Тема 2

Полнота, компактность, внутренние метрики.

2.1 Сходимость и полнота

Определение 2.1. Последовательность точек x_1, $x_2, \ldots$ метрического пространства (X, d) называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех m, $n > N$ выполняется $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Последовательность точек x_1, $x_2, \ldots$ метрического пространства (X, d) называется *сходящейся* к некоторой точке $x \in X$, называемой *пределом* этой последовательности, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n > N$ выполняется $x_n \in B_\varepsilon(x)$.

Предложение 2.2. *Если последовательность в метрическом пространстве сходится, то ее предел однозначно определен.*

Доказательство. Такое же, как в математическом анализе. □

Замечание 2.3. Существуют топологические пространства, в которых предел последовательности определен неоднозначно.

Определение 2.4. Метрическое пространство X называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится.

Пример 2.5. Интервал $(0, 1)$ вещественной прямой со стандартной функцией расстояния $d(x, y) = |x - y|$ не является полным, так как, скажем, последовательность $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, сходится на прямой к 0, который не содержится в интервале $(0, 1)$.

Пример 2.6. Отрезок $[0, 1]$ вещественной прямой со стандартной функцией расстояния — полное метрическое пространство.

Определение 2.7. Отображение $f\colon X \to X'$ метрических пространств с функциями расстояния d и d' соответственно называется *изометричным*, если оно уважает метрики: $d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Биективное изометричное отображение метрических пространств называется *изометрией*. Метрические пространства называются *изометричными*, если существует изометрия, отображающая одно из них в другое.

Замечание 2.8. Изометричность является отношением эквивалентности.

Замечание 2.9. В геометрии инъективное отображение принято называть *вложением*. Отметим, что изометричное отображение метрических пространств всегда является вложением, так как образы разных точек отстоят друг от друга на ненулевое расстояние (следствие изометричности).

Определение 2.10. Подмножество Y метрического пространства X называется *всюду плотным*, если каждый шар $B_r(x)$ пересекает Y.

Теорема 2.11. *Для каждого метрического пространства (X, d) существует полное метрическое пространство (X', d'), в которое (X, d) изометрично вкладывается и его образ является всюду плотным. Любые два таких пространства (X', d') изометричны.*

Определение 2.12. В обозначениях теоремы 2.11, пространство (X', d') называется *пополнением метрического пространства* (X, d).

Пример 2.13. Пополнение интервала $(0, 1)$ изометрично отрезку $[0, 1]$.

Определение 2.14. Точка x метрического пространства X называется *точкой прикосновения для подмножества* $Y \subset X$, если каждый шар $B_r(x)$ пересекает Y. Множество точек прикосновения множества Y называется *замыканием* Y и обозначается через $\operatorname{cl} Y$.

Предложение 2.15. *Замыкание подмножества Y метрического пространства X равно пересечению всех замкнутых подмножеств X, содержащих Y, поэтому является наименьшим замкнутым множеством, содержащим Y.*

Предложение 2.16. *Пополнение метрического пространства Y, являющегося подмножеством в $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой, изометрично замыканию* $\operatorname{cl} Y$.

Предложение 2.17. *Замкнутое подмножество полного метрического пространство полно.*

2.2 Компактность

Определение 2.18. Семейство открытых подмножеств метрического пространства называется *покрытием*, если их объединение совпадает со всем пространством. Каждое подсемейство покрытия называется *подпокрытием*. Метрическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Сформулируем основные свойства компактов.

Предложение 2.19. *Подмножество евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$ *компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Предложение 2.20. *Объединение конечного числа компактных подмножеств метрического пространства компактно.*

Предложение 2.21. *Непрерывный образ компактного метрического пространства компактен.*

Предложение 2.22. *Непрерывная функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *на компактном метрическом пространстве* X *ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения.*

Предложение 2.23. *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства компактно.*

Предложение 2.24. *Компактное подмножество метрического пространства замкнуто.*

Предложение 2.25. *Непрерывное биективное отображение из компактного метрического пространства в произвольное метрическое пространство является гомеоморфизмом.*

2.2.1 Секвенциальная компактность

Определение 2.26. Метрическое пространство называется *секвенциально компактным*, если всякая последовательность его точек имеет сходящуюся подпоследовательность.

Предложение 2.27. *Непрерывная функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *на секвенциально компактном пространстве* X *ограничена и достигает своих минимума и максимума.*

Доказательство. Докажем предложение, например, для точек максимума. Пусть $A = \sup_{x\in X} f(x)$. Тогда существует последовательность x_i точек из X, для которой $f(x_i) \to A$. Так как X секвенциально компактно, в этой последовательности существует подпоследовательность y_j, сходящаяся к некоторому $y \in X$, но тогда, в силу непрерывности функции f, имеем $f(y) = \lim_{j\to\infty} f(y_j) = A$, поэтому A конечно и достигается функцией f. □

Теорема 2.28. *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство. Рассмотрим в X произвольную последовательность x_i и предположим, что она не содержит сходящихся подпоследовательностей. Это означает, что

- последовательность x_i содержит бесконечное число различных точек;

- для каждой точки $x \in U := X \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$ существует шар B_x с центром в x, не содержащий точек последовательности точки x_i и, значит, множество $U = \cup_{x \in U} B_x$ — открыто;

- для каждой x_i существует шар B_{x_i} с центром в x_i, для которого $B_{x_i} \cap \{x_1, x_2, \ldots\} = \{x_i\}$.

Но тогда семейство $\{U, B_{x_1}, B_{x_2}, \ldots\}$ — покрытие X, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия (каждое конечное подпокрытие покрывает лишь конечное число точек последовательности x_i). Полученное противоречие показывает, что X — секвенциально компактно.

Пусть теперь пространство (X, d) секвенциально компактно. Предположим, что существует такое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ пространства X, которое не содержит конечных подпокрытий. Определим на X функцию $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ так:

$$\rho(x) = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \exists U_\alpha \in \mathcal{U} :\ B_r(x) \subset U_a\}.$$

Лемма 2.29. *Определенная выше функция ρ является 1-липшицевой и, значит, непрерывной.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что для некоторых $x, y \in X$ выполняется $|\rho(y) - \rho(x)| > d(x, y)$. Без ограничения общности, будем считать, что $\rho(y) > \rho(x)$, тогда $\rho(y) > \rho(x) + d(x, y)$. Увеличим немного число $\rho(x)$ до величины ρ' и уменьшим немного число $\rho(y)$ до величины ρ'' так, чтобы по-прежнему выполнялось $\rho'' > \rho' + d(x, y)$, тогда

- $B_{\rho'}(x) \subset B_{\rho''}(y)$, так как для произвольной точки $z \in B_{\rho'}(x)$ имеем

$$d(z, y) \le d(z, x) + d(x, y) < \rho' + d(x, y) < \rho'';$$

- существует $U_\alpha \in \mathcal{U}$, для которого $B_{r''}(y) \subset U_\alpha$.

Но тогда $B_{\rho'}(x) \subset U_\alpha$, поэтому $\rho(x) \ge \rho'$ по определению функции ρ, противоречие. $\square$

По предложению 2.27, функция ρ принимает наименьшее значение ρ_0, которое, тем самым, строго положительно. Положим $r = \rho_0/2$. Тогда для каждой точки $x \in X$ существует $U_\alpha \in \mathcal{U}$ такое, что $B_r(x) \subset U_\alpha$.

Выберем произвольную точку $x_1 \in X$, и пусть $U_1 \in \mathcal{U}$ такое, что $B_r(x_1) \subset U_1$. Существует $x_2 \in X \setminus U_1$. Выберем $U_2 \in \mathcal{U}$ такое, что $B_r(x_2) \subset U_2$. Вообще, если выбраны $x_1, \ldots, x_n$ и $U_1, \ldots, U_n$, то существует $x_{n+1} \in X \setminus \cup_{i=1}^n U_i$ и $U_{n+1} \in \mathcal{U}$ такое, что $B_r(x_{n+1}) \subset U_{n+1}$. Так как в $\mathcal{U}$ нет конечного подпокрытия, мы построим бесконечную последовательность $x_1, x_2, \ldots$, причем ясно, что каждая точка x_{n+1} лежит вне $\cup_{i=1}^n B_r(x_i)$, поэтому для любых x_i и x_j, $i \ne j$, имеем $d(x_i, x_j) \ge r$. Но такая последовательность не содержит ни одной сходящейся подпоследовательности, что противоречит секвенциальной компактности X. $\square$

2.2.2 Полнота и компактность

Из теоремы 2.28 легко получается следующий результат.

Следствие 2.30. *Компактное метрическое пространство полно.*

Доказательство. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространства. Выберем в пространстве X произвольную фундаментальную последовательность x_1, $x_2, \ldots$. По теореме 2.28, существует подпоследовательность x_{i_1}, $x_{i_2}, \ldots$, сходящаяся к некоторой точке $x \in X$. В силу фундаментальности, вся последовательность x_1, $x_2, \ldots$ сходится к x, поэтому пространство (X, d) – полное. □

Определение 2.31. Для $\varepsilon > 0$ подмножество S метрического пространства (X, d) называется *ε-сетью*, если для любой точки $x \in X$ существует $s \in S$ такое, что $d(x, s) < \varepsilon$. Метрическое пространство называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε-сеть.

Теорема 2.32. *Полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Доказательство. Пусть X — полное метрическое пространство.

Предположим, что X компактно. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$ — покрытие X. Так как X компактно, существует конечное подпокрытие $\{B_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^N$. Но тогда $\{x_1, \ldots, x_N\}$ — конечная ε-сеть. Тем самым, пространство X вполне ограничено.

Пусть теперь X вполне ограничено. Мы докажем, что X секвенциально компактно и применим теорему 2.28. Рассмотрим произвольную последовательность x_i в X. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим конечную $1/n$-сеть S_n. Шары $\{B_1(s)\}_{s \in S_1}$ покрывают X, поэтому среди них существует шар B_1, в котором содержится бесконечно много элементов последовательности x_i. Шары $\{B_{1/2}(s)\}_{s \in S_2}$ покрывают B_1, поэтому среди них имеется шар B_2, для которого $C_2 = B_1 \cap B_2$ содержит бесконечно много x_i. Если B_1, $B_2, \ldots, B_k$ уже выбраны так, что в $C_k = \cap_{j=1}^k B_j$ содержится бесконечно много x_i, то в семействе $\{B_{1/(k+1)}(s)\}_{s \in S_{k+1}}$, в силу того, что оно покрывает C_k, найдется шар B_{k+1}, для которого в $C_{k+1} = \cap_{j=1}^{k+1} B_j$ содержится бесконечно много x_i.

Выберем теперь в каждом C_k произвольную точку y_k из попавших туда элементов последовательности x_i. Так как C_k содержится в шаре радиуса $1/k$, подпоследовательность y_k последовательности x_i является фундаментальной и, значит, в силу полноты пространства X, сходится. □

2.3 Некоторые свойства пространств с внутренней метрикой

В разделе 1.3 мы определили функционал длины L_d, порожденный исходной метрикой d. Напомним, что мы назвали метрику d *внутренней*, если для любых двух точек x и y точная нижняя грань L_d-длин кривых, соединяющих x и y, равна $d(x, y)$. Кроме того, мы назвали кривую γ *спрямляемой*, если $L_d(\gamma) < \infty$. В данном разделе мы всегда будем измерять длину кривой с помощью функционала L_d. Наша цель — привести ряд полезных для дальнейшего свойств пространств с внутренней метрикой.

Определение 2.33. Для метрического пространства (X, d), его элемента $x \in X$ и его подмножества $A \subset X$ положим

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Теорема 2.34 (условие Хопфа–Ринова)**.** *Пусть (X, d) — пространство с внутренней метрикой, x, $y \in X$, $x \neq y$, и $0 < r < d(x, y)$. Тогда*

$$d\big(y, \bar{B}_r(x)\big) = d(x, y) - r.$$

Доказательство. Для любой точки $z \in \bar{B}_r(x)$ имеем $d(z, y) \geq d(x, y) - d(z, x) \geq d(x, y) - r$, поэтому $d\big(y, \bar{B}_r(x)\big) \geq d(x, y) - r$. Докажем, что имеет место и обратное неравенство.

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma\colon [0, 1] \to X$, $x = \gamma(0)$ и $y = \gamma(1)$, для которой $L_d(\gamma) \leq d(x, y) + \varepsilon$. Определим непрерывную функцию $f(t) = d\big(x, \gamma(t)\big)$, $f(0) = 0$, $f(1) = d(x, y)$, и выберем произвольное t_0 такое, что $f(t_0) = r$, т.е. $d\big(x, \gamma(t_0)\big) = r$. Обозначим через γ_1 часть кривой γ между 0 и t_0, а через γ_2 — оставшуюся часть кривой γ. Тогда $L_d(\gamma_1) \geq r$ по предложению 1.26, поэтому $L_d(\gamma_2) \leq d(x, y) - r + \varepsilon$ и, по тому же предложению, $d\big(\gamma(t_0), y\big) \leq L_d(\gamma_2) \leq d(x, y) - r + \varepsilon$. Так как ε произвольно, заключаем, что $d\big(\gamma(t_0), y\big) \leq d(x, y) - r$. Но $\gamma(t_0) \in \bar{B}_r(x)$, поэтому $d\big(y, \bar{B}_r(x)\big) \leq d(x, y) - r$. Доказательство закончено. □

Замечание 2.35. Условие Хопфа–Ринова может выполняться и в пространствах, метрика которых не является внутренней, например, в метрическом пространстве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел (со стандартной функцией расстояния).

Приведем некоторые следствия из теоремы 2.34.

Заметим, что в общем метрическом пространстве замкнутый шар $\bar{B}_r(x)$ не обязан совпадать с замыканием открытого шара $B_r(x)$. Например, в двухточечном пространстве $X = \{x, y\}$, $d(x, y) = r$, шар $B_r(x) = \{x\}$ является замкнутым подмножеством, поэтому $\operatorname{cl} B_r(x) = B_r(x)$. С другой стороны, $\bar{B}_r(x) = \{x, y\}$.

Однако, если метрика пространства X — внутренняя, то теорема 2.34 мгновенно влечет следующий результат.

Следствие 2.36. *Пусть (X, d) — пространство с внутренней метрикой. Тогда $\operatorname{cl} B_r(x) = \bar{B}_r(x)$.*

Доказательство. Точка y является точкой прикосновения шара $B_r(x)$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует $z \in B_r(x) \cap B_\varepsilon(y)$, поэтому

$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < r + \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, заключаем, что $d(x,y) \le r$, т.е. $y \in \bar{B}_x(r)$ и, значит, $\operatorname{cl} B_r(x) \subset \bar{B}_r(x)$. Докажем обратное включение.

Так как метрика d — внутренняя, из теоремы 2.34 следует, что для любой точки $y \in \bar{B}_r(x)$ выполняется $d\big(y, B_r(x)\big) = 0$, откуда y — точка прикосновения для $B_r(x)$, т.е. $y \in \operatorname{cl} B_r(x)$. □

Следующий результат будет использован при доказательстве первой части теоремы Хопфа–Ринова.

Следствие 2.37. *Пусть (X,d) — пространство с внутренней метрикой и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждой ε-сети S в шаре $\bar{B}_r(x) \subset X$ и любых $\delta' > \delta > 0$ имеем $\bar{B}_{r+\delta}(x) \subset \cup_{s\in S} \bar{B}_{\varepsilon+\delta'}(s)$.*

Доказательство. Для любой точки $y \in \bar{B}_{r+\delta}(x)$ имеем $d(x,y) \le r + \delta$. По теореме 2.34, выполняется $d\big(y, \bar{B}_r(x)\big) \le \delta$, поэтому для любого $\delta' > \delta$ существует такое $z \in \bar{B}_r(x)$, что $d(y,z) < \delta'$. С другой стороны, существует $s \in S$, для которого $B_\varepsilon(s) \ni z$, откуда $d(s,y) \le d(s,z) + d(z,y) < \varepsilon + \delta'$, поэтому $y \in \bar{B}_{\varepsilon+\delta'}(x)$, что и требовалось. □

2.4 Локальная компактность

Определение 2.38. Метрическое пространство X называется *локально компактным*, если для каждой точки $x \in X$ существует такое $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\bar{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Замечание 2.39. Несложно проверяется, что локальную компактность пространства X можно определить следующим эквивалентным условием: для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность, у которой замыкание компактно.

Замечание 2.40. В отличие от компактности, локальная компактность, даже в сочетании с внутренней метрикой, не гарантирует полноту метрического пространства. Очевидный пример дает евклидова плоскость с выброшенной точкой.

Теорема 2.41 (Хопф–Ринов, часть 1)**.** *Пусть (X,d) — локально компактное пространство с внутренней метрикой d. Тогда пространство (X,d) полно, если и только если каждый замкнутый шар в X компактен.*

Доказательство. Пусть сначала известно, что каждый замкнутый шар компактен. Докажем полноту. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Тогда, по определению фундаментальности, существует r такое, что все x_n содержатся в $\bar{B}_r(x_1)$. По следствию 2.30, шар $\bar{B}_r(x_1)$ является полным, поэтому последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится к некоторой точке $x \in \bar{B}_r(x) \subset X$, что и требовалось.

Пусть теперь пространство X полно. Определим на X функцию $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\rho(x) = \sup\{r > 0 \mid \bar{B}_r(x) \text{ — компактен}\}.$$

Лемма 2.42. *Пусть существует $x_0 \in X$ такой, что $\rho(x_0) = \infty$. Тогда каждый шар $B_r(x)$ компактен и, значит, ρ тождественно равна ∞.*

Доказательство. При каждых x и $r > 0$ шар $\bar{B}_r(x)$ содержится в некотором компактном шаре $\bar{B}_{r'}(x_0)$, поэтому, в силу замкнутости множества $\bar{B}_r(x)$ и предложения 2.23, шар $\bar{B}_r(x)$ также компактен. □

Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и покажем, что $\rho(x_0) = \infty$ (в силу леммы 2.42, этого достаточно для завершения доказательства теоремы).

Предположим противное, т.е. что $\rho(x_0) < \infty$. Тогда, в силу леммы 2.42, функция ρ везде конечна.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 2.29.

Лемма 2.43. *Функция ρ является 1-липшицевой и, значит, непрерывной.*

Лемма 2.44. *В сделанных предположениях, шар $\bar{B}_{\rho(x)}(x)$ компактен при каждом x.*

Доказательство. Положим $R = \rho(x)$. Так как шар $\bar{B}_R(x)$ — замкнутое подмножество полного пространства X, то, по предложению 2.17, этот шар является полным. Следовательно, по теореме 2.32, достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ в этом шаре можно выбрать конечную ε-сеть. Ясно, что это свойство можно проверить для достаточно малых ε. Поэтому мы, без ограничения общности, будем предполагать, что $R - \varepsilon/2 > 0$.

По определению R, существует такое r', $R - \varepsilon/2 < r' \le R$, для которого шар $\bar{B}_{r'}(x)$ является компактом. В силу теоремы 2.32, в $\bar{B}_{r'}(x)$ существует конечная $(\varepsilon/2)$-сеть S. Покажем, что S является ε-сетью для $\bar{B}_R(x)$.

Применим следствие 2.37, положив $\delta := R - r' < \delta' := \varepsilon/2$, тогда

$$\bar{B}_R(x) = \bar{B}_{r'+\delta}(x) \subset \bigcup_{s\in S} \bar{B}_{\varepsilon/2+\delta'}(s) = \bigcup_{s\in S} \bar{B}_\varepsilon(s),$$

поэтому S является ε-сетью для $\bar{B}_R(x)$. □

Так как ρ — непрерывная функция, она достигает своего минимума на компакте $\bar{B}_R(x_0)$. Обозначим этот минимум через ε, тогда, по лемме 2.44, шары $\bar{B}_\varepsilon(x)$ компактны при всех $x \in \bar{B}_R(x_0)$. Пусть S — конечная $\varepsilon/3$-сеть в $\bar{B}_R(x_0)$, существующая в силу компактности $\bar{B}_R(x_0)$. Положим $W = \cup_{s\in S}\bar{B}_\varepsilon(s)$. Так как все шары $\bar{B}_\varepsilon(s)$ — компакты, множество W, по предложению 2.20, также является компактом. Воспользуемся следствием 2.37, положив $\delta = \varepsilon/3$ и $\delta' = 2\varepsilon/3$. Тогда, в силу этого следствия,

$$\bar{B}_{R+\delta}(x_0) = \bar{B}_{R+\varepsilon/2}(x_0) \subset \cup_{s\in S}\bar{B}_{\varepsilon/3+\delta'}(s) = \cup_{s\in S}\bar{B}_\varepsilon(s) = W,$$

поэтому шар $\bar{B}_{R+\varepsilon/3}(x_0)$ компактен, противоречие с выбором R. Теорема доказана. □

Определение 2.45. Метрическое пространство, в котором каждый замкнутый шар компактен, называется *ограниченно компактным*.

Замечание 2.46. Ограниченная компактность, очевидно, может быть переформулирована следующим эквивалентным образом: *каждое замкнутое ограниченное подмножество компактно.*