ВОПРОСЫ

по курсу лекций «*Классическая дифференциальная геометрия и топология*»

для студентов математиков 2 курса (весна 2008 г.)

Лектор академик А.Т.Фоменко

1. Скалярные произведения. Псевдоевклидово скалярное произведение. Его свойства.

2. Сферы и псевдосферы. Стереографические проекции в евклидовом и псевдоевклидовом случаях.

3. Геометрия, индуцированная на псевдосферах. Модель Пуанкаре и геометрия Лобачевского.

4. Области в евклидовом пространстве. Декартовы координаты. Гладкие кривые, вектор скорости. Длина кривой в декартовых координатах.

5. Криволинейные координаты. Независимость длины кривой от параметра.

6. Полярные, сферические, цилиндрические координаты. Их особые точки и якобианы замены координат.

7. Общее понятие якобиана замены координат. Регулярные замены координат. Матрица Якоби. Координатные линии, примеры.

8. Гладкие k-мерные поверхности в области евклидова пространства. Длина кривой в произвольной криволинейной системе координат.

9. Риманова метрика в области евклидова пространства. Закон преобразования компонент метрики. Углы между пересекающимися кривыми.

10. Индуцированная риманова метрика на поверхностях в евклидовом пространстве. Примеры.

11. Метрики на плоскости, цилиндре, сфере. Различные формы их записи (в том числе комплексная).

12. Метрика на плоскости Лобачевского. Различные формы ее записи (в том числе комплексная).

13. Линейные преобразования евклидова пространства и движения римановой метрики, заданной в области евклидова пространства.

14. Группа изометрий римановой метрики. Ортогональные преобразования сохраняют евклидову метрику. Унитарные преобразования комплексного пространства.

15. Группы движений евклидовой метрики на прямой, на плоскости, метрики на сфере.

16. Связь группы вращений двумерной сферы с трехмерным проективным пространством. Различные определения проективного пространства.

17. Группа движений метрики плоскости Лобачевского. Дробно-линейные преобразования.

18. Связь группы движений метрики Лобачевского с группой $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

19. Топологические пространства. Хаусдорфовость. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. Связность. Компактность.

20. Общее определение многообразия. Атлас, карты, координатные отображения. Функции перехода (склейки). Топологические и гладкие многообразия.

21. Формулы Френе на плоскости. Натуральный параметр. Кривизна плоской кривой. Вычисление кривизны в произвольном параметре.

22. Формулы Френе в трехмерном пространстве. Кососимметричность матрицы Френе. Кривизна и кручение.

23. Теорема о восстановлении плоской кривой по ее кривизне.

24. Диффеоморфизм многобразий. Подмногообразия. Многообразия с краем и без края.

25. Область в евклидовом пространстве, график гладкой функции, неособая поверхность уровня гладкой функции — как гладкие многообразия. Связь теоремы о неявной функции с гладкими подмногообразиями.

26. Касательный вектор. Три его определения. Касательное пространство к гладкому многообразию.

27. Гладкие отображения многообразий. Дифференциал гладкого отображения. Погружения и вложения. Ориентируемость и неориентируемость.

28. Слабая теорема Уитни о вложении многообразий в конечномерное евклидово пространство (с доказательством).

29. Римановы многообразия. Индуцированная риманова метрика на подмногообразии. Примеры индуцированных метрик.

30. Примеры двумерных многообразий (склейки из плоских многоугольников). Теорема классификации двумерных компактных замкнутых многообразий (с доказательством).

31. Первая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма. Ее явный вид для графика функции.

32. Инварианты пары форм. Средняя и гауссовы кривизны. Главные направления и главные кривизны. Теорема об ортогональности главных направлений гиперповерхности.

33. Кривые на поверхности. Нормальные сечения. Теорема об отношении первой и второй квадратичной форм. Формула Менье.

34. Теорема о совпадении собственных чисел пары форм с главными кривизнами. Формула Эйлера.

35. Средняя и гауссовы кривизны для двумерных поверхностей. Примеры поверхностей постоянной гауссовой кривизны (положительной, нулевой, отрицательной).

36. Минимальные поверхности. Мыльные пленки, формулировка теоремы Пуассона–Лапласа о границе раздела двух сред (без доказательства). Уравнение минимальной поверхности. Примеры.

37. Гармонические и минимальные поверхности. Гармоничность минимальной поверхности в конформных координатах.

38. Комплексное пространство. Длина кривой. Связь переменных z и $\bar{z}$ с вещественными координатами. Операторы d/dz и $d/d\bar{z}$. Формулировка комплексного варианта теоремы о неявных функциях.

39. Алгебраические функции и их римановы поверхности. Алгебраическая функция $w = \sqrt{P(z)}$, где полином P не имеет кратных корней.

40. Многозначность алгебраических функций. Римановы поверхности как области однозначности алгебраических функций. Ветви, точки ветвления. Примеры.

41. Склейка римановой поверхности из нескольких листов. Риманова поверхность для алгебраической функции $w = \sqrt{P(z)}$.