abd и bdc соответственно, расположенные так, чтобы вершины $\bar{a}$ и $\bar{c}$ лежали в разных полуплоскостях относительно прямой $\bar{b}\bar{d}$. Как было установлено выше,

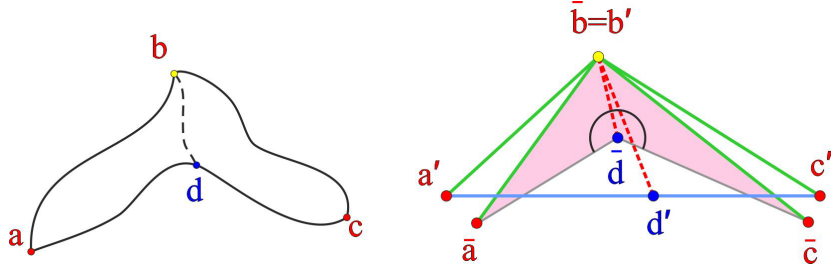


Рис. 5.9: Доказательство теоремы 5.29, случай (3).

$\angle \bar{a}\bar{d}\bar{b} + \angle \bar{b}\bar{d}\bar{c} = \angle adb + \angle bdc \geq \pi$. Далее, так как

$$|\bar{a}\bar{d}| + |\bar{d}\bar{c}| = \rho(a, d) + \rho(d, c) = \rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c) = |\bar{a}\bar{b}| + |\bar{b}\bar{c}|,$$

выполняются условия леммы Александрова 5.28, второй случай, см. рис. 5.9, поэтому если $a'b'c'$ — треугольник сравнения для abc , и $d' \in [a', c']$ такова, что $|a'd'| = \rho(a, d)$, то $|b'd'| \geq |\bar{b}\bar{d}| = \rho(b, d)$. Так как точка d была выбрана произвольно, заключаем, что треугольник abc — тощий.

(4) Доказательство теоремы для неотрицательной кривизны проводится почти везде заменой знаков неравенств на противоположные. Единственное отличие — при доказательстве выполнения условия сравнения углов нужно доказывать еще и то, что сумма смежных углов равна π . Итак, чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 5.30. *Предположим, что в (X, ρ) выполняется условие монотонности углов, определяющее пространство неотрицательной кривизны. Тогда сумма любых двух смежных углов равна π .*

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — кратчайшие, выходящие из точки p , причем кривая, полученная последовательным прохождением γ_1 и γ_3 , также является кратчайшей. Мы должны показать, что $\angle \gamma_1\gamma_2 + \angle \gamma_2\gamma_3 = \pi$. По предложению 5.4, пункт 2, и следствию 5.8, имеем $\angle \gamma_1\gamma_2 + \angle \gamma_2\gamma_3 \geq \pi$. Докажем обратное неравенство.

Выберем на каждой кривой γ_i точку $x_i \neq p$, и обозначим через $\bar{x}_1\bar{p}\bar{x}_2$ и $\bar{x}_2\bar{p}\bar{x}_3$ треугольники сравнения для x_1px_2 и x_2px_3 , расположенные так, чтобы вершины $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_3$ лежали по разные стороны относительно прямой $\bar{p}\bar{x}_2$. Кроме того, через $x'_1x'_2x'_3$ обозначим треугольник сравнения для $x_1x_2x_3$, и выберем $p' \in [x'_1, x'_3]$ так, чтобы $|x'_1p'| = \rho(x_1, p)$, см. рис. 5.10.

Условие монотонности углов влечет

$$\angle x'_2x'_1x'_3 = \angle x_2x_1x_3 \leq \angle x_2x_1p = \angle \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{p},$$

откуда $|\bar{x}_2\bar{p}| \geq |x'_2p'|$. По лемме Александрова 5.28, имеем

$$\angle x_1px_2 + \angle x_2px_3 = \angle \bar{x}_1\bar{p}\bar{x}_2 + \angle \bar{x}_2\bar{p}\bar{x}_3 \leq \pi,$$

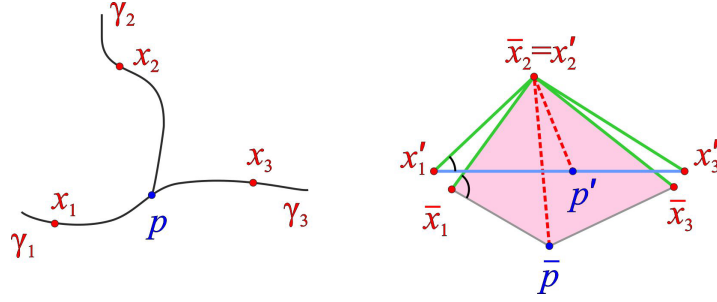


Рис. 5.10: Доказательство теоремы 5.29, случай (4).

откуда, переходя к пределу при $x_i \rightarrow p$, получаем требуемое обратное неравенство. $\square$

Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Приведем примеры пространств Александрова. Доказательство того, к какому классу относятся те или иные пространства, мы оставляем читателю.

5.3.6 Примеры пространств Александрова

В предыдущей главе мы описали разные операции над метрическими пространствами, в частности, определили понятие конуса над метрическим пространством. Выпишем его метрику в явном виде.

Итак, пусть (X, ρ) — метрическое пространство, тогда конус $\text{Con}(X)$ получается из прямого произведения $X \times [0, \infty)$ (на луче $[0, \infty)$ рассматривается стандартная функция расстояния) склеиванием всех точек $X \times \{0\}$ в одну точку O — вершину этого конуса. Каждую точку конуса $\text{Con}(X)$ можно представить парой (x, t) , где $x \in X$ и $t \in [0, \infty)$ (если $t = 0$, то каждая такая точка совпадает с O). Итак, пусть $a = (x, t)$, $b = (y, s)$, тогда метрика d_c рассматриваемого конуса будет иметь вид

$$d_c(a, b) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos(\rho(x, y))} & \text{при } d(x, y) \leq \pi, \\ t + s & \text{при } d(x, y) \geq \pi. \end{cases}$$

Пример 5.31. Евклидово пространство является примером пространства Александрова как неположительной, там и неотрицательной кривизны. Сюда же относится любое полное многообразие с плоской метрикой, например, цилиндр, конус с выкинутой вершиной, плоский тор, плоская бутылка Клейна и т.д. Еще один важный пример таких пространств — конус над отрезком длины не больше π (если длина отрезка больше π , то такой конус уже не является пространством неотрицательной кривизны).

Пример 5.32. Любое нормированное пространство, отличное от евклидова, не является пространством Александрова. Действительно, по упражнению 5.16, в таком пространстве всегда существует два выходящих из одной точки луча (являющихся, как мы отмечали, кратчайшими), угол между которыми не определен. Последнее противоречит условию сравнения углов.

Пример 5.33. Прямое произведение пространств Александрова кривизны одного знака вновь является пространством Александрова этого же знака.

Определение 5.34. Подмножество метрического пространства (X, ρ) называется *выпуклым*, если сужение на него метрики ρ является конечной строго внутренней метрикой.

Пример 5.35. Выпуклое подмножество пространства Александрова является пространством Александрова этого же знака.

Пример 5.36. Открытое множество в пространстве Александрова, наделенное индуцированной внутренней метрикой, является пространством Александрова этого же знака.

Приведем примеры пространств неположительной кривизны.

Примеры пространств неположительной кривизны

Пример 5.37. Плоскость (пространство) Лобачевского. Любая полная двумерная поверхность неположительной гауссовой кривизны. Полное риманово многообразие неположительной секционной кривизны.

Пример 5.38. Склеенные несколько экземпляров луча $[0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ при отождествлении 0 (или несколько экземпляров отрезка при отождествлении их начал). Это мгновенно вытекает из условия сравнения углов: углы в вершинах любого невырожденного треугольника равны нулю и, поэтому, меньше соответствующих углов в треугольнике сравнения. Таким же свойством обладает любой метрический граф.

Пример 5.39. Букет метрических пространств (см. раздел 4.2.6). Например, объединение координатной xy -плоскости и оси z .

Пример 5.40. Блокнот, т.е. несколько полуплоскостей, склеенные по общей граничной прямой.

Пример 5.41. Конус над окружностью, длина которой не меньше 2π .

Пример 5.42. Конус над отрезком любой длины.

Пример 5.43. Двумерное полиэдральное пространство является пространством неположительной кривизны, если и только если линк каждой вершины не содержит подпространства, изометричного окружности длины меньше, чем 2π .

Пример 5.44. Конус над графом Γ является пространством неположительной кривизны тогда и только тогда, когда в Γ длина каждой нетривиальной петли не меньше 2π .

Приведем теперь примеры пространств неотрицательной кривизны.

Примеры пространств неотрицательной кривизны

Пример 5.45. Сфера в евклидовом пространстве. Любая полная двумерная поверхность неотрицательной гауссовой кривизны. Полное риманово многообразие неотрицательной секционной кривизны.

Пример 5.46. Конус над окружностью, длина которой не больше 2π .

Пример 5.47. Конус над отрезком любой длины не больше π .

Пример 5.48. Двумерное полиэдральное пространство является пространством неотрицательной кривизны, если и только если оно представляет собой топологическое многообразие (возможно, с краем), и сумма углов вокруг каждой его вершины не больше 2π , а если вершина принадлежит краю — то не больше π .