Лектор академик А.Т.ФОМЕНКО
Вопросы по курсу **"Дифференциальная геометрия и топология"**
для студентов математиков 3-го курса (осень 2008 г.)

1. Тензор как полилинейное отображение. Тензорное поле на многообразии. Примеры тензорных полей из механики: тензор деформации сплошной среды, тензор напряжений, закон Гука. Алгебраические операции над тензорными полями.
2. Симметричные и кососимметричные тензорные поля. Кососимметрические тензоры максимального ранга. Их связь с римановым объемом на многообразии.
3. Внешние дифференциальные формы. Внешнее умножение форм.
4. Внешнее дифференцирование внешних форм. Замкнутые и точные формы. Группы когомологий многообразия. Примеры вычисления.
5. Векторные поля и замкнутые, точные формы. Лемма Пуанкаре для случая плоскости. Бездивергентные и потенциальные потоки жидкости. Дивергенция и изменение объема области.
6. Операция "звездочка" на формах в евклидовом пространстве и ее свойства. Примеры операции "звездочка" на плоскости и в пространстве.
7. Интеграл внешней формы по подмногообразию (по поверхности). Ориентация, индуцируемая на краю многообразия. Формулировка теоремы Стокса.
8. Доказательство теоремы Стокса.
9. Частные случаи формулы Стокса на плоскости и в трехмерном пространстве (Гаусс, Грин, Остроградский). Следствие из теоремы Стокса: теорема Коши о вычетах.
10. Введение ковариантного дифференцирования (связности) в криволинейных координатах в евклидовом пространстве. Появление символов Кристоффеля.
11. Вычисление явного вида операции "набла" (связности) на векторах, ковекторах и линейных операторах в криволинейных координатах в евклидовом пространстве.
12. Общее определение аффинной связности = ковариантного дифференцирования на гладком многообразии. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности.
13. Алгебраические свойства ковариантного дифференцирования.
14. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности.
15. Параллельный перенос в аффинной связности. Уравнение параллельного переноса. Геодезические. Формулировка теоремы об общих свойствах геодезических на римановом многообразии.
16. Параллельный перенос в римановой связности. Перенос вдоль геодезических. Двумерный случай.
17. Параллельный перенос и геодезические на плоскости, конусе, сфере, плоскости Лобачевского, на торе.
18. Теорема об оценке сверху размерности группы изометрий риманова многообразия. Следствие: описание групп изометрий плоскости, сферы, плоскости Лобаческого.
19. Тензор кривизны Римана. Координатное и инвариантное определения. Их эквивалентность.
20. Алгебраические свойства тензора кривизны (теорема о симметриях тензора кривизны). Тензор Риччи, скалярная кривизна. Пример из физики: уравнения Эйнштейна.
21. Теорема о скалярной кривизне двумерной поверхности и гауссовой кривизне.
22. Критические и регулярные значения гладкого отображения. Теорема Сарда (без доказательства). Степень гладкого отображения. Гладкая гомотопия.
23. Теорема об инвариантности степени гладкого отображения многообразий при гомотопии и независимость степени от выбора регулярной точки.
24. Примеры вычисления степени. Теорема алгебры о корнях полинома. Теорема Брауэра.
25. Степень отображения и интегралы от внешних форм максимальной степени (теорема об отображении форм максимальной степени). Степень гауссова отображения.
26. Интеграл от гауссовой кривизны по замкнутой поверхности. Связь с родом поверхности (теорема Гаусса—Бонне).
27. Индекс векторного поля и степень отображения. Вычисление индексов векторных полей. Индекс векторного поля в ограниченной области евклидова пространства.
28. Теорема о существовании нуля гладкого векторного поля на двумерной сфере.
29. Вариационные принципы. Функционалы, их экстремали и уравнения Эйлера—Лагранжа. Примеры из механики и физики.
30. Функционалы длины и действия кривой. Геодезические как экстремали функционалов длины и действия. Формулировка теоремы о геодезических, как о кратчайших.
31. Функционал площади двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Уравнения Эйлера и теорема об экстремальности минимальных поверхностей для функционала площади.
32. Функции Морса. Теорема о существовании функции Морса на гладком многообразии (доказательство в частном случае).