Тема 1

Метрические пространства и функционалы длины.

Обозначим через $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных вещественных чисел.

Определение 1.1. Пусть X — множество. *Метрикой на* X называется функция $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) невырожденность: $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

(2) симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) неравенство треугольника: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ для любых точек x, y, $z \in X$.

Пара (X, d) называется *метрическим пространством.*

Определение 1.2. Если $x \in X$ — точка, а ε — вещественное число, множество

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

называется *открытым шаром радиуса* ε *с центром в* x. Множество

$$\bar{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

называется *замкнутым шаром радиуса* ε *с центром в* x.

Определение 1.3. *Метрическая топология на* X состоит из пустого множества и всевозможных подмножеств X, представимых в виде объединения открытых шаров.

1.1 Допустимые кривые.

В дальнейшем, все топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми.

Напомним, что *кривой* в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение из отрезка прямой в это пространство. Приведем ряд необходимых определений, связанных с кривыми.

Определение 1.4.

- Если $[a,b] \xrightarrow{\gamma_1} X$ и $[b,c] \xrightarrow{\gamma_2} X$ — кривые, удовлетворяющие $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, то отображение $[a,c] \xrightarrow{\gamma} X$, равное γ_1 на $[a,b]$ и γ_2 на $[b,c]$, называется *склейкой кривых* γ_1 *и* γ_2. Склейку кривых γ_1 и γ_2 будем обозначать через $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

- Если $\psi\colon [c,d] \to [a,b]$ — гомеоморфизм и $\gamma\colon [a,b] \to X$ — кривая, то $\gamma \circ \psi\colon [c,d] \to X$ — кривая, про которую говорят, что она получена из γ *заменой параметра* ψ. Если $\psi(s) = p\,s + q$, где $p \neq 0$ и q — вещественные числа, то замена параметра ψ называется *линейной*.

- Если $[c,d] \subset [a,b]$ и $\gamma\colon [a,b] \to X$ — кривая, то отображение $\gamma|_{[c,d]}$ является кривой и называется *ограничением кривой* γ *на* $[c,d]$.

Замечание 1.5. Пусть $\gamma(t)$ — кривая, и $t = \varphi(s)$ — некоторая замена параметра. Фразы "сделаем замену параметра t кривой γ на параметр s" или "выберем на кривой γ параметр s" означают, что мы переходим к рассмотрению кривой $\gamma \circ \varphi$, однако полученную кривую мы обозначаем той же буквой γ и пишем $\gamma(s)$. Это неформальное правило, если оно не вызывает путаницы, часто используется при работе с кривыми.

Впрочем, это правило становится более естественным, если определить *кривую* как класс всех непрерывных отображений из отрезка в топологическое пространство, отличающихся друг от друга на замену параметра. При этом каждое отдельное отображение называется *параметрической кривой*. Тогда выбор параметра на кривой означает просто рассмотрение соответствующей параметрической кривой из этого класса. В дальнейшем, мы не будем пользоваться таким, технически более сложным понятием кривой, так что *выбор параметра* будем понимать так, как мы описали в начале этого замечания.

Определение 1.6. Пусть X — топологическое пространство. Семейство Γ кривых в X называется *допустимым*, если

- каждая склейка кривых из Γ вновь содержится в Γ;

- каждая кривая, полученная линейной заменой параметра из некоторой кривой, входящей в Γ, также принадлежит Γ;

- ограничение любой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ из Γ на произвольный отрезок $[c,d] \subset [a,b]$ является кривой из Γ.

Кривые, входящие в допустимое семейство кривых, также будем называть *допустимыми*.

Приведем примеры допустимых семейств кривых.

Пример 1.7. Все кусочно-линейные кривые в $\mathbb{R}^n$, т.е. ломаные, образуют допустимый класс кривых.

Пример 1.8. Все кусочно-полиномиальные кривые в $\mathbb{R}^n$ (склейки кривых, каждая из которых является полиномиальной, т.е. ее координатные функции — многочлены от параметра) образуют допустимый класс кривых.

Пример 1.9. Все кусочно-гладкие кривые в $\mathbb{R}^n$ (склейки гладких кривых) образуют допустимый класс кривых.

Определение 1.10. Отображение $f\colon X \to X'$ метрических пространств X и X' с метриками d и d' называется *C-липшицевым* для некоторого положительного числа C, если для всех x, $y \in X$ выполняется

$$d'\bigl(f(x), f(y)\bigr) \le C \cdot d(x, y).$$

Число C называется *константой Липшица* отображения f. Если не важно, чему равна константа C, то C-липшицево отображение называют просто *липшицевым.*

Замечание 1.11. Каждое липшицево отображение метрических пространств является непрерывным. В частности, каждое липшицево отображение из отрезка в метрическое пространство является кривой, называемой *липшицевой.*

Пример 1.12. Все липшицевы кривые в метрическом пространстве образуют допустимый класс кривых.

1.2 Функционалы длины

Пусть X — топологическое пространство и Γ — некоторый допустимый класс кривых в X. Каждое отображение $\Gamma \to \mathbb{R}$ будем называть *функционалом.*

Определение 1.13. Отображение $L\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$ называется *функционалом длины*, если выполняются следующие условия:

(1) аддитивность: если $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ — склейка допустимых кривых γ_i, то $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$;

(2) непрерывность для каждой допустимой кривой $\gamma\colon [a, b] \to X$ функция $f(t) = L\bigl(\gamma|_{[a,t]}\bigr)$ непрерывна;

(3) независимость от параметра: для каждой допустимой кривой $\gamma\colon [a, b] \to X$ и (не обязательно линейной) замены параметра $\psi\colon [c, d] \to [a, b]$ такой, что кривая $\gamma \circ \psi$ также допустима, выполняется $L(\gamma) = L(\gamma \circ \psi)$;

(4) согласованность с топологией: для каждого замкнутого подмножества $Z \subset X$ и точки $x \in X \setminus Z$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждой кривой γ, соединяющей x с некоторой точкой из Z выполняется $L(\gamma) \ge \varepsilon$.

Пусть X — топологическое пространство, на котором задан класс Γ допустимых кривых и функционал длины $L\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что любые две точки x и y из X соединяются некоторой допустимой кривой. Положим
$$d_L(x,y) = \inf\bigl\{L(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \text{ соединяет } x \text{ и } y\bigr\}.$$

Предложение 1.14. *Функция $d_L\colon X\times X \to \mathbb{R}_+$ является метрикой.*

Доказательство. Неотрицательность d_L вытекает из неотрицательности L. Свойство $d_L(x,x)=0$ следует из того, что для произвольной допустимой кривой $\gamma\colon [a,b]\to X$, $\gamma(a)=x$, и точечной кривой $\delta\colon [a,a]\mapsto X$, $\delta(a)=x$, имеем $\gamma=\delta\cdot\gamma$, откуда $L(\gamma)=L(\delta)+L(\gamma)$, так что $L(\delta)=0$. Положительность $d_L(x,y)$ для $x\ne y$ является следствие пункта (4) определения 1.13, если в качестве Z взять $\{y\}$.

Симметричность следует из того, что кривая, соединяющая x и y, также соединяет y и x.

Докажем неравенство треугольника. Пусть x, y и z — произвольные точки из X. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют допустимые $\gamma_1\colon [a,b]\to X$ и $\gamma_2\colon [c,d]\to X$ такие, что $\gamma_1(a)=x$, $\gamma_1(b)=y$, $\gamma_2(c)=y$, $\gamma_2(d)=z$, $L(\gamma_1)\le d_L(x,y)+\varepsilon$, $L(\gamma_2)\le d_L(y,z)+\varepsilon$. Рассмотрим линейную замену $\psi(t)=t-c+b$. Тогда кривая $\gamma_2'=\gamma_2\circ\psi$ является допустимой и $L(\gamma_2')=L(\gamma_2)$. Для кривых γ_1 и γ_2' определена склейка $\gamma=\gamma_1\cdot\gamma_2'$, являющаяся допустимой кривой, соединяющей x и z. Из определения функционала длины вытекает, что
$$L(\gamma)=L(\gamma_1)+L(\gamma_2')=L(\gamma_1)+L(\gamma_2)\le d_L(x,y)+d_L(y,z)+2\varepsilon.$$
Таким образом, $d_L(x,z)\le d_L(x,y)+d_L(y,z)+2\varepsilon$, что, в силу произвольности ε, завершает доказательство неравенства треугольника. □

Приведем примеры функционалов длины.

Пример 1.15. Пусть $X=\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство; класс допустимых кривых Γ — всевозможные ломаные; функционал длины L ставит в соответствие каждой ломаной ее стандартную длину, т.е. сумму длин всех ее ребер. Тогда d_L совпадает с исходной функцией длины (так как самая короткая ломаная, соединяющая данные точки x и y — это отрезок $[x,y]$).

Рассмотрим на топологическом пространстве X произвольную непрерывную функцию $f\colon X\to\mathbb{R}$ и кривую $\gamma\colon [a,b]\to X$. Тогда $f\circ\gamma$ — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, так что определен интеграл $\int_a^b f\circ\gamma$. Заметим, что если $\psi\colon [c,d]\to[a,b]$ — произвольная замена параметра, то, вообще говоря, $\int_a^b f\circ\gamma \ne \int_c^d f\circ\gamma\circ\psi$.

Пусть теперь $X=\mathbb{R}^n$, $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция и $[A,B]\subset\mathbb{R}^n$ — некоторый отрезок. Рассмотрим натуральную параметризацию этого отрезка: $\gamma(s)=A+\frac{B-A}{|AB|}s$, $s\in\bigl[0,|AB|\bigr]$, тогда интеграл $\int_0^{|AB|} f\circ\gamma$ будем называть *интегралом функции f по отрезку* $[A,B]$ и обозначать через $\int_{[A,B]} f$.

Легко проверяется, что если $\delta(t)$, $t \in [c,d]$, — произвольная гладкая параметризация отрезка $[A,B]$, то

$$\int_{[A,B]} f = \int_c^d \big(f \circ \delta(t)\big) \cdot \big|\delta'(t)\big|\, dt.$$

Пример 1.16 (Конформно плоская метрика)**.** Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительная функция. Снова в качестве класса Γ допустимых кривых выберем все ломаные. Для каждой $\gamma \in \Gamma$ с последовательными вершинами $A_0, \dots, A_m$ положим

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^m \int_{[A_i, A_{i+1}]} f$$

Такой функционал длины иногда связывают с "переходом болота": сам функционал измеряет время перехода, а функция f — трудность прохождения.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольная непрерывная функция и $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — кусочно-гладкая кривая, склеенная из гладких кривых $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$, где $t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда под интегралом $\int_a^b f\big(\gamma'(t)\big)\, dt$ будем понимать $\sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\big(\gamma'(t)\big)\, dt$.

Пример 1.17. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и Γ — всевозможные кусочно-гладкие кривые. Для каждой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ из Γ положим $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$ (дифференциально-геометрическая длина кривой). Полезное упражнение: докажите, что d_L совпадает со стандартной евклидовой метрикой.

Пример 1.18 (Финслерова метрика)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — область (связное открытое множество) и Γ — всевозможные кусочно-гладкие кривые в X. Рассмотрим непрерывную функцию $\nu\colon X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ такую, что при каждом $x \in X$ функция $\nu_x(v) = \nu(x,v)$ является некоторой нормой. Для каждой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ из Γ положим

$$L_\nu(\gamma) = \int_a^b \nu\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\, dt.$$

Предложение 1.19. *Определенная только что функция $L_\nu(\gamma)$ является функционалом длины.*

Доказательство. Аддитивность и непрерывность очевидны.

Докажем независимость от параметра. Пусть $\psi\colon [c,d] \to [a,b]$ — замена параметра на допустимой кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Тогда

$$L_\nu(\gamma \circ \psi) = \int_c^d \nu\big(\gamma \circ \psi(t), \gamma' \circ \psi(t) \cdot \psi'(t)\big)\, dt = \\ = \int_c^d \nu\big(\gamma \circ \psi(t), \gamma' \circ \psi(t)\big)\, |\psi'(t)|\, dt = \\ = \int_a^b \nu\big(\gamma(s), \gamma'(s)\big)\, ds = L_\nu(\gamma).$$

(Более аккуратно, приведенная выше цепочка равенств имеет место на каждом промежутке одновременной гладкости функций γ и ψ; итоговое равенство получается сложением полученных результатов.)

Проверим теперь согласованность с топологией. Пусть Z — произвольное отличное от X замкнутое подмножество X и $x \in X \setminus Z$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, для которого замкнутый шар $\bar{B}_\varepsilon(x)$ не пересекает Z. Обозначим через $S^{n-1}(y) \subset \mathbb{R}^n$ единичную сферу с центром в точек y, тогда множество $W = \cup_{y \in \bar{B}_\varepsilon(x)} \{y\} \times S^{n-1}(y) \subset X \times \mathbb{R}^n$ гомеоморфно $\bar{B}_\varepsilon(x) \times S^{n-1}(0)$ и, значит, является компактом, поэтому ν достигает на W своего минимума α, который, очевидно, отличен от нуля. Таким образом, для всех $y \in \bar{B}_\varepsilon(x)$ и ненулевых $v \in \mathbb{R}^n$ выполняется $\nu\big(y, v/\|v\|\big) \geq \alpha$, т.е. $\nu(y,v) \geq \alpha\,\|v\|$, что верно и при $v = 0$.

Пусть γ — допустимая кривая, соединяющая x с точкой из Z, а δ — часть кривой γ от точки x до первой точки выхода γ на границу шара $\bar{B}_\varepsilon(x)$. Тогда

$$L_\nu(\gamma) = \int \nu(\gamma, \gamma') \geq \int \nu(\delta, \delta') \geq \alpha \int \|\delta'\| \geq \alpha\,\varepsilon,$$

что и требовалось. □

Определение 1.20. Метрика d_{L_ν}, порожденная функционалом L_ν, называется *финслеровой*.

Если $g\colon X \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ — гладкая функция, для которой функция $g_x(v,w) = g(x,v,w)$ является скалярным произведением, то при $\nu(x,v) = \sqrt{g(x,v,v)}$ функционал L_ν называется *римановой длиной* и порождает *риманову метрику* d_{L_ν}.

Замечание 1.21. В дифференциальной геометрии под *римановой метрикой* понимают само отображение g.

1.3 Спрямляемые кривые

Пусть X — метрическое пространство с функцией расстояния d, и $\gamma\colon [a,b] \to X$ — произвольная кривая. Для каждого разбиения $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ положим $L_\gamma(t_0 \cdots t_m) = \sum_{i=1}^m d\big(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\big)$ и

$$L_d(\gamma) = \sup\big\{L_\gamma(t_0 \cdots t_m) \mid \\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b \text{ — разбиение отрезка } [a,b]\big\}.$$

Определение 1.22. Последовательность точек $\gamma(t_0) \cdots \gamma(t_n)$ будем называть *ломаной, вписанной в кривую* γ, а величину $L_\gamma(t_0 \cdots t_m)$ — *длиной этой ломаной*.

Определение 1.23. Кривая γ называется *спрямляемой*, если $L_d(\gamma) < \infty$.

Пример 1.24. Любая C-липшицева кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$ спрямляемая, так как для любого разбиение $t_0 < \dots < t_m$ имеем $L_\gamma(t_0 \cdots t_m) \le C(b-a)$ и, значит, $L_d(\gamma) \le C(b-a) < \infty$.

Пример 1.25. Любая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема, так как является липшицевой (с константой Липшица, равной максимуму модуля вектора скорости кривой).

Предложение 1.26 (Обобщенное неравенство треугольника)**.** *Для произвольных x, $y \in X$ рассмотрим соединяющую их кривую γ, и пусть $L_d(\gamma)$ обозначает длину этой кривой. Тогда $L_d(\gamma) \ge d(x,y)$.*

Доказательство. Действительно, $L_d(\gamma)$ равно точной верхней грани длин всех вписанных в γ ломаных, а длина каждой такой ломаной не меньше $d(x,y)$ в силу неравенства треугольника. □

Предложение 1.27. *В произвольном метрическом пространстве все спрямляемые кривые образуют допустимое семейство.*

Доказательство. Действительно, склейка $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ спрямляемых кривых γ_i спрямляема в силу того, что каждое разбиение параметризующего отрезка склейки подразбивается до объединения разбиений каждой из образующих склейку кривых; при этом L_γ только увеличивается. Однако при таком разбиении $L_\gamma = L_{\gamma_1} + L_{\gamma_2}$, а L_{γ_i} ограничены константами, не зависящими от разбиений.

Также легко показывается, что замена параметра не меняет $L_d(\gamma)$ и что для части δ кривой γ выполняется $L_d(\delta) \le L_d(\gamma)$, так что каждая часть спрямляемой кривой также спрямляема. □

Предложение 1.28. *Функционал L_d, заданный на допустимом классе всех спрямляемых кривых, является функционалом длины.*

Доказательство. Мы должны проверить выполнение свойств из определения 1.13.

(1) **Аддитивность**. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, — произвольная спрямляемая кривая, представленная в виде склейки кривой $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ и $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. Покажем, что $L_d(\gamma) = L_d(\gamma_1) + L_d(\gamma_2)$.

Так как объединение любых разбиений T_1 и T_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ является разбиением отрезка $[a,b]$, а $L_\gamma(T_1 \cup T_2) = L_{\gamma_1}(T_1) + L_{\gamma_2}(T_2)$, имеем $L_d(\gamma) \ge L_d(\gamma_1) + L_d(\gamma_2)$. С другой стороны, как уже отмечалось при доказательстве предложения 1.27, каждое разбиение отрезка $[a,b]$ подразбивается до объединения разбиений кривых γ_i, при этом длина ломаной, соответствующей исходному разбиению, при переходе к подразбиению не уменьшается, поэтому $L_d(\gamma) \le L_d(\gamma_1) + L_d(\gamma_2)$.

(2) **Непрерывность**. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, — произвольная спрямляемая кривая. Покажем, что функция $f(t) = L_d\big(\gamma|_{[a,t]}\big)$ непрерывна. Мы проверим непрерывность слева для случая $a < t \le b$. Непрерывность справа для $a \le t < b$ проверяется аналогично.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ такое, что $L_d(\gamma) - L_\gamma(t_0 \cdots t_n) < \varepsilon$. Так как переход к подразбиению не уменьшает L_γ, то предположение, что t совпадет с некоторым t_k, $k > 0$, не ограничивает общности. В силу предыдущего пункта, имеем $L_d(\gamma) = \sum_{i=1}^n L_d\big(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\big)$. По предложению 1.26, при всех i выполняется $L_d\big(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\big) - d\big(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\big) \ge 0$, откуда

$$L_d\big(\gamma|_{[t_{k-1},t]}\big) - d\big(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t)\big) < \varepsilon.$$

Еще раз воспользуемся тем, что переход к подразбиению не уменьшает L_γ. На сей раз отсюда вытекает, что это же неравенство остается верным при замене t_{k-1} на каждое $s \in [t_{k-1}, t]$.

(3) **Независимость от параметра**. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, — произвольная спрямляемая кривая. Покажем, что при любой замене параметра $\psi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ выполняется $L_d(\gamma) = L_d(\gamma \circ \psi)$. Но это мгновенно вытекает из того, что ψ порождает биекцию между множествами всевозможных разбиений отрезков $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$, причем для каждого разбиения T отрезка $[\alpha, \beta]$ и соответствующего ему разбиения $\psi(T)$ отрезка $[a, b]$ выполняется $L_\gamma\big(\psi(T)\big) = L_{\gamma\circ\psi}(T)$.

(4) **Согласованность с топологией**. Это вытекает из предложения 1.26 и того факта, что расстояние от точки, не принадлежащей замкнутому множеству, до этого множества отлично от нуля. □

Приведем еще одно важное свойство функционала длины L_d.

Предложение 1.29 (Полунепрерывность снизу)**.** *Функционал L_d полунепрерывен снизу, т.е. для любой последовательности $\gamma_n\colon [a, b] \to X$ спрямляемых кривых, поточечно сходящейся к спрямляемой кривой γ, имеем*

$$L_d(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} L_d(\gamma_n).$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что при достаточно больших n выполняется $L_d(\gamma) \le L_d(\gamma_n) + \varepsilon$, а раз так, то $L_d(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} L_d(\gamma_n) + \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, получим требуемое.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Выберем такое разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ отрезка $[a, b]$, что $L_d(\gamma) - L_\gamma(t_0 \cdots t_m) < \varepsilon/2$. Существует N такое, что для любого $n > N$ и всех i выполняется $d\big(\gamma(t_i), \gamma_n(t_i)\big) < \frac{\varepsilon}{4m}$. Отсюда мгновенно вытекает, что

$$d\big(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\big) < d\big(\gamma_n(t_{i-1}), \gamma_n(t_i)\big) + \frac{\varepsilon}{2m},$$

поэтому $L_\gamma(t_0 \cdots t_m) < L_{\gamma_n}(t_0 \cdots t_m) + \varepsilon/2$. Таким образом,

$$L_d(\gamma) < L_\gamma(t_0 \cdots t_m) + \varepsilon/2 < L_{\gamma_n}(t_0 \cdots t_m) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \le L_d(\gamma_n) + \varepsilon,$$

что и требовалось. □

1.4 Внутренняя метрика

Определение 1.30. Пусть X — метрическое пространство с метрикой d, и L_d функционал длины на спрямляемых кривых. Предположим, что каждая пара точек из X соединяется хотя бы одной спрямляемой кривой. Тогда L_d порождает метрику $\widehat{d} = d_{L_d}$ на X, которая называется *внутренней метрикой, индуцированной d.*

Теорема 1.31. *В сделанных выше предположениях, имеем $\widehat{\widehat{d}} = \widehat{d}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что $L_d(\gamma)$ не меньше d-расстояния между концами кривой γ в силу неравенства треугольника, поэтому $\widehat{d}(x,y) = \sup_\gamma L_d(\gamma) \geq d(x,y)$ для всех точек x и y из X. Отсюда мгновенно заключаем, что $L_d(\gamma) \leq L_{\widehat{d}}(\gamma)$ для любой кривой γ.

Далее, заметим, что $\widehat{d}\bigl(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\bigr) \leq L_d\bigl(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\bigr)$, так как левая часть равна точной нижней грани значений функционала L_d на всевозможных кривых, соединяющих $\gamma(t_{i-1})$ и $\gamma(t_i)$. Суммируя, получаем

$$\sum_i \widehat{d}\bigl(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\bigr) \leq \sum_i L_d\bigl(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\bigr) = L_d(\gamma),$$

откуда $L_{\widehat{d}}(\gamma) = \sup_{t_0\cdots t_m} \sum_i \widehat{d}\bigl(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\bigr) \leq L_d(\gamma)$. Следовательно, $L_{\widehat{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$, откуда $\widehat{\widehat{d}} = \widehat{d}$, что и требовалось. □

Определение 1.32. Метрика d называется *внутренней*, если $\widehat{d} = d$.

Замечание 1.33. Финслеровы и, в частности, римановы метрики являются внутренними (проверьте).