Тема 3

Кривые.

В этой лекции мы будем изучать кривые в метрических пространствах. Одна из технических сложностей состоит в том, что на кривой, вообще говоря, могут быть точки остановки, т.е. может случиться так, что при изменении параметра на некотором интервале из области определения кривой точка кривой остается на месте. Чтобы не отвлекаться на детали такого типа, мы запретим точки остановки и будем рассматривать лишь безостановочные кривые, определение которых мы сейчас дадим.

3.1 Безостановочные кривые и натуральная параметризация

Определение 3.1. Кривая $\gamma : [a,b] \to X$ называется *безостановочной*, если любых любых $a \le t_1 < t_2 \le b$ ограничение $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ не является постоянным отображением.

Соглашение 3.2. *В дальнейшем все рассматриваемые кривые, отличные от точечных, предполагаются безостановочными, если не оговорено противное.*

Предложение 3.3. *Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ — безостановочная спрямляемая кривая, тогда функция $f(t) = L_d(\gamma_{[a,t]})$ строго монотонна.*

Доказательство. Пусть $a \le t_1 < t_2 \le b$, тогда $f(t_2) - f(t_1) = L_d\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) > 0$, так как отображение $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ не постоянное и, значит, можно взять две разных точки этой кривой и воспользоваться предложением 1.26. $\square$

Определение 3.4. Кривая $\gamma(s)$, $s \in [a,b]$, называется *натурально параметризованной*, а параметр s — *натуральным*, если для любых $a \le s_1 \le s_2 \le b$ выполняется $L_d(\gamma|_{[s_1,s_2]}) = s_2 - s_1$. Параметр t кривой $\gamma(t)$ называется *равномерным*, а кривая $\gamma(t)$ — *равномерно параметризованной*, если для некоторого $\lambda > 0$ кривая $\gamma(\lambda s)$ натурально параметризована.

Предложение 3.5. *Для любой спрямляемой кривой $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, существует такая замена параметра φ, что кривая $\gamma \circ \varphi$ натурально параметризована.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = L_d\bigl(\gamma_{[a,t]}\bigr)$, тогда, в силу предложения 1.28, эта функция непрерывна, а, в силу предложения 3.3, она еще и строго монотонна, поэтому f непрерывно и биективно отображает отрезок $[a,b]$ на отрезок $\bigl[0, L_d(\gamma)\bigr]$. По предложению 2.25, отображение f — гомеоморфизм, так что $\varphi = f^{-1}$ — замена параметра на кривой γ. Для любых $0 \le s_1 \le s_2 \le L_d(\gamma)$ имеем

$$L_d(\gamma \circ \varphi|_{[s_1,s_2]}) = L_d(\gamma|_{[\varphi(s_1),\varphi(s_2)]}) = \\ = L_d(\gamma|_{[a,\varphi(s_2)]}) - L_d(\gamma|_{[a,\varphi(s_1)]}) = f\bigl(\varphi(s_2)\bigr) - f\bigl(\varphi(s_1)\bigr) = s_2 - s_1,$$

что и требовалось. □

Определение 3.6. Спрямляемая кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ в метрическом пространстве (X,d), соединяющая точки x и y из X, называется *кратчайшей*, если $L_d(\gamma)$ равно точной нижней грани длин $L_d(\delta)$ всех спрямляемых кривых δ, соединяющих x и y.

Замечание 3.7. Если (X,d) — пространство с внутренней метрикой, то кривая γ в X, соединяющая x и y, является *кратчайшей*, если и только если $d(x,y) = L_d(\gamma)$.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 3.8. *Кривая γ в метрическом пространстве является кратчайшей, если и только если каждый ее отрезок — кратчайшая кривая.*

Определение 3.9. Кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ в метрическом пространстве (X,d) называется *локально кратчайшей*, если для каждого $t \in [a,b]$ существует такой содержащий t интервал $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$, что $\gamma|_{[\alpha,\beta]\cap[\alpha,\beta]}$ — кратчайшая кривая.

Определение 3.10. Равномерно параметризованная локально кратчайшая кривая называется *геодезической*.

Следующий результат мгновенно вытекает из предложения 3.5.

Следствие 3.11. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to X$ — локально кратчайшая кривая. Тогда существует такая замена параметра $\varphi\colon \bigl[0, L_d(\gamma)\bigr] \to [a,b]$, для которой кривая $\gamma \circ \varphi$ — натурально параметризованная геодезическая.*

3.2 Кратчайшие и компактность

В данном разделе мы будем строить кратчайшие кривые как пределы последовательностей кривых. Нам понадобится следующий результат.

Предложение 3.12. *Пусть (X, d) — метрическое пространство и пусть $\gamma_n\colon [a, b] \to X$ — последовательность C-липшицевых кривых, сходящихся поточечно к отображению $\gamma\colon [a, b] \to X$. Тогда γ является C-липшицевой кривой, а последовательность γ_n сходится к γ равномерно.*

Доказательство. Чтобы проверить C-липшицевость отображения γ, достаточно выполнить предельный переход в неравенстве $d\big(\gamma_n(t), \gamma_n(t')\big) \le C \cdot |t - t'|$ при произвольных фиксированных t, $t' \in [a, b]$.

Докажем теперь равномерную сходимость. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует N, для которого при всех $n > N$ и всех $t \in [a, b]$ выполняется $d\big(\gamma(t), \gamma_n(t)\big) < \varepsilon$.

Положим $\delta = \varepsilon/(3C)$ и пусть $\{t_i\} \subset [a, b]$ — конечная δ-сеть. Выберем N таким, чтобы при всех $n > N$ и всех i выполнялось $d\big(\gamma(t_i), \gamma_n(t_i)\big) < \varepsilon/3$.

Фиксируем произвольное $t \in [a, b]$. Существует такое i, что $|t - t_i| < \delta$. Из C-липшивости отображении γ_n и γ заключаем, что $d\big(\gamma_n(t), \gamma_n(t_i)\big) \le C \cdot |t - t_i| < \varepsilon/3$ и, аналогично, $d\big(\gamma(t), \gamma(t_i)\big) < \varepsilon/3$, откуда

$$d\big(\gamma(t), \gamma_n(t)\big) \le d\big(\gamma(t), \gamma(t_i)\big) + d\big(\gamma(t_i), \gamma_n(t_i)\big) + d\big(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t)\big) < \\ < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Для кривых, области определения которых различны, также естественно определяется равномерная сходимость.

Определение 3.13. Пусть $\gamma_n\colon [a_n, b_n] \to X$ — последовательность кривых в метрическом пространстве (X, d). Будем говорить, что эта последовательность *сходится* (*равномерно сходится*) к кривой $\gamma\colon [a, b] \to X$, если существуют такие замены параметра $\varphi_n\colon [a, b] \to [a_n, b_n]$, что отображения $\gamma_n \circ \varphi_n\colon [a, b] \to X$ сходится (равномерно сходится) к отображению γ.

Теорема 3.14 (Арцела-Асколи)**.** *Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, и γ_n — последовательность кривых в X. Предположим, что длины кривых γ_n равномерно ограничены, т.е. существует такое число C, что $L_d(\gamma_n) \le C$ для всех n. Тогда в этой последовательности существует подпоследовательность, которая равномерно сходится к некоторой кривой длины не больше C.*

Доказательство. Обозначим через ℓ_n длину кривой γ_n, и параметризуем каждую γ_n натуральным параметром $s_n \in [0, \ell_n]$. Пусть $\varphi_n(t) = \ell_n \cdot t$, $t \in [0, 1]$, — замена параметра на кривой γ_n. Тогда все кривые $\gamma_n \circ \varphi_n$ параметризованы отрезком $[0, 1]$. Отметим, что при любых $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$ выполняется

$$d(\gamma_n \circ \varphi_n(t_1), \gamma_n \circ \varphi_n(t_2)) \le L_d\big(\gamma_n \circ \varphi_n|_{[t_1, t_2]}\big) = \\ = L_d\big(\gamma_n|_{[\ell_n \cdot t_1, \ell_n \cdot t_2]}\big) = \ell_n(t_2 - t_1) \le C \cdot (t_2 - t_1).$$

Без ограничения общности, сразу будем считать, что все γ_n изначально параметризованы таким $t \in [0,1]$. Тогда, в силу отмеченного выше, имеем $d\big(\gamma_n(t_1), \gamma_n(t_2)\big) \le C \cdot |t_2 - t_1|$ для любых n и t_1, $t_2 \in [0,1]$. Таким образом, все кривые γ_n являются C-липшицевыми.

Выберем произвольное счетное всюду плотное подмножество $T = \{t_i\}$ отрезка $[0,1]$. С помощью "диагонального процесса Кантора" выберем в γ_n такую подпоследовательность γ_{k_n}, для которой при каждом t_i последовательность точек $\gamma_{k_n}(t_i)$ сходится. Это делается так.

Конструкция. Так как X — компакт, в последовательности $\gamma_1(t_1)$, $\gamma_2(t_1)$, ... существует сходящаяся подпоследовательность $\gamma_n^1(t_1)$; в последовательности $\gamma_1^1(t_2)$, $\gamma_2^1(t_2)$, ... тоже имеется сходящаяся подпоследовательность $\gamma_n^2(t_2)$. Заметим, что последовательность $\gamma_n^1(t_2)$ также сходится. Продолжая этот процесс, выберем для каждого k подпоследовательность γ_n^k исходной последовательности γ_n так, чтобы для всех $i \le k$ последовательности $\gamma_1^k(t_i)$, $\gamma_2^k(t_i), \ldots$ сходились. Тогда "диагональная последовательность" γ_n^n обладает тем свойством, что при каждом i последовательность $\gamma_1^1(t_i)$, $\gamma_2^2(t_i)$, ... сходится. Положим $\gamma(t_i) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n^n(t_i)$.

В дальнейшем, для упрощения обозначений, будем сразу предполагать, что исходная последовательность кривых γ_n совпадает с последовательностью γ_n^n.

Покажем теперь, что последовательность $\gamma_n(t)$ сходится при всех $t \in [0,1]$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как T всюду плотно на $[0,1]$, существует $t_i \in T$, для которого $|t - t_i| < \varepsilon/(2C)$. Как было отмечено выше, при всех n выполняется $d\big(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t)\big) \le C \cdot |t - t_i| < \varepsilon/2$.

Так как $\gamma_n(t_i)$ сходится к $\gamma(t_i)$, существует такое N, что для любого $n > N$ имеем $d\big(\gamma_n(t_i), \gamma(t_i)\big) < \varepsilon/2$, откуда

$$d\big(\gamma_n(t), \gamma(t_i)\big) < d\big(\gamma_n(t), \gamma_n(t_i)\big) + d\big(\gamma_n(t_i), \gamma(t_i)\big) < \varepsilon$$

при всех $n > N$. Но тогда $d\big(\gamma_n(t), \gamma_m(t)\big) < 2\varepsilon$ при всех m, $n > N$, поэтому последовательность $\gamma_n(t)$ фундаментальна и, в силу компактности X, сходится к некоторой точке, которую мы обозначим через $\gamma(t)$.

Таким образом, мы показали, что последовательность C-липшицевых кривых $\gamma_n\colon [0,1] \to X$ сходится к некоторому отображению $\gamma\colon [0,1] \to X$. Применяя предложение 3.12, заключаем, что эта сходимость — равномерная, а γ также является C-липшицевой кривой. Как было замечено в примере 1.24, $L_d(\gamma) \le C(1-0) = C$. Доказательство закончено. $\square$

Следствие 3.15. *Любые две точки x и y компактного метрического пространства (X,d), которые соединяются спрямляемой кривой, соединяются также кратчайшей кривой.*

Доказательство. Пусть ℓ равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих x и y. Существует последовательность γ_n, для которой $L_d(\gamma_n) \to \ell$.

Но тогда длины кривых γ_n равномерно ограничены и применима теорема 3.14, в соответствии с которой в последовательности γ_n имеется подпоследовательность γ_{k_n}, равномерно сходящаяся к некоторой кривой γ. По предложению 1.29, имеем $L_d(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} L_d(\gamma_{k_n}) = \ell$, но, по определению ℓ, выполняется $L_d(\gamma) \ge \ell$, поэтому $L_d(\gamma) = \ell$ и, значит, γ — кратчайшая кривая. □

Следствие 3.16. *Пусть (X, d) — локально компактное пространство с внутренней метрикой d. Тогда если (X, d) — полное пространство, то любые две точки из X соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные различные точки $x, y \in X$. Так как d — внутренняя метрика, существует последовательность кривых γ_n, соединяющих x и y, для которой $d(x, y) = \lim_{n\to\infty} L_d(\gamma_n)$. Тогда последовательность чисел $L_d(\gamma_n)$ ограничена сверху некоторым числом C и, по предложению 1.26, все кривые γ_n лежат в замкнутом шаре $\bar{B}_C(x)$. По теореме 2.41, шар $\bar{B}_C(x)$ компактен, так что, в силу следствия 3.15, эти точки соединены в шаре $\bar{B}_C(x)$ кратчайшей кривой γ. Так как γ не длиннее всех γ_n, имеем $L_d(\gamma) \le d(x, y)$, поэтому γ — кратчайшая. □

Замечание 3.17. Утверждение, обратное к следствию 3.16, вообще говоря неверно. Иными словами, локально компактное пространство с внутренней метрикой, любые две точки которого соединяются кратчайшей, не обязано быть полным. В качестве примера можно рассмотреть замкнутый евклидов шар с выброшенной граничной точкой.

Как "отловить" полноту локально компактного пространства с внутренней метрикой в терминах кратчайших кривых или геодезических? На этот вопрос отвечает "вторая часть" теоремы Хопфа–Ринова, которую теперь правильней называть теоремой Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена. Чтобы ее сформулировать, мы обобщим понятие кривой.

Определение 3.18. Под *промежутком* будем понимать отрезок, интервал или полуинтервал вещественной прямой $\mathbb{R}$. *Обобщенной кривой* в метрическом пространстве назовем непрерывное отображение из промежутка в это пространство. Обобщенную кривую назовем *кратчайшей* (*локально кратчайшей*, *геодезической*, *натурально параметризованной* и т.д.), если таковой является ее ограничение на каждый подотрезок из области определения.

Лемма 3.19. *Пусть (X, d) — произвольное полное ограниченно компактное метрическое пространство, и $\gamma\colon [0, a) \to X$ — натурально параметризованная обобщенная кривая. Тогда существует кривая $\bar{\gamma}\colon [0, a] \to X$, являющаяся продолжением γ.*

Доказательство. Пусть $t_n \in [0, a)$ — последовательность, стремящаяся к a. Так как при каждом n точка $x_n = \gamma(t_n)$ лежит в компактном шаре $\bar{B}_a\bigl(\gamma(0)\bigr)$, существует подпоследовательность x_{k_n}, сходящаяся к некоторой точке x. Без ограничения общности, будем считать, что подпоследовательность x_{k_n} совпадает с исходной последовательностью. Продолжим отображение γ на $[0,a]$ до отображения $\bar\gamma$, положив $\bar\gamma(a)=x$, и покажем, что $\bar\gamma$ непрерывно в a.

Выберем произвольное $\varepsilon>0$, тогда существует N такое, что для любого $n>N$ выполняется $d(x,x_n)<\varepsilon/2$. Так как $t_n\to a$, существует M такое, что для любого $n>M$ выполняется $|a-t_n|<\varepsilon/2$. Выберем произвольное $m>\max(N,\,M)$, и пусть $q>m$ таково, что $t_q\in(t_m,a)$. Выберем произвольное $t\in(t_m,a)$ и обозначим через I отрезок с концами t и t_q. Тогда

$$d\big(x,\bar\gamma(t)\big)=d\big(x,\gamma(t)\big)\le d\big(x,x_q\big)+d\big(x_q,\gamma(t)\big)<\\ <\varepsilon/2+L_d(\gamma|_I)=\varepsilon/2+|t-t_q|<\varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность $\bar\gamma$ в точке a. □

Теорема 3.20 (Хопф–Ринов, часть 2)**.** *Пусть (X,d) — локально компактное пространство с внутренней метрикой d. Тогда пространство (X,d) полно, если и только если существует такая точка $p\in X$, что каждая натурально параметризованная кратчайшая $\gamma\colon[0,a)\to X$ с $\gamma(0)=p$ может быть продолжена до кривой $\bar\gamma\colon[0,a]\to X$.*

Доказательство. Пусть сначала X полно. Выберем в качестве p любую точку из X, и пусть $\gamma\colon[0,a)\to X$, $\gamma(0)=p$, — кратчайшая. По теореме 2.41, пространство (X,d) ограниченно компактно, поэтому применима лемма 3.19, в силу которой γ можно продолжить на $[0,a]$ до некоторой кривой $\bar\gamma$.

Пусть теперь выполняется вторая часть утверждения теоремы. Покажем, что пространство (X,d) полное. Для этого достаточно показать, что каждый замкнутый шар с центром в точке p компактен. Предположим противное, тогда

$$R=\sup\{r\mid \text{замкнутый шар } \bar B_r(p) \text{ компактен}\}<\infty.$$

Покажем сначала, что шар $\bar B_R(p)$ компактен. Для этого мы докажем, что замыкание $\operatorname{cl}B_R(p)$ открытого шара $B_R(p)$ компактно и воспользуемся тем, что в пространствах с внутренней метрикой выполняется $\operatorname{cl}B_R(p)=\bar B_R(p)$ в силу следствия 2.36. Чтобы доказать компактность замыкания, мы покажем справедливость следующей леммы.

Лемма 3.21. *Пусть (X,d) — произвольное метрическое пространство, и Y — некоторое его подмножество. Тогда $\operatorname{cl}Y$ компактно, если и только если любая последовательность y_n точек из Y имеет в X сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Нетривиальным является лишь обратное утверждение. Итак, пусть любая последовательность из Y имеет сходящуюся подпоследовательность. Докажем, что $\operatorname{cl}Y$ компактно. Последнее, в силу теоремы 2.28, эквивалентно тому, что любая последовательность в $\operatorname{cl} Y$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в $\operatorname{cl} Y$. В силу замкнутости $\operatorname{cl} Y$, предыдущее утверждение имеет место, если и только если любая последовательность в $\operatorname{cl} Y$ имеет подпоследовательность, сходящуюся в X.

Пусть x_n — произвольная последовательность в $\operatorname{cl} Y$. По определению замыкания, для каждой точки x_n в шаре $B_{1/n}(x_n)$ имеется некоторая точка y_n из Y. В силу предположения, существует подпоследовательность y_{k_n}, сходящаяся к некоторой точке $x \in X$. Легко видеть, что и x_{k_n} также сходится к x. □

Вернемся к доказательству теоремы и покажем, что каждая последовательность в открытом шаре $B_R(p)$ имеет сходящуюся в X подпоследовательность. Предположим противное, т.е. что некоторая последовательность x_n точек из $B_R(p)$ не имеет сходящейся подпоследовательности. Положим $r_n = d(p, x_n)$. Последовательность r_n стремится к R. Действительно, если это не так, то существует подпоследовательность r_{k_n} такая, что при всех n для некоторого $R' < R$ выполняется $r_{k_n} \leq R'$, поэтому все x_{k_n} лежат в компактном шаре $\bar{B}_{R'}(p)$ и, значит, эта последняя последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, без ограничения общности будем считать, что последовательность r_n строго монотонно возрастает. Так как каждое x_n лежит в компактном шаре $\bar{B}_{r_n}(p)$, по следствию 3.15 и предложению 3.5 существует натурально параметризованная кратчайшая кривая $\gamma_n \colon [0, r_n] \to \bar{B}_{r_n}(p)$ такая, что $\gamma_n(0) = p$ и $\gamma_n(r_n) = x_n$.

Конструкция. Рассмотрим ограничение всех кривых γ_n на отрезок $[0, r_1]$. Эти ограничения лежат в компакте $\bar{B}_{r_n}(p)$, поэтому, в силу теоремы Арцела–Асколи 3.14, существует подпоследовательность γ_n^1, для которой отображения $\gamma_n^1|_{[0,r_1]}$ равномерно сходятся к некоторой кривой δ_1. В последовательности γ_n^1 имеется подпоследовательность γ_n^2, для которой области определения всех отображений γ^n включают $[0, r_2]$, а ограничения $\gamma^n|_{[0,r_2]}$ равномерно сходятся к некоторой кривой δ_2. Ясно, что δ_2 является продолжением δ_1. И так далее. Применим канторовский диагональный процесс, т.е. рассмотрим "диагональную" последовательность γ_n^n. В силу построения, для любого $t \in [0, R)$ существует такое N, что при всех $n > N$ последовательность точек $\gamma_n^n(t)$ определена и сходится к некоторой точке, которую мы обозначим через $\gamma(t)$.

Итак, мы получили отображение $\gamma \colon [0, R) \to X$. По построению, γ продолжает каждую кривую δ, поэтому является обобщенной кривой, совпадающей на каждом $[0, r] \subset [0, R)$ с ограничением некоторого δ_n. Докажем, что γ — кратчайшая кривая. Это мгновенно вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.22. *Пусть (X, d) — пространство с внутренней метрикой, и γ_n — последовательность кратчайших кривых, которая поточечно сходится к некоторой кривой γ. Тогда γ — также кратчайшая кривая.*

Доказательство. Действительно, концы кривых γ_n сходятся к некоторым точкам x и y. Так как кривые γ_n — кратчайшие, а метрика d — внутренняя, длины кривых γ_n равны расстояниям между концами, поэтому $L_d(\gamma_n) \to d(x,y)$. По предложению 1.29, имеем $L_d(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} L_d(\gamma_n) = d(x,y)$, поэтому γ — кратчайшая. □

Снова вернемся к доказательству теоремы. Так как построенная выше кривая $\gamma\colon [0,R) \to X$ — кратчайшая, существует кривая $\bar\gamma\colon [0,R] \to X$, продолжающая γ. Так как $r_n \to R$ и $x_n = \gamma(r_n)$, непрерывность отображения γ влечет $x_n \to \bar\gamma(R)$, противоречие. Компактность шара $\bar B_R(p)$ доказана.

Заключительный шаг, приводящий к противоречию, состоит в том, что для некоторого $\delta > 0$ шар $\bar B_{R+\delta}(p)$ также компактен. Эта часть доказательства дословно повторяет заключительный параграф доказательства теоремы 2.41 (Хопф–Ринов, часть 1), за исключением того, что в качестве ε выберем не $\min \rho|_{B_R(p)}$, а его половину (теперь мы не знаем, что шары $\bar B_{\rho(x)}(x)$ компактны, зато знаем, что компактны шары любого меньшего радиуса, в частности, шары $\bar B_{\rho(x)/2}(x)$). Теорема полностью доказана. □

Имеется вариация предыдущей теоремы. А именно, справедливо следующее предложение.

Предложение 3.23. *Пусть (X,d) — локально компактное пространство с внутренней метрикой d. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *существует такая точка $p \in X$, что каждая натурально параметризованная кратчайшая $\gamma\colon [0,a) \to X$ с $\gamma(0) = p$ может быть продолжена до кривой $\bar\gamma\colon [0,a] \to X$;*

(2) *каждая натурально параметризованная геодезическая $\gamma\colon [0,a) \to X$ может быть продолжена до кривой $\bar\gamma\colon [0,a] \to X$.*

Доказательство. Нетривиальным является лишь (1) $\Rightarrow$ (2). Итак, пусть выполнено условие (1). По теореме 3.20, пространство X — полное, а по теореме 2.41 пространство X ограниченно компактно. Осталось применить лемму 3.19. □

Определение 3.24. Говорят, что метрика d пространства (X,d) является *строго внутренней*, если любые две точки из X соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками.

3.3 Кратчайшие и середины

Определение 3.25. Точка z метрического пространства (X,d) называется *серединой между точками x и y* этого пространства, если $d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}d(x,y)$.

Теорема 3.26. *Пусть (X,d) — полное метрическое пространство. Предположим, что для каждой пары точек x, $y \in X$ существует середина. Тогда метрика d — строго внутренняя.*

Доказательство. Выберем произвольные две точки x и y из X. Мы покажем, что эти точки можно соединить кривой $\gamma\colon [0,1] \to X$, для которой $L_d(\gamma) = d(x,y)$.

Будем последовательно определять отображение γ для различных точек отрезка $[0,1]$. Положим $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Далее, пусть $\gamma(1/2)$ — середина между x и y; $\gamma(1/4)$ — середина между $\gamma(0)$ и $\gamma(1/2)$, а $\gamma(3/4)$ — середина между $\gamma(1/2)$ и $\gamma(1)$. Продолжая этот процесс, определим γ на всех двоичнорациональных точках отрезка $[0,1]$, т.е. на всех точках вид $m/2^n$, где $0 \le m \le 2^n$, а $n \in \mathbb{N}$.

Пусть t и t' — двоично-рациональные числа из $[a,b]$, тогда если они имеют вид $m/2^n$ и $(m+1)/2^n$, то $d\bigl(\gamma(t),\gamma(t')\bigr) = \frac{1}{2^n}\, d(x,y) = |t'-t|\, d(x,y)$ (это легко доказывается по индукции). Если же одно из них равно $k/2^n$, а другое $m/2^n$ (любые два двоично-рациональных числа можно привести к общему знаменателю), и, для определенности, $k < m$, то

$$d\bigl(\gamma(t),\gamma(t')\bigr) \le \sum_{i=k}^{m-1} d\biggl(\gamma\Bigl(\frac{i}{2^n}\Bigr),\gamma\Bigl(\frac{i+1}{2^n}\Bigr)\biggr) = \\ = \frac{m-k}{2^n}\cdot d(x,y) = |t'-t|\cdot d(x,y).$$

Таким образом, построенное отображение γ является $d(x,y)$-липшицевым на всюду плотном подмножестве отрезка $[0,1]$.

Лемма 3.27. *Пусть X' — всюду плотное подмножество метрического пространства (X,d_X), а $f\colon X' \to Y$ — некоторое C-липшицево отображение в полное метрическое пространство (Y,d_Y). Тогда существует единственное непрерывное отображение $F\colon X \to Y$, продолжающее f, т.е. $F|_{X'} = f$. Более того, отображение F также является C-липшицевым.*

Доказательство. Выберем произвольное $x \in X$. Так как X' всюду плотно в X, существует последовательность x_n точек из X', сходящаяся к x, в частности, эта последовательность является фундаментальной. В силу C-липшивости отображения f, имеем $d_Y\bigl(f(x_m), f(x_n)\bigr) \le C\cdot d_X(x_m,x_n)$, поэтому последовательность $f(x_n)$ также является фундаментальной. В силу полноты пространства Y, существует предел y последовательности $f(x_n)$.

Покажем, что y не зависит от выбора x_n. Действительно, если x'_n — другая последовательность в X', сходящаяся к x, то x_1, x'_1, x_2, $x'_2, \dots$ — также фундаментальная последовательность, следовательно, ее образ сходится, поэтому $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = y$. Отсюда, в частности, вытекает, что для каждого $x \in X'$ точка y совпадает с $f(x)$ (в качестве x_n можно взять стационарную последовательность x, $x, \dots$).

Положим $F(x) = y$. Тем самым, мы получим отображение $F\colon X \to Y$, которое, как показано выше, является продолжение отображения f.

Покажем, что F является C-липшицевым. Действительно, если $x_n \to x$

и $x'_n \to x'$, то

$$d_Y\big(F(x), F(x')\big) = d_Y\Big(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(x'_n)\Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \le C \cdot \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) = C \cdot d_X(x, x'),$$

что и требовалось.

Наконец, единственность вытекает из того очевидного факта, что непрерывные отображения, совпадающие на всюду плотном подмножестве, совпадают везде (проверьте). □

Итак, используя лемму 3.27, построим непрерывное продолжение отображения γ на весь отрезок $[0,1]$, и полученную кривую вновь обозначим через γ. По той же лемме, эта кривая является $d(x,y)$-липшицевой, поэтому, как было замечено в примере 1.24, $L_d(\gamma) \le d(x,y)\,|1-0| = d(x,y)$, откуда, в силу предложения 1.26, имеем $L_d(\gamma) = d(x,y)$ и, значит, γ — кратчайшая кривая. □

Замечание 3.28. Свойство метрики быть внутренней не достаточно для того, чтобы в полном метрическом пространстве существовали середины и кратчайшие кривые между любыми точками. Рассмотрим счетное семейство отрезков $[0, 1+1/n]$, $n \in \mathbb{N}$, каждый со стандартной метрикой, и склеим в одну точку A все их нули, а в другую точку B — все концы $1+1/n$. Если x и y принадлежат разным отрезкам, скажем, $[0, 1+1/n]$ и $[0, 1+1/m]$, то зададим расстояние между x и y равным $\min(x+y, 1-x+1/n+1-y+1/n)$ (т.е. на каждой паре склеенных отрезков рассматривается внутренняя метрика окружности). Тогда расстояние между A и B равно 1 и не достигается ни на какой кривой. Кроме того, для этих точек не существует середины.

Определение 3.29. Точка z метрического пространства (X,d) называется *ε-серединой между точками x и y* этого пространства, если $\big|d(x,z) - \frac{1}{2}d(x,y)\big| < \varepsilon$ и $\big|d(y,z) - \frac{1}{2}d(x,y)\big| < \varepsilon$.

Теорема 3.30. *Пусть (X,d) — полное метрическое пространство. Предположим, что для каждой пары точек $x, y \in X$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует ε-середина. Тогда метрика d — внутренняя.*

Доказательство. В основе — такое же доказательство, как и у теоремы 3.26, только сейчас находим не строгие середины, а приближенные, следя за тем, чтобы суммарный "разброс" был не большим (используем тот факт, что $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$). □

Имеются также и обратные очевидные утверждения, даже без предположения полноты пространства.

Предложение 3.31. *В пространстве с внутренней (строго внутренней) метрикой для любых двух точек и любого $\varepsilon > 0$ существует ε-середина (середина).*