

Тема 4

Метрические операции.

В этой лекции мы обобщим понятие метрического пространства и над полученным обобщением определим ряд операций, а также обсудим свойства этих операций.

4.1 Обобщение понятия метрики

Будем рассматривать *расширенную полупрямую* $\overline{\mathbb{R}}_+$, добавив к полупрямой $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ символ бесконечности ∞ и распространив на него порядок, а также операции сложения и умножения следующим образом:

- $x < \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$;
- $x + \infty = \infty + x = \infty$ для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$;
- $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ для любого ненулевого $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (операции $0 \cdot \infty$ и $\infty \cdot 0$ не определены);
- $\inf \emptyset = \infty$.

Числа $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, отличные от ∞ , будем называть *конечными*.

Следующее определение переопределяет понятие метрики, разрешая расстояниям равняться бесконечности.

Определение 4.1. *Метрикой на множестве X будем называть функцию $d: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющую аксиомам метрики из определения 1.1 (невырожденность, симметричность, неравенство треугольника). Полуметрикой на множестве X будем называть симметричную функцию $d: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, равную нулю на всех парах (x, x) и удовлетворяющую неравенству треугольника (полуметрика отличается от метрики тем, что расстояние между разными точками теперь может равняться нулю). Множество, вместе с заданной на нем метрикой (полуметрикой), называется метрическим (полуметрическим) пространством.*

Замечание 4.2. Если метрика (полуметрика) d на множестве X не принимает значение бесконечность, то d называется *конечной*.

Конструкция 4.3. Пусть d — полуметрика на X . Рассмотрим на X отношение R , заданное условием $xRy \Leftrightarrow d(x, y) = 0$. Очевидно, R — отношение эквивалентности. Множество классов этой эквивалентности обозначим через X/R . Несложно проверяется (сделайте это), что для любых xRx' и yRy' имеем $d(x, y) = d(x', y')$, поэтому корректно определено расстояние между классами R -эквивалентности, равное расстоянию между любыми их представителями. На самом деле, мы получим функцию, которая удовлетворяет всем аксиомам метрики (она невырождена, так как расстояние между элементами разных классов не равно нулю). В дальнейшем множество X/R будем обозначать через X/d , а определенную только что полуметрику на X/d обозначим той же буквой d .

Конструкция 4.4. Пусть d — полуметрика на X . Рассмотрим на X отношение R , заданное условием $xRy \Leftrightarrow d(x, y) < \infty$. Очевидно, R — отношение эквивалентности. Каждый класс этой эквивалентности представляет собой максимальное (по включению) подпространство, на котором полуметрика конечна. Так как различные классы эквивалентности не пересекаются и покрывают все множество, эти максимальные подпространства не пересекаются, покрывают X , и расстояние между любыми точками из разных классов бесконечно. Тем самым, мы получили разложение пространства (X, d) на максимальные подпространства с конечными полуметриками.

4.1.1 О внутренних и пунктирных полуметриках

Напомним, что мы определили внутреннюю метрику как ту, для которой точная нижняя грань длин кривых, соединяющих любые две заданные точки, равна расстоянию между этими точками. Напомним также, что мы положили $\inf \emptyset = \infty$. Это позволяет отнести к пространствам с внутренней полуметрикой даже те полуметрические пространства, в которых некоторые точки не соединяются ни одной кривой: в этом случае для внутренней полуметрики расстояние между такими точками равно ∞ .

Более того, если раньше, для определения внутренней метрики $\hat{d}$, порожденной функционалом длины L_d , требовалось, чтобы любые две точки соединялись спрямляемой кривой, то теперь такое условие излишне: если точки не соединяются спрямляемой кривой, то расстояние между ними в полуметрике $\hat{d}$ равно ∞ . Итак, теперь определение полуметрики $\hat{d}$ могло бы выглядеть так.

Пусть (X, d) — произвольное полуметрическое пространство. Для любых x и y из X положим

$$\hat{d}(x, y) = \inf\{L_d(\gamma) \text{ по всем кривым } \gamma, \text{ соединяющим } x \text{ и } y\}.$$

Тогда $\hat{d}$ является внутренней полуметрикой на X , которая называется *внутренней полуметрикой, индуцированной d или порожденной функционалом*

L_d . Тем самым, при таком расширенном понимании полуметрики, $\hat{d}$ существует всегда, при любом d .

Замечание 4.5. Даже такое расширенное определение внутренней полуметрики обладает некоторыми “неприятными” особенностями. Так, например, если из прямой со стандартной внутренней метрикой $d(x, y) = \hat{d}(x, y) = |x - y|$ выкинуть одну точку, то новое $\hat{d}$ -расстояние между точками образовавшихся открытых лучей будет равно бесконечности. Имеется естественная возможность избежать этих “неприятностей”, избавившись от непрерывности. Опишем ее.

Выше мы определили ломаную, вписанную в кривую (определение 1.22). Естественно, просто *ломаной* L в *полуметрическом пространстве* (X, d) , соединяющей точки x и y из X , называть произвольную конечную последовательность $x = A_0, A_1, \dots, A_n = y$ точек из X — *вершин ломаной* L . *Ребром ломаной* L называется каждая пара $A_{i-1}A_i$ последовательных вершин; *длиной* $d(L)$ *ломаной* L — сумма длин $d(A_{i-1}A_i) = d(A_{i-1}, A_i)$ всех ребер $A_{i-1}A_i$ ломаной L ; *максимальным шагом* $m_d(L)$ *ломаной* L — число $\max d(A_{i-1}, A_i)$.

Определение 4.6. Полуметрику d на множестве X будем называть *обобщенной внутренней*, если для любых $x, y \in X$ таких, что $d(x, y) < \infty$, и любого $\varepsilon > 0$ существует соединяющая x и y ломаная L , у которой $m_d(L) < \varepsilon$ и $d(L) < d(x, y) + \varepsilon$.

Пример 4.7. Стандартная функция расстояния, определенная на множестве рациональных чисел, является обобщенной внутренней, но не внутренней (в индуцированной ей внутренней метрике расстояние между любыми различными рациональными числами равно ∞).

В теме 3 мы определили понятие ε -середины между точками метрического пространства и доказали (теорема 3.30 и предложение 3.31), что в *полном метрическом пространстве* (X, d) метрика d является *внутренней*, если и только если она — *обобщенная внутренняя*. Если же пространство не полное, то, в силу предложения 3.31, условие того, что метрика внутренняя влечет существование ε -середин. Обратное же не верно: например, если из прямой со стандартной (внутренней) метрикой выбросить произвольную точку, то в полученном метрическом пространстве опять будут существовать ε -середины для любого $\varepsilon > 0$, однако, как отмечалось выше, метрика этого пространства перестанет быть внутренней. Оказывается, чтобы получить критерий для существования ε -середин без ограничения полноты, можно понятие внутренней метрики заменить на обобщенная внутренняя.

Теорема 4.8. Полуметрика d на множестве X является обобщенной внутренней, если и только если для каждой пары точек $x, y \in X$, $d(x, y) < \infty$, и каждого $\varepsilon > 0$ существует ε -середина.

Доказательство. Пусть d — обобщенная внутренняя полуметрика. Выберем произвольные $x, y \in X$, $d(x, y) < \infty$, любое $\varepsilon > 0$ и покажем, что для

этих точек существует ε -середина. Если $d(x, y) = 0$, то в качестве ε -середины возьмем x .

Пусть теперь $d(x, y) \neq 0$. Без ограничения общности, доказательство проведем для столь малых ε , для которых имеют смысл написанные ниже суммы. По определению, существует соединяющая x и y ломаная $L = A_0 A_1 \cdots A_n$ такая, что $d(L) < d(x, y) + \varepsilon$ и $m_d(L) < \varepsilon$. Легко видеть, что для некоторого i выполняется $d(A_0, A_{i-1}) \leq d(x, y)/2$ и $d(A_0, A_i) \geq d(x, y)/2$. Покажем, что A_i можно взять в качестве искомой ε -середины. Действительно, так как $m_d(L) < \varepsilon$, имеем

$$d(x, y)/2 \leq d(x, A_i) \leq d(x, A_{i-1}) + d(A_{i-1}, A_i) < d(x, y)/2 + \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} d(A_i, y) &\leq \sum_{k=i}^{n-1} d(A_k, A_{k+1}) = d(L) - \sum_{k=0}^{i-1} d(A_k, A_{k+1}) \leq d(L) - d(x, A_i) < \\ &< d(x, y) + \varepsilon - d(x, y)/2 = d(x, y)/2 + \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A_i, y) &\geq d(A_{i-1}, y) - d(A_{i-1}, A_i) \geq d(x, y) - d(x, A_{i-1}) - d(A_{i-1}, A_i) \geq \\ &\geq d(x, y) - d(x, y)/2 - \varepsilon = d(x, y)/2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Полученные неравенства доказывают, что A_i является ε -серединой для x и y .

Обратно, пусть для любых $x, y \in X$, $d(x, y) < \infty$, и $\varepsilon > 0$ существует ε -середина. Покажем, что полуметрика d — обобщенная внутренняя. Для этого достаточно показать, что для любых $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует соединяющая x и y ломаная L такая, что $d(L) < d(x, y) + \varepsilon$ и $m_d(L) < \varepsilon$.

Если $d(x, y) = 0$, то можно положить $L = xy$. Пусть теперь $d(x, y) = a \neq 0$. Выберем n столь большим, чтобы выполнялось $a/2^n < \varepsilon/2$, и положим $\delta = \varepsilon/2^{n+1}$.

(0) Пусть $A_0 = x$, $A_{2^n} = y$, а через L_0 обозначим ломаную $A_0 A_{2^n}$.

(1) Пусть $A_{2^{n-1}}$ — некоторая δ -середина для A_0 и A_{2^n} , а L_1 — ломаная $A_0 A_{2^{n-1}} A_{2^n}$.

(2) Пусть $A_{2^{n-2}}$ — некоторая δ -середина для A_0 и $A_{2^{n-1}}$, а $A_{2^{n-1}+2^{n-2}}$ — некоторая δ -середина для $A_{2^{n-1}}$ и A_{2^n} . Обозначим через L_2 ломаную $A_0 A_{2^{n-2}} A_{2^{n-1}} A_{2^{n-1}+2^{n-2}} A_{2^n}$.

И так далее.

Полученную на n -ом шаге ломаную $L_n = A_0 A_1 \cdots A_{2^n}$ обозначим через L и покажем, что она и есть искомая. Для этого оценим ее длину $d(L)$ и максимальный шаг $m_d(L)$.

Единственное ребро ломаной L_0 равно a . Ребра ломаной L_1 отличаются от $a/2$ меньше чем на δ . Ребра ломаной L_2 отличаются от половин ребер ломаной L_1 меньше чем на δ , поэтому они отличаются от $a/4$ меньше чем на

$\delta/2 + \delta$. Ребра ломаной L_2 отличаются от половин ребер ломаной L_1 снова меньше чем на δ , т.е. они отличаются от $a/4$ меньше чем на $\delta/4 + \delta/2 + \delta$. Теперь легко понять, что ребра ломаной $L = L_n$ отличаются от $a/2^n$ меньше чем на $\delta/2^n + \dots + \delta < 2\delta = \varepsilon/2^n$, т.е. $m_d(L) < a/2^n + \varepsilon/2^n < \varepsilon/2 + \varepsilon/2^n \leq \varepsilon$. Отсюда вытекает, что длина ломаной L меньше, чем $2^n(a/2^n + \varepsilon/2^n) = a + \varepsilon$. $\square$

По аналогии с тем, как по метрике d мы определяли индуцированную ей внутреннюю метрику $\hat{d}$, используем конструкцию из определения обобщенной внутренней полуметрики.

Конструкция 4.9. Пусть (X, d) — произвольное полуметрическое пространство и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Обозначим через $\mathcal{L}_\varepsilon$ семейство всех ломаных L в пространстве X , у которых $m_d(L) \leq \varepsilon$ (заметим, что $\mathcal{L}_\infty$ — это множество всех возможных ломаных в X). Для произвольных $x, y \in X$ через $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y)$ обозначим все ломаные из $\mathcal{L}_\varepsilon$, соединяющие x и y (множество $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y)$ может быть пустым). Положим $\check{d}_\varepsilon(x, y) = \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y)} d(L)$. Ясно, что функция $\check{d}_\varepsilon(x, y)$ параметра ε монотонно возрастает при убывании ε , поэтому у нее существует предел при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Положим

$$\check{d}(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \check{d}_\varepsilon(x, y).$$

Предложение 4.10. При всех $\varepsilon > 0$ функции $\check{d}_\varepsilon$ и $\hat{d}$ являются полуметриками.

Доказательство. Нетривиальным являются лишь неравенства треугольника. Пусть $x, y, z \in X$ — произвольные точки. Покажем, что $\check{d}_\varepsilon(x, z) \leq \check{d}_\varepsilon(x, y) + \check{d}_\varepsilon(y, z)$, откуда соответствующее неравенство для $\check{d}$ получается предельным переходом. Действительно, для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y, z)$ множество всех ломаных L с максимальным шагом меньше ε , которые соединяют x и z , проходя при этом через y . Ясно, что $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y, z) \subset \mathcal{L}_\varepsilon(x, z)$. Кроме того, для каждой ломаной $L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y, z)$ обозначим через $L_{[x, y]}$ и $L_{[y, z]}$ фрагменты этой ломаной между x, y и между y, z соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{d}_\varepsilon(x, z) &= \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, z)} d(L) \leq \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y, z)} d(L) = \\ &= \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y, z)} (d(L_{[x, y]}) + d(L_{[y, z]})) = \\ &= \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y, z)} d(L_{[x, y]}) + \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y, z)} d(L_{[y, z]}) = \\ &= \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y)} d(L) + \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(y, z)} d(L) = \hat{d}_\varepsilon(x, y) + \hat{d}_\varepsilon(y, z). \end{aligned}$$

$\square$

Определение 4.11. Определенные выше функции $\check{d}_\varepsilon$ и $\check{d}$ назовем соответственно ε -пунктирной и пунктирной полуметриками, индуцированными полуметрикой d .

Предложение 4.12 (Неравенство треугольника). *Для любой полуметрики d при каждом $\infty \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \geq 0$ имеем $d = \ddot{d}_\infty \leq \ddot{d}_{\varepsilon_2} \leq \ddot{d}_{\varepsilon_1} \leq \ddot{d}_0$, где $\ddot{d}_0(x, y)$ равно нулю в точности тогда, когда $d(x, y) = 0$, и равно ∞ , если $d(x, y) \neq 0$.*

Доказательство. Про монотонность функции $\ddot{d}_\varepsilon$ параметра ε мы уже говорили. Для доказательства равенства $d = \ddot{d}_\infty$ достаточно заметить, что $\mathcal{L}_\infty$ состоит из всех ломаных, так что для любых $x, y \in X$ множество $\mathcal{L}_\infty(x, y)$ содержит ломаную xy . Наконец, множество $\mathcal{L}_0$ состоит из ломаных, ребра которых имеют нулевую длину, поэтому каждая такая ломаная также имеет нулевую длину и, значит, не может соединять точки на ненулевом расстоянии. $\square$

Предложение 4.13. *Полуметрика d на множестве X является обобщенной внутренней тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\ddot{d}_\varepsilon = d$.*

Доказательство. Пусть сначала d — обобщенная внутренняя полуметрика. Выберем произвольные $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$, существует ломаная $L \in \mathcal{L}_\delta(x, y) \subset \mathcal{L}_\varepsilon(x, y)$ такая, что $d(L) < d(x, y) + \delta$, поэтому $\ddot{d}_\varepsilon(x, y) = \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y)} d(L) < d(x, y) + \delta$ и, в силу произвольности δ , имеем $\ddot{d}_\varepsilon \leq d$. Но, по предложению 4.12, выполняется $\ddot{d}_\varepsilon \geq d$, поэтому $\ddot{d}_\varepsilon = d$.

Обратно, пусть $\ddot{d}_\varepsilon = d$ для любого $\varepsilon > 0$. Покажем, что d — обобщенная внутренняя полуметрика.

Выберем произвольные $x, y \in X$ и положим $\varepsilon = d(x, y)$, тогда ломаная xy входит в $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y)$, поэтому, в силу неравенства треугольника, $\ddot{d}_\varepsilon(x, y) = d(x, y)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 4.14. Пунктирная полуметрика и внутренняя полуметрика, индуцированные одной и той же полуметрикой d , могут различаться даже для полных метрик (постройте пример).

Задача 4.15. Выясните, при каких условиях на полуметрику d пунктирная и внутренняя полуметрики, индуцированные d , совпадают.

Задача 4.16. Обобщите теоремы, доказанные в предыдущих темах для внутренней метрики, на случай пунктирной полуметрики.

Замечание 4.17. Для множества X целых чисел, наделенных стандартной функцией расстояния, индуцированная пунктирная метрика равна ∞ на каждой паре различных чисел. Можно ли так обобщить пунктирную полуметрику, чтобы на целых числах она совпала с евклидовой? Следующая конструкция дает такое обобщение.

Конструкция 4.18. Пусть (X, d) — произвольное полуметрическое пространство. Для каждого $x, y \in X$ обозначим через $\varepsilon_d(x, y)$ точную нижнюю грань множества тех $\varepsilon > 0$, для которых $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y) \neq \emptyset$. Положим

$$\ddot{d}(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_d(x, y)} \ddot{d}_\varepsilon(x, y).$$

Ясно, что если $\varepsilon_d(x, y) = 0$ при всех $x, y \in X$, то $\ddot{d}(x, y) = \check{d}(x, y)$.

Задача 4.19. Покажите, что $\ddot{d}$ — полуметрика.

Задача 4.20. Функцию $\ddot{d}$ назовем *обобщенной пунктирной полуметрикой*.

Задача 4.21. Покажите, что для треугольника ABC со сторонами $a \leq b \leq c$, противоположными вершинами A, B и C соответственно, выполняется $\ddot{d}(B, C) = a$, $\ddot{d}(A, C) = b$, $\ddot{d}(A, B) = a + b$.

Задача 4.22. Проверьте, что для любого подмножества X евклидовой прямой со стандартной евклидовой метрикой d имеем $\ddot{d} = d$.

4.2 Операции над полуметрическими пространствами

В этом параграфе мы определим ряд операций, позволяющих конструировать различные полуметрические пространства.

4.2.1 Индуцированная полуметрика и индуцированная внутренняя полуметрика

Пусть (X, d) — произвольное полуметрическое пространство, и Y — некоторое подмножество X .

Определение 4.23. Полуметрика на Y , сопоставляющая каждой паре точек $y_1, y_2 \in Y$ величину $d(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+$, называется *индуцированной* и обычно обозначается той же буквой d . Если хотят подчеркнуть, что на Y введена индуцированная полуметрика, то (Y, d) называют *подпространством в (X, d)* . Говорят также, что индуцированная полуметрика получена *ограничением полуметрики d на Y* .

Как было отмечено в параграфе 4.1.1, каждая полуметрика d порождает внутреннюю полуметрику $\hat{d}$.

Определение 4.24. В сделанных выше обозначениях, внутренняя полуметрика $\hat{d}$, порожденная полуметрикой, индуцированной на Y , называется *индуцированной d внутренней полуметрикой на Y* .

Пример 4.25. Пусть $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ — стандартная окружность на евклидовой плоскости. Тогда индуцированная на S^1 метрика d ставит в соответствие каждой паре точек $x, y \in S^1$ длину хорды $[x, y]$ окружности S^1 , а индуцированная внутренняя метрика $\hat{d}$ ставит в соответствие такой паре длину кратчайшей дуги окружности S^1 , ограниченной точками x и y .

4.2.2 Несвязное объединение

Пусть $\{(X_\alpha, d_\alpha)\}$ — семейство полуметрических пространств. Положим $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$ и определим функцию $d: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ так: если x и y принадлежат одному и тому же X_α , то $d(x, y) = d_\alpha(x, y)$, а если x и y принадлежат разным X_α , то положим $d(x, y) = \infty$. Легко видеть, что d является полуметрикой; ее называют *полуметрикой несвязного объединения*, а (X, d) — *несвязным объединением полуметрических пространств*.

Замечание 4.26. Конструкция 4.4 показывает, что каждое полуметрическое пространство представимо в виде несвязного объединения полуметрических пространств с конечными метриками.

Предложение 4.27. *Полуметрика несвязного объединения является внутренней тогда и только тогда, когда полуметрики всех входящих в это объединение полуметрических пространств — внутренние.*

4.2.3 Произведение

В приводимом ниже определении мы будем использовать естественный частичный порядок $\leq$ на $\overline{\mathbb{R}}_+^2$, а именно, мы пишем $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$, если и только если $x_1 \leq y_1$ и $x_2 \leq y_2$.

Определение 4.28. Будем говорить, что точки a, b и c из $\overline{\mathbb{R}}_+^2$ удовлетворяют *неравенству треугольника*, если ему удовлетворяют координаты этих точек. Эквивалентное условие: $a + b \geq c$, $a + c \geq b$ и $b + c \geq a$.

Определение 4.29. Функцию $\rho: \overline{\mathbb{R}}_+^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ назовем *связующей*, если для любых полуметрических пространств (X_1, d_1) и (X_2, d_2) функция $d_\rho: (X_1 \times X_2)^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, определенная по формуле

$$(4.1) \quad d_\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)),$$

является полуметрикой. Для каждой связующей функции ρ пространство $(X_1 \times X_2, d_\rho)$ назовем *полупрямым произведением пространств (X_1, d_1) и (X_2, d_2) со связующей функцией ρ* и обозначим через $(X_1, d_1) \times_\rho (X_2, d_2)$. Также будем писать $d_\rho = d_1 \times_\rho d_2$.

Замечание 4.30. Так как расстояние между совпадающими точками обязано равняться нулю, то для каждой связующей функции ρ выполняется $\rho(0, 0) = 0$.

Замечание 4.31. Если мы хотим, чтобы полупрямое произведение произвольных метрических пространств также было бы метрическим пространством, то на связующую функцию нужно накладывать еще и условие *невыврожденности*, а именно, требовать, чтобы ρ была положительна вне начала координат.

Определение 4.32. Связующую функцию, отличную от нуля вне начала координат, назовем *невыврожденной*.

Предложение 4.33. Функция $\rho: \overline{\mathbb{R}}_+^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ является связующей, если и только если

- (1) $\rho(0, 0) = 0$;
- (2) для любых $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$, удовлетворяющих неравенствам треугольника, выполняется $\rho(c) \leq \rho(a) + \rho(b)$ (а также два оставшихся неравенства).

Доказательство. Пусть сначала ρ — связующая функция. Как было отмечено выше, $\rho(0, 0) = 0$. Докажем теперь свойство (2).

Пусть $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ и $c = (c_1, c_2)$, тогда, в силу сделанных предположений на a , b и c , существуют треугольники $(X_i = A_i B_i C_i, d_i)$ с длинами сторон a_i , b_i , c_i , лежащих напротив вершин A_i , B_i и C_i соответственно. Рассмотрим полуметрическое пространство $(X_1, d_1) \times_\rho (X_2, d_2)$, тогда $A = (A_1, A_2)$, $B = (B_1, B_2)$ и $C = (C_1, C_2)$ — точки этого пространства. Так как d_ρ удовлетворяет неравенству треугольника, имеем

$$\rho(c) = d_\rho(A, B) \leq d_\rho(A, C) + d_\rho(C, B) = \rho(b) + \rho(a),$$

что и требовалось.

Обратно, предположим, что выполняются свойства (1) и (2). Рассмотрим произвольные полуметрические пространства (X_1, d_1) и (X_2, d_2) и покажем, что функция d_ρ , определенная по формуле 4.1, — полуметрика.

Как уже отмечалось выше, равенство $d_\rho(x, x) = 0$ для любого x вытекает из условия $\rho(0, 0) = 0$.

Проверим, что функция d_ρ симметрична. Имеем

$$\begin{aligned} d_\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \rho(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) = \\ &= \rho(d_1(y_1, x_1), d_2(y_2, x_2)) = d_\rho((y_1, y_2), (x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Наконец, проверим неравенство треугольника. Имеем

$$\begin{aligned} d_\rho((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= \rho(d_1(x_1, z_1), d_2(x_2, z_2)) \leq \\ &\leq \rho(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) + \rho(d_1(y_1, z_1), d_2(y_2, z_2)) = \\ &= d_\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_\rho((y_1, y_2), (z_1, z_2)), \end{aligned}$$

где неравенство выполняется в силу того, что числа $d_i(x_i, y_i)$, $d_i(y_i, z_i)$ и $d_i(x_i, z_i)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют неравенству треугольника. $\square$

Из предложения 4.33 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 4.34. Пусть $\rho: \overline{\mathbb{R}}_+^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ — связующая функция, тогда ρ — попуаддитивна, т.е. $\rho(a + b) \leq \rho(a) + \rho(b)$ для любых $a, b \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$.

Замечание 4.35. Функция ρ может быть устроена достаточно сложно. Например, положим $\rho(0) = 0$, а для всех остальных точек из $\overline{\mathbb{R}}_+^2$ определим ρ случайным образом равной 1 или 2. Легко проверяется, что ρ — связующая функция.

Приведем одно достаточное условие того, что функция является связующей.

Предложение 4.36. Пусть $\rho: \overline{\mathbb{R}}_+^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ — функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

- (1) $\rho(0) = 0$;
- (2) **субаддитивность:** $\rho(a + b) \leq \rho(a) + \rho(b)$;
- (3) **монотонность:** если $a \leq b$, то $\rho(a) \leq \rho(b)$.

Тогда ρ — связующая функция.

Доказательство. В силу предложения 4.33, достаточно показать, что для любых a, b и c из $\overline{\mathbb{R}}_+^2$, удовлетворяющих неравенствам треугольника, выполняется $\rho(c) \leq \rho(a) + \rho(b)$. Однако, для таких точек, в силу монотонности и субаддитивности, получаем $\rho(c) \leq \rho(a + b) \leq \rho(a) + \rho(b)$. $\square$

Приведем некоторые примеры связующих функций:

- (1) $\rho_1(u, v) = u + v$;
- (2) $\rho_2(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$;
- (3) $\rho_\infty(u, v) = \max\{u, v\}$.

Замечание 4.37. Легко видеть, что все только-что определенные связующие функции невырождены, т.е. порожденные ими полупрямые произведения переводят метрические пространства в метрические пространства.

Определение 4.38. Если $\rho = \rho_2$, то d_ρ называется *полуметрикой прямого произведения*, а $(X_1, d_1) \times_\rho (X_2, d_2)$ — *прямым произведением пространств* (X_1, d_1) и (X_2, d_2) . Прямое произведение этих пространств будем обозначать через $(X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$, опуская ρ . Кроме того, в этом случае будем писать $d_\rho = d_1 \times d_2$.

Предложение 4.39. Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — пространства с внутренней (строго внутренней) метрикой, тогда метрика их прямого произведения $(X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$ — также внутренняя (строго внутренняя).

Доказательство. Положим $X = X_1 \times X_2$ и $d = d_1 \times d_2$. Докажем предложение для случая внутренних метрик (для строго внутренних метрик доказательство аналогично).

Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ — произвольные точки из X . Предположим сначала, что одно из чисел $d_i(x_i, y_i)$, скажем $d_1(x_1, y_1)$, равно ∞ , тогда $d(x, y) = \infty$. Обозначим через $\pi_i: X \rightarrow X_i$ каноническую проекцию, заданную формулой $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$. Ясно, что π_i — непрерывное отображение. Если x_1 и x_2 не соединяются ни одной кривой, то x и y также не соединяются ни одной кривой, так как иначе, если γ — кривая, соединяющая

x и y , то $\pi_1 \circ \gamma$ — кривая, соединяющая x_1 и x_2 . Если же x_1 и y_1 соединяются кривыми, но длина каждой соединяющей их кривой равна ∞ , то, в силу неравенства $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \max\{a, b\}$, для любой кривой γ в X имеем $L_d(\gamma) \geq L_{d_1}(\pi_1 \circ \gamma)$, поэтому $L_d(\gamma) = \infty$.

Пусть теперь оба числа $d_i(x_i, y_i)$ конечны. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим через $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, кривую, параметризованную пропорционально натуральному параметру, соединяющую x_i с y_i и такую, что $\ell_i := L_{d_i}(\gamma_i) \leq d_i(x_i, y_i) + \varepsilon$. Положим $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$, тогда

$$\begin{aligned} L_\gamma(t_0 \dots t_n) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{d_1(\gamma_1(t_{i-1}), \gamma_1(t_i))^2 + d_2(\gamma_2(t_{i-1}), \gamma_2(t_i))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} (t_i - t_{i-1}) = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(d_1(x_1, y_1) + \varepsilon)^2 + (d_2(x_2, y_2) + \varepsilon)^2}, \end{aligned}$$

следовательно, $L_d(\gamma) \leq \sqrt{(d_1(x_1, y_1) + \varepsilon)^2 + (d_2(x_2, y_2) + \varepsilon)^2}$, откуда

$$\widehat{d}(x, y) = \inf_{\gamma} L_d(\gamma) \leq \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} = d(x, y).$$

Однако, по неравенству треугольника, имеем $L_d(\gamma) \geq d(x, y)$ для каждой кривой, соединяющей x и y , поэтому $\widehat{d}(x, y) = \inf L_d(\gamma) \geq d(x, y)$ и, значит, $\widehat{d}(x, y) = d(x, y)$, так что d — внутренняя метрика. $\square$

Замечание 4.40. В предложении 4.39 мы потребовали, чтобы пространства были метрическими, так как для полуметрических пространств доказательство возможности натуральной параметризации (ее мы используем в доказательстве предложения) несколько более деликатно.

Задача 4.41. Обобщите результаты этого раздела с двух на произвольное число полуметрических пространств.

4.2.4 Верхние и нижние грани полуметрик. Максимальная полуметрика, подчиненная функции

Пусть X — произвольное множество. Обозначим через $\mathcal{D}(X)$ множество всех полуметрик на X , и выберем произвольное непустое $D \subset \mathcal{D}(X)$.

Определение 4.42. Полуметрику ρ назовем *верхней гранью семейства* D , если $\rho \geq d$ для всех $d \in D$. Верхнюю грань ρ назовем *точной*, если для любой верхней грани ρ' семейства D выполняется $\rho \leq \rho'$. Точную верхнюю грань семейства D будем обозначать через $\sup D$. Если в предыдущем тексте заменить все знаки на противоположные, то получим определение *нижней грани* и *точной нижней грани*; последнюю будем обозначать через $\inf D$.

Предложение 4.43. Функция $r: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, определенная по формуле $\rho(x, y) = \sup_{d \in D} d(x, y)$, является точной верхней гранью семейства D .

Доказательство. Мы должны проверить, что ρ — полуметрика, а также то, что ρ удовлетворяет определению точной верхней грани. Нетривиально лишь неравенство треугольника. Проверим его. Для произвольных $x, y, z \in X$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \sup_{d \in D} d(x, z) \leq \sup_{d \in D} (d(x, y) + d(y, z)) \leq \\ &\leq \sup_{d \in D} d(x, y) + \sup_{d \in D} d(y, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z), \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Замечание 4.44. Обратите внимание, что функция $\rho(x, y) = \inf_{d \in D} d(x, y)$ не является, вообще говоря, полуметрикой (постройте пример).

Пусть $b: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ — некоторая функция. Обозначим через $\mathcal{D}(b)$ множество всех полуметрик d на X таких, что $d \leq b$. Так как $d \equiv 0$ принадлежит $\mathcal{D}(b)$ для любой функции b , множество $\mathcal{D}(b)$ не пусто.

Определение 4.45. Полуметрику $\sup \mathcal{D}(b)$ назовем *максимальной полуметрикой, подчиненной функции b* , и будем обозначать через d_b .

Следствие 4.46. Для любой функции $b: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ существует максимальная полуметрика, подчиненная b .

Предложение 4.47. Положим $b(x, y) = \inf_{d \in D} d(x, y)$. Тогда $d_b = \inf D$.

Доказательство. Действительно, по определению, $d_b \leq D$. Пусть d' — произвольная полуметрика на X , для которой $d' \leq D$. Тогда $d' \leq b$, так что $d' \in \mathcal{D}(b)$. Так как d_b — максимальная полуметрика в $\mathcal{D}(b)$, то $d' \leq d_b$, что и требовалось. $\square$

Следствие 4.48. Для каждого непустого семейства $D \subset \mathcal{D}(X)$ существует точная нижняя грань $\inf D$.

Следующее предложение тривиально, но очень важно при работе с внутренними полуметриками.

Предложение 4.49. Пусть $d_1 \leq d_2$ — полуметрики на множестве X , и Y — произвольное полуметрическое пространство. Тогда каждое отображение $f: Y \rightarrow X$, непрерывное по отношению к полуметрике d_2 , также непрерывно и по отношению к полуметрике d_1 . В частности, все кривые в (X, d_2) являются кривыми и в (X, d_1) .

Доказательство. Выберем произвольную точку $y \in Y$ и пусть $x = f(y)$. Обозначим через $B_i(x, \varepsilon)$ открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ в метрике d_i с центром в точке x . Так как $d_1 \leq d_2$, имеем $B_1(x, \varepsilon) \supset B_2(x, \varepsilon)$. Поэтому если некоторая окрестность U точки y переходит в $B_2(x, \varepsilon)$ в силу непрерывности f в метрике d_2 , то тем более U переходит при этом отображении в $B_1(x, \varepsilon)$, откуда и вытекает непрерывность f по отношению к метрике d_1 . $\square$

Предложение 4.50. *Предположим, что все полуметрики семейства $D \subset \mathcal{D}(X)$ — внутренние. Тогда $\inf D$ — также внутренняя полуметрика.*

Доказательство. Положим $\rho = \inf D$. Обозначим через $\hat{\rho}$ внутреннюю полуметрику, индуцированную ρ . Так как $\rho \leq d$ для всех $d \in D$, то, в силу предложения 4.49, множество кривых в полуметрике ρ содержит все кривые всех полуметрик $d \in D$. Кроме того, для каждой кривой γ в метриках ρ и d выполняется $L_\rho(\gamma) \leq L_d(\gamma)$.

Выберем произвольные точки $x, y \in X$ и обозначим через $C_d(x, y)$ все кривые в метрике d , соединяющие эти точки. Тогда для каждого $d \in D$ имеем $C_d(x, y) \subset C_\rho(x, y)$, откуда

$$\hat{\rho}(x, y) = \inf_{\gamma \in C_\rho(x, y)} L_\rho(\gamma) = \inf_{\gamma \in C_d(x, y)} L_\rho(\gamma) \leq \inf_{\gamma \in C_d(x, y)} L_d(\gamma) = d(x, y).$$

Из произвольности $d \in D$ заключаем, что $\hat{\rho}(x, y) \leq \inf_{d \in D} d(x, y) = b(x, y)$, поэтому $\hat{\rho} \in \mathcal{D}(b)$ и, значит, $\hat{\rho} \leq \rho$. Но, по неравенству треугольника, имеем $\hat{\rho} \geq \rho$, поэтому $\rho = \hat{\rho}$, так что ρ — внутренняя полуметрика. $\square$

Замечание 4.51. Для $\sup D$ аналог предложения 4.50 места не имеет (постройте пример).

Получим теперь аналогичный результат для обобщенных внутренних метрик. Напомним, что для каждого $x, y \in X$ мы обозначили через $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y)$ множество всех соединяющих x и y ломаных с максимальным шагом $m_d(L)$, не превосходящим ε . Нам сейчас будет важно явно указывать, для какой полуметрики строятся такие множества. Поэтому мы вместо $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y)$ будем писать $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y; d)$.

Предложение 4.52. *Пусть $d_1 \leq d_2$ — полуметрики на множестве X . Тогда при каждом $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $x, y \in X$ имеем $\mathcal{L}_\varepsilon(x, y; d_1) \supset \mathcal{L}_\varepsilon(x, y; d_2)$.*

Доказательство. Действительно, у каждой ломаной $L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y; d_2)$ длины ребер в полуметрике d_1 могут только уменьшиться, поэтому $L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y; d_1)$. $\square$

Предложение 4.53. *Предположим, что все полуметрики семейства $D \subset \mathcal{D}(X)$ — обобщенно внутренние. Тогда $\inf D$ — также обобщенно внутренняя полуметрика.*

Доказательство. Положим $\rho = \inf D$. По предложению 4.13, для каждой $d \in D$ и каждого $\varepsilon > 0$ имеем $\ddot{d}_\varepsilon = d$. В силу того же предложения, достаточно проверить, что $\ddot{\rho}_\varepsilon = \rho$ при всех $\varepsilon > 0$.

Выберем произвольные $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$, $d \in D$, тогда, по предложению 4.52, имеем

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_\varepsilon(x, y) &= \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y; \rho)} \rho(L) \leq \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y; d)} \rho(L) \leq \\ &\leq \inf_{L \in \mathcal{L}_\varepsilon(x, y; d)} d(L) = \ddot{d}_\varepsilon(x, y) = d(x, y), \end{aligned}$$

поэтому $\check{\rho}_\varepsilon \leq d$, так что $\check{\rho}_\varepsilon(x, y) \leq \inf_{d \in D} d(x, y) = b(x, y)$, следовательно, $\check{\rho}_\varepsilon \in \mathcal{D}(b)$, откуда $\check{\rho}_\varepsilon \leq \rho$. Но, по предложению 4.12, имеем $\check{\rho}_\varepsilon \geq \rho$, откуда $\rho = \check{\rho}_\varepsilon$. $\square$

4.2.5 Фактор-пространство

Пусть (X, d) — полуметрическое пространство и R — некоторое отношение эквивалентности. Определим функцию $b_R: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ так: если x и y эквивалентны, то $b_R(x, y) = 0$, иначе $b_R(x, y) = d(x, y)$. Иными словами, функция b_R получается из d заменой на нулевые всех расстояний между эквивалентными точками.

Предложение 4.54. Пусть ρ — максимальная полуметрика, подчиненная функции b_R . Тогда если xRx' и yRy' , то $\rho(x, y) = \rho(x', y')$, так что ρ порождает полуметрику на фактор-множестве X/R .

Доказательство. Так как $\rho \leq b$, имеем $\rho(x, x') = \rho(y, y') = 0$, поэтому $\rho(x', y') \leq \rho(x', x) + \rho(x, y) + \rho(y, y') = \rho(x, y)$ и, аналогично, $\rho(x, y) \leq \rho(x', y')$, откуда и вытекает требуемое. $\square$

Определение 4.55. Построенная в предложении полуметрика на X/R называется *фактор-полуметрикой* и обозначается через d_R . Полуметрическое пространство $(X/R, d_R)$ называется *фактор-пространством полуметрического пространства (X, d)* и обозначается через $(X, d)/R$. Также будем считать, что d_R действует на точках из X , т.е. вместо ρ будем писать d_R .

Предложение 4.56. Пусть d — (обобщенная) внутренняя полуметрика на множестве X и R — произвольное отношение эквивалентности на X . Тогда фактор-полуметрика d_R — также (обобщенная) внутренняя.

Доказательство. Обозначим через d' функцию на $X \times X$, для которой $d'(x, y) = 0$, если и только если xRy ; если же x и y не эквивалентны, то $d'(x, y) = \infty$. Легко проверяется, что d' — внутренняя полуметрика. Положим $D = \{d, d'\}$. По определению, фактор-полуметрика d_R является максимальной полуметрикой, подчиненной функции $b(x, y) = \inf\{d(x, y), d'(x, y)\}$, поэтому $d_R = \inf D$. Остается применить предложение 4.50 для внутренней метрики или же предложение 4.53 для обобщенной внутренней метрики. $\square$

В следующем предложении описывается альтернативный способ вычислить фактор-полуметрику.

Предложение 4.57. Пусть (X, d) — полуметрическое пространство и R — некоторое отношение эквивалентности на X . Тогда для любых $x, y \in X$ имеем

$$(4.2) \quad d_R(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k d(x_i, y_i) \mid x = x_1, y = y_k, k \in \mathbb{N} \right\},$$

где инфимум берется по всем наборам $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ таким, что $y_i R x_{i+1}$ при всех $i = 1, \dots, k-1$.

Доказательство. Обозначим через ρ правую часть равенства (4.2). Непосредственно проверяется, что ρ — полуметрика. Покажем, что $\rho \in \mathcal{D}(b_R)$. Действительно, если xRy , то $\rho(x, y) = 0 = b_R(x, y)$, так как в качестве $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ можно взять $\{x, y\}$ и $\{x, y\}$ соответственно. Если же $\neg(xRy)$, то $\rho(x, y) \leq d(x, y) = b_R(x, y)$, так как в качестве $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ можно взять $\{x\}$ и $\{y\}$ соответственно. Таким образом, $\rho \leq b_R$, поэтому $\rho \in \mathcal{D}(b_R)$.

Для завершения доказательства осталось показать, что ρ — максимальная полуметрика в $\mathcal{D}(b_R)$. Для этого выберем произвольную $d' \in \mathcal{D}(b_R)$, любые $x, y \in X$ и проверим, что $d'(x, y) \leq \rho(x, y)$. Рассмотрим произвольные наборы $\{x_i\}_{i=1}^k$ и $\{y_i\}_{i=1}^k$ такие, что $x = x_1$, $y = y_k$ и $y_i R x_{i+1}$ для всех $i = 1, \dots, k-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k d(x_i, y_i) &\geq \sum_{i=1}^k b_R(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{k-1} b_R(y_i, x_{i+1}) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^k d'(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{k-1} d'(y_i, x_{i+1}) \geq d'(x, y). \end{aligned}$$

Переходя в предыдущем неравенстве к точной нижней грани по всем наборам $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, заключаем, что $\rho(x, y) \geq d'(x, y)$. $\square$

Чтобы эффективно применять предложение 4.57, нам потребуется еще ряд понятий.

Конструкция 4.58. Пусть α и β — некоторые классы эквивалентности R . Последовательность $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$, в которой $x_1 \in \alpha$, $y_k \in \beta$, и при каждом $1 \leq i \leq k-1$ выполняется $y_i R x_{i+1}$, будем называть *допустимой цепочкой, соединяющей α и β* , а величину $\sum_{i=1}^k d(x_i, y_i)$ — *весом* этой цепочки. Допустимую цепочку, соединяющую α и β , назовем *сократимой*, если из нее можно выбросить некоторый фрагмент так, чтобы полученная последовательность вновь оказалась допустимой цепочкой, соединяющей α и β , и имеющей вес не больший, чем у исходной цепочки. Если цепочка не является сократимой, то будем называть ее *несократимой*. Ясно, что каждую сократимую цепочку можно сократить до некоторой несократимой, поэтому в формуле (4.2) точную нижнюю грань можно брать только по несократимым цепочкам.

Следующая лемма описывает свойства несократимых цепочек.

Лемма 4.59. Пусть $C = x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$, $k \geq 2$, — несократимая цепочка, соединяющая разные классы α и β . Тогда

- (1) в C не содержится отличной от x_1 точки, эквивалентной x_1 ;
- (2) в C не содержится отличной от y_k точки, эквивалентной y_k ;
- (3) в C не содержится эквивалентных x_i и x_j , $i < j$;
- (4) в C не содержится эквивалентных y_i и y_j , $i < j$;

- (5) в C не содержится эквивалентных x_i и y_j , $i \leq j$;
- (6) если в C содержатся эквивалентные y_i и x_j , $i < j$, то $j = i + 1$;
- (7) для любого $1 \leq i < k$ выполняется $y_i \neq x_{i+1}$;

Доказательство. (1) Предположим противное, т.е. в C существует $z \neq x_1$, эквивалентная x_1 . Если $z = x_p$ для некоторого $p > 1$, то из C можно выбросить фрагмент $x_1, \dots, y_{p-1}$, так что C — сократимая цепочка. Если же $z = y_p$ для некоторого $1 \leq p \leq k$, то $y_p \neq y_k$, так как классы α и β — разные, поэтому $p < k$. Следовательно, x_{p+1} определено и принадлежит α , значит из C можно выбросить $x_1, \dots, y_p$.

(2) Доказывается аналогично пункту (1).

(3) Предположим противное. Случай $i = 1$ уже разобран в пункте (1). Пусть теперь $i > 1$. Тогда из C можно выкинуть $x_i, \dots, y_{j-1}$.

(4) Доказывается аналогично пункту (3).

(5) Предположим противное. Случай $i = 1$ уже разобран в пункте (1). Пусть теперь $i > 1$. Тогда точки y_{i-1} и y_j эквивалентны, что противоречит пункту (4).

(6) Предположим противное, т.е. что $j > i + 1$, но тогда точки y_i и y_{j-1} эквивалентны, причем $i < j - 1$, что противоречит пункту (4).

(7) Если для некоторого i имеем $y_i = x_{i+1}$, то пару y_i, x_{i+1} можно выкинуть из C , так как $d(x_i, y_i) + d(x_{i+1}, y_{i+1}) \leq d(x_i, y_{i+1})$ по неравенству треугольника. $\square$

Следствие 4.60. Пусть $C = x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$, $k \geq 2$, — несократимая цепочка, соединяющая разные классы α и β . Тогда элементы z и w , стоящие на разных местах последовательности C , эквивалентны, если и только если $\{z, w\} = \{x_i, y_{i+1}\}$ для некоторого однозначно определенного i , $1 \leq i < k$. Более того, при каждом таком i имеем $x_i \neq y_{i+1}$. В частности, каждый элемент $z \notin \{x_1, y_k\}$ цепочки C входит в неодноточечный класс эквивалентности.

Ниже мы применим следствие 4.60 для доказательства изометричности фактор-пространства другому известному полуметрическому пространству.

Замечание 4.61. Часто отношение эквивалентности почти нигде не меняет исходное множество. Тогда, описывая такое отношение, говорят только о том, какие разные точки оно отождествляет, но не подчеркивают каждый раз, что каждая из всех остальных точек эквивалентна сама себе. Кроме того, вместо слова “отождествляет” часто используют более наглядный термин — “склеивает”.

Приведем ряд примеров.

Склеивание отрезка

На отрезке $X = [0, a]$ со стандартной метрикой d рассмотрим отношение эквивалентности R , склеивающее концы 0 и a . Тогда фактор-пространство $(X, d)/R$ изометрично окружности длины a .

Для доказательства воспользуемся следствием 4.60. Так как в нашем случае все классы эквивалентности, кроме одного, — одноточечные, а этот один состоит из двух точек — концов отрезка $[0, a]$, то каждая несократимая цепочка, соединяющая разные классы эквивалентности, может быть отнесена к одному из двух типов: или эта цепочка двухточечная, или же она — четырехточечная, причем крайние ее точки отличны от 0 и 1, а две средние — это разные концы отрезка $[0, 1]$. Однако такие пути на окружности соответствуют выбору одной из двух дуг. Мы должны минимизировать, т.е. из двух дуг должны выбрать кратчайшую, а это и есть внутреннее расстояние на окружности.

Склеивание прямоугольника

Пусть $X = [0, a] \times [0, b]$ — прямоугольник со стандартной евклидовой метрикой d .

Рассмотрим на X отношение эквивалентности R , отождествляющее точки $(0, t)$ и (a, t) при каждом t . Фактор-пространство $(X, d)/R$ называется *конечным цилиндром*, см. рис. 4.1.

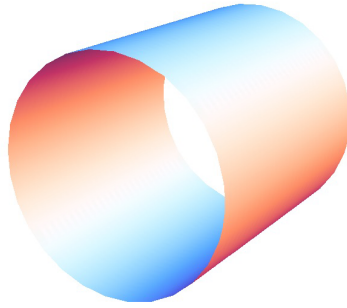


Рис. 4.1: Цилиндр.

Множества $[0, a] \times \{0\}$ и $[0, a] \times \{b\}$ при таком склеивании превращаются в окружности, которые называются *основаниями* этого цилиндра.

Пусть теперь R отождествляет точки $(0, t)$ и $(a, b - t)$ при каждом t . Фактор-пространство $(X, d)/R$ называется *конечным листом Мёбиуса*, см. рис. 4.2.

В следующем примере эквивалентность R склеивает точки $(0, t)$ и (a, t) при каждом t , а также точки $(s, 0)$ и (s, b) при каждом s . Фактор-пространство $(X, d)/R$ называется *плоским тором*, см. рис. 4.3.

Наконец, пусть R отождествляет точки $(0, t)$ и $(a, b - t)$ при каждом t , а также точки $(s, 0)$ и (s, b) при каждом s . Фактор-пространство $(X, d)/R$ называется *плоской бутылкой Клейна*, см. рис. 4.4.

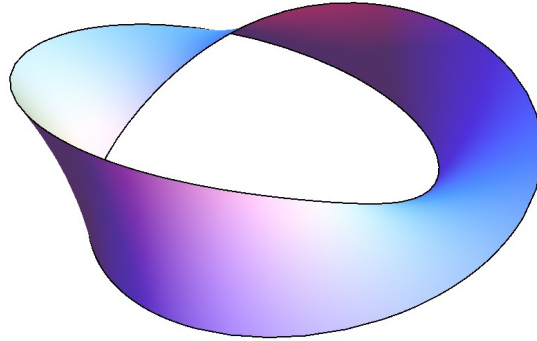


Рис. 4.2: Лист Мёбиуса.

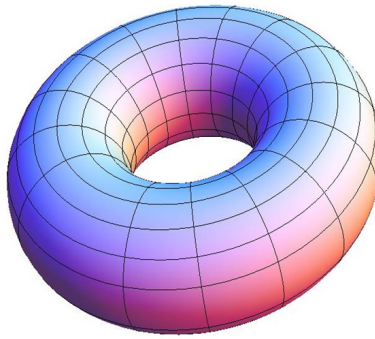


Рис. 4.3: Тор.

Замечание 4.62. Предложение 4.56 влечет, что метрики всех приведенных в этом параграфе примеров пространств являются внутренними.

Бесконечный цилиндр

Если вместо прямоугольника взять полосу $X = [0, a] \times \mathbb{R}$ и склеивать точки так же, как и в случае конечного цилиндра, т.е. отождествлять точки $(0, t)$ и (a, t) при каждом t , мы получим *бесконечный двусторонний цилиндр*. Если вместо $\mathbb{R}$ выбрать луч $[0, \infty)$, т.е. положить $X = [0, a] \times [0, \infty)$, то, при том же отождествлении получим *бесконечный односторонний цилиндр*. При этом склеивании множество точек $[0, a] \times \{0\}$ превратится в окружность, которую назовем *основанием* этого цилиндра.

Замечание 4.63. Из предложения 4.56 вытекает, что метрика на бесконечных цилиндрах — внутренняя.

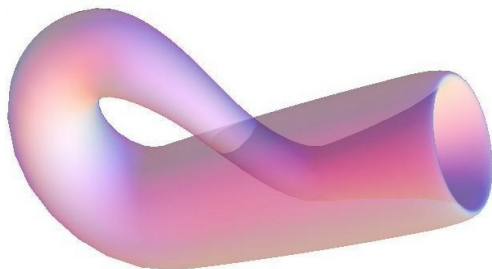


Рис. 4.4: Бутылка Клейна.

Конусы

Рассмотрим конечный (односторонний бесконечный) цилиндр и склеим все точки одного его основания в одну точку. Полученное метрическое пространство называется *конечным (бесконечным) конусом*, рис. 4.5.

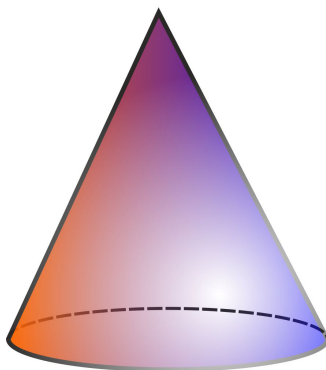


Рис. 4.5: Конус.

Рассмотрим теперь примеры пространств, получающиеся комбинированием несвязного объединения и факторизации.

4.2.6 Букет полуметрических пространств

В приводимом ниже определении букета полуметрических пространств существенную роль играет выбор точки. Традиционно, множество X , в котором выбрана точка p , называется *пунктированным* и обозначается в виде пары (X, p) . Чтобы не усложнять обозначения, мы будем обозначать пунк-

тированное множество X той же буквой X , подразумевая, что в X выбрана точка p .

Пусть $\{(X_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — произвольное семейство пунктированных полуметрических пространств, и пусть p_α обозначает точку, выбранную в X_α . На множестве $X = \sqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ с полуметрикой дизъюнктивного объединения рассмотрим отношение эквивалентности, отождествляющее все точки p_α . Тогда соответствующее фактор-пространство называется *букетом пространств* (X_α, d_α) и обозначается через $\vee_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, d_\alpha)$. Полуметрика этого букета обозначается через $d_\vee$, причем мы пишем $d_\vee = \vee_{\alpha \in \mathcal{A}} d_\alpha$. Ясно, что букет существенно зависит от выбора точек p_α .

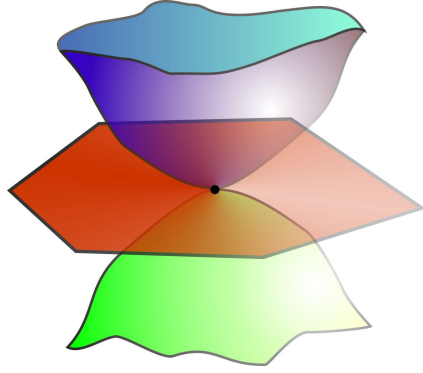


Рис. 4.6: Букет.

Предложение 4.57 позволяет легко понять, чему равно расстояние $d_\vee$ между точками букета: если $x \in X_\alpha$ а $y \in X_\beta$, то $d_\vee(x, y) = d_\alpha(x, p_\alpha) + d_\beta(p_\beta, y)$ (проверьте).

Из предложения 4.56 мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 4.64. *Полуметрика букета пространств внутренняя, если и только если полуметрики всех входящих в букет полуметрических пространств — внутренние.*

4.2.7 Метрические графы

Рассмотрим произвольный набор отрезков $[a_\alpha, b_\alpha]$ со стандартными функциями расстояния и пусть $X = \sqcup_\alpha [a_\alpha, b_\alpha]$ — несвязное объединение этих отрезков, наделенное метрикой d несвязного объединения. Пусть R — некоторая эквивалентность на X , заданная на множестве концов рассматриваемых отрезков.

Определение 4.65. Фактор-пространство $(X/R, d_R)$ называется *метрическим графом*.

Замечание 4.66. Так как все отрезки являются пространствами с внутренней метрикой, то, в силу предложения 4.56, метрика d_R — также внутреннего.

Замечание 4.67. В дальнейшем, для удобства изложения, описывая построение метрического графа мы будем говорить, что этот граф получается из отрезков склеиванием соответствующих концов.

Пример 4.68 (Граф Кэли). Пусть G — произвольная группа, и $\{s_\alpha\}$ — некоторый набор образующих, т.е. каждый элемент группы равен произведению конечного числа элементов s_α . Два элемента группы G назовем *смежными*, если один из них получается из другого умножением справа на некоторый элемент s_α . Для каждой пары $\{g_1, g_2\}$, состоящей из смежных элементов группы G , определим отрезок $I\{g_1, g_2\}$. Склеим отрезки $I\{g_1, g_2\}$, отождествив их концы, соответствующие одноименным элементам группы G . Полученный метрический граф называется *метрическим графом Кэли пары* $(G, \{s_\alpha\})$.

На рис. 4.7 и 4.8 приведены примеры графов Кэли.

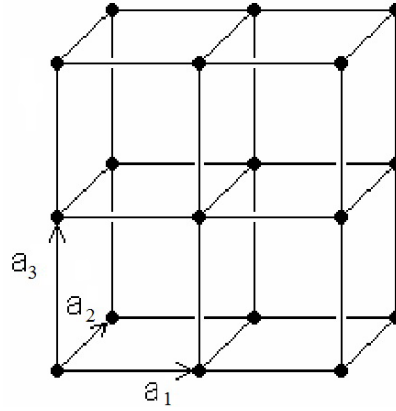


Рис. 4.7: Граф Кэли группы $\mathbb{Z}^3$ с образующими $\{a_1 = (1, 0, 0), a_2 = (0, 1, 0), a_3 = (0, 0, 1)\}$.

4.2.8 Полиэдральные метрики

Сейчас мы определим *полиэдральные пространства* X_n размерности n по индукции.

Пространство X_0 — это произвольное множество точек; расстояние между разными точками равно ∞ . Точки называются *0-мерными гранями* X_0 .

Каждое полиэдральное пространство X_k получается из некоторого полиэдрального пространства X_{k-1} следующим образом. Рассмотрим некоторый набор выпуклых многогранников P_α размерности k , и для каждого P_α

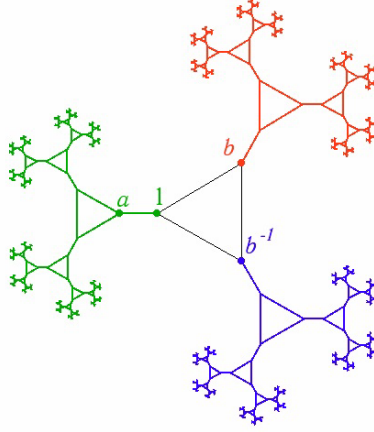


Рис. 4.8: Граф Кэли группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, где $*$ обозначает свободное произведение, с образующими $\{a, b, b^{-1}\}$, где a — образующая $\mathbb{Z}_2$, а b — образующая $\mathbb{Z}_3$.

рассмотрим некоторое изометричное вложение $\nu_\alpha: \partial P_\alpha \rightarrow X_{k-1}$, где ∂P_α — граница P_α , причем требуется, чтобы ν_α переводила i -мерные грани в i -мерные при каждом i , $0 \leq i \leq k-1$. Для завершения шага индукции,

- зададим на несвязном объединении $Y_k = X_{k-1} \sqcup \sqcup_\alpha P_\alpha$ отношение эквивалентности R , отождествляющее каждую точку $x \in \partial K_\alpha$ и ее образ $\nu_\alpha(x)$;
- положим $X_k = Y_k/R$;
- если $\pi_k: Y_k \rightarrow X_k$ — естественная проекция, ставящая в соответствие каждой точке из Y_k класс эквивалентности R , в котором она лежит, то множества $\pi_k(P_\alpha)$ назовем k -мерными гранями.

Замечание 4.69. Из предложения 4.56 вытекает, что метрика каждого полиэдрального пространства X_n — внутренняя.

4.2.9 Цилиндр над псевдометрическим пространством

Прямое произведение произвольного пространства X , наделенного полуметрикой d , и отрезка, луча или прямой называется *цилиндром над X* . Цилиндр $X \times [0, 1]$ обычно обозначается через $\text{Cyl } X$.

Замечание 4.70. Из предложения 4.39 вытекает, что полуметрика цилиндра над полуметрическим пространством с внутренней полуметрикой — внутренняя.

4.2.10 Конус над метрическим пространством

Если склеить все точки одного из оснований цилиндра $X \times [a, b]$, $X \times [a, \infty)$ или $X \times (\infty, a]$ в одну точку, то получим *конус над X* . Конус, получающийся из $X \times [0, \infty)$, обозначается через $\text{Con } X$.

Замечание 4.71. Из предложений 4.39 и 4.56 вытекает, что полуметрика конуса над полуметрическим пространством с внутренней полуметрикой — внутренняя.

4.2.11 Надстройка

Если у цилиндра $X \times [a, b]$ склеить в точку все точки одного основания, а также склеить в (другую) точку все точки другого основания, то получим *надстройку*. Надстройка, получающаяся из $X \times [0, 1]$, обозначается через ΣX , рис. 4.9.

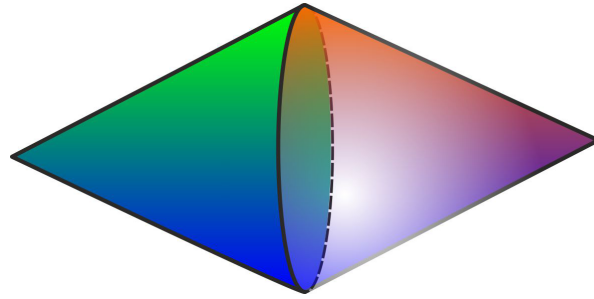


Рис. 4.9: Надстройка.

Задача 4.72. Покажите, что надстройка над сферой S^n гомеоморфна S^{n+1} .

Замечание 4.73. Из предложений 4.39 и 4.56 вытекает, что полуметрика надстройки над полуметрическим пространством с внутренней полуметрикой — внутренняя.

4.2.12 Джойн

Пусть X и Y — полуметрические пространства, и пусть $[0, 1]$ — отрезок прямой со стандартной функцией расстояния. Пусть $Z = X \times Y \times [0, 1]$ — прямое произведение описанных только что пространства. Рассмотрим на Z отношение эквивалентности, классами которого служат множества $\{x\} \times Y \times \{0\}$ при каждом $x \in X$; множества $X \times \{y\} \times \{1\}$ при каждом $y \in Y$; не вошедшие в предыдущие классы отдельные точки. Тогда Z/R называется *джойном пространств X и Y* и обозначается через $X * Y$.

Замечание 4.74. Из предложений 4.39 и 4.56 вытекает, что метрика джойна полуметрических пространств с внутренними полуметриками — внутренняя.

Пример 4.75. Пусть $Y = \{y\}$, тогда Z изометрично $X \times [0, 1]$, а R отождествляет точки из $X \times \{0\}$, поэтому джойн $X * Y$ изометричен конусу $\text{Con } X$ над X .

Пример 4.76. Пусть $Y = S^0$ — двоеточие $\{-1, 1\}$, тогда $Z = X \times \{-1\} \times [0, 1] \sqcup X \times \{1\} \times [0, 1]$ — несвязное объединение двух цилиндров над X . Отношение R , во-первых, отождествляет точки из $\{x\} \times \{-1, 1\} \times \{0\}$ при каждом x , т.е. склеивает нижние основания этих цилиндров, получая тем самым один “удвоенный” цилиндр; во-вторых, оно отождествляет все точки $X \times \{-1\} \times \{1\}$ в одну, а также все точки $X \times \{1\} \times \{1\}$ в одну, тем самым R склеивает в точку одно основание удвоенного цилиндра, а также склеивает в (другую) точку другое основание цилиндра. Поэтому джойн $X * S^0$ изометричен надстройке над X .

Задача 4.77. Покажите, что джойн $[a, b] * [c, d]$ гомеоморфен тетраэдру. Верно ли, что он изометричен некоторому тетраэдру?

4.2.13 Пространство орбит

Пусть X — произвольное множество и G — некоторая группа.

Определение 4.78. Говорят, что группа G *действует на множестве* X , если задано отображение $\varphi: G \times X \rightarrow X$, $g(x) := \varphi(g, x)$, для которого

- $e(x) = x$ для любого $x \in X$, где e — нейтральный элемент (единица) группы G ;
- $(gh)(x) = g(h(x))$ для всех $g, h \in G$ и $x \in X$.

Каждое подмножество X вида $\{g(x) \mid g \in G\}$ называется *орбитой* действия группы G .

Легко видеть, что множество орбит является разбиением множества X . Иными словами, любые две разные орбиты не пересекаются, и каждая точка из X лежит в некоторой орбите. Пусть R — отношение эквивалентности, отождествляющее все точки каждой орбиты. Если X — полуметрическое пространство, то соответствующее фактор-пространство называется *пространством орбит действия группы* G . Такие пространства орбит обычно обозначают через X/G .

Замечание 4.79. Из предложения 4.56 вытекает, что полуметрика пространства орбит действия группы на полуметрическом пространстве с внутренней полуметрикой — внутренняя.

Задача 4.80. Приведите пример действия группы G на метрическом пространстве, при котором $X/G \neq X/R$.

Задача 4.81. Покажите, что если G является подгруппой группы изометрий метрического пространства X , то пространство орбит — это множество X/R , а расстояние между точками из X/R — это точная нижняя грань расстояний между их представителями в X .

Задача 4.82. Покажите, что если группа $\mathbb{Z}^2$ действует на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ сдвигами по формуле $(p, q)(x, y) = (x + p, y + q)$, то пространство орбит $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ изометрично плоскому тору, склеенному из единичного квадрата.