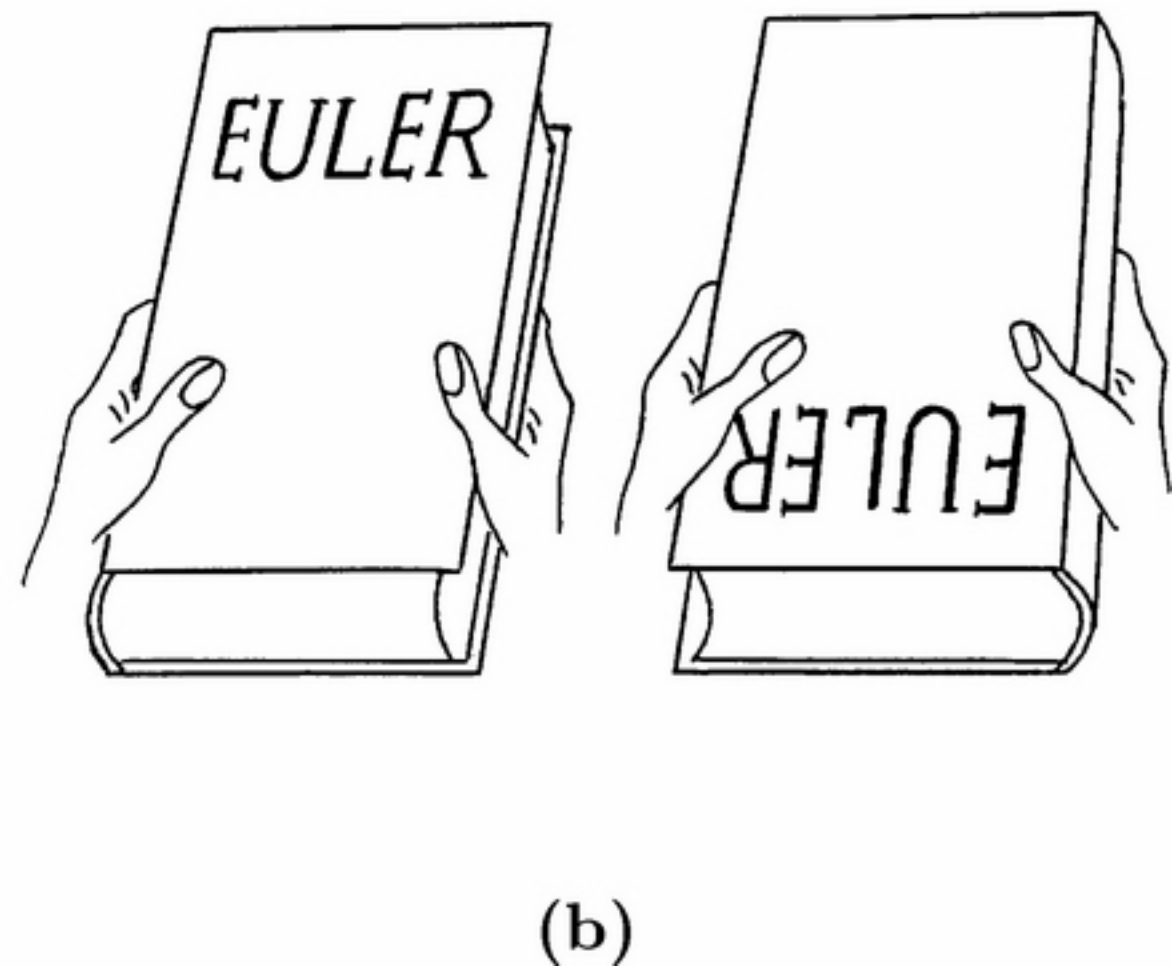
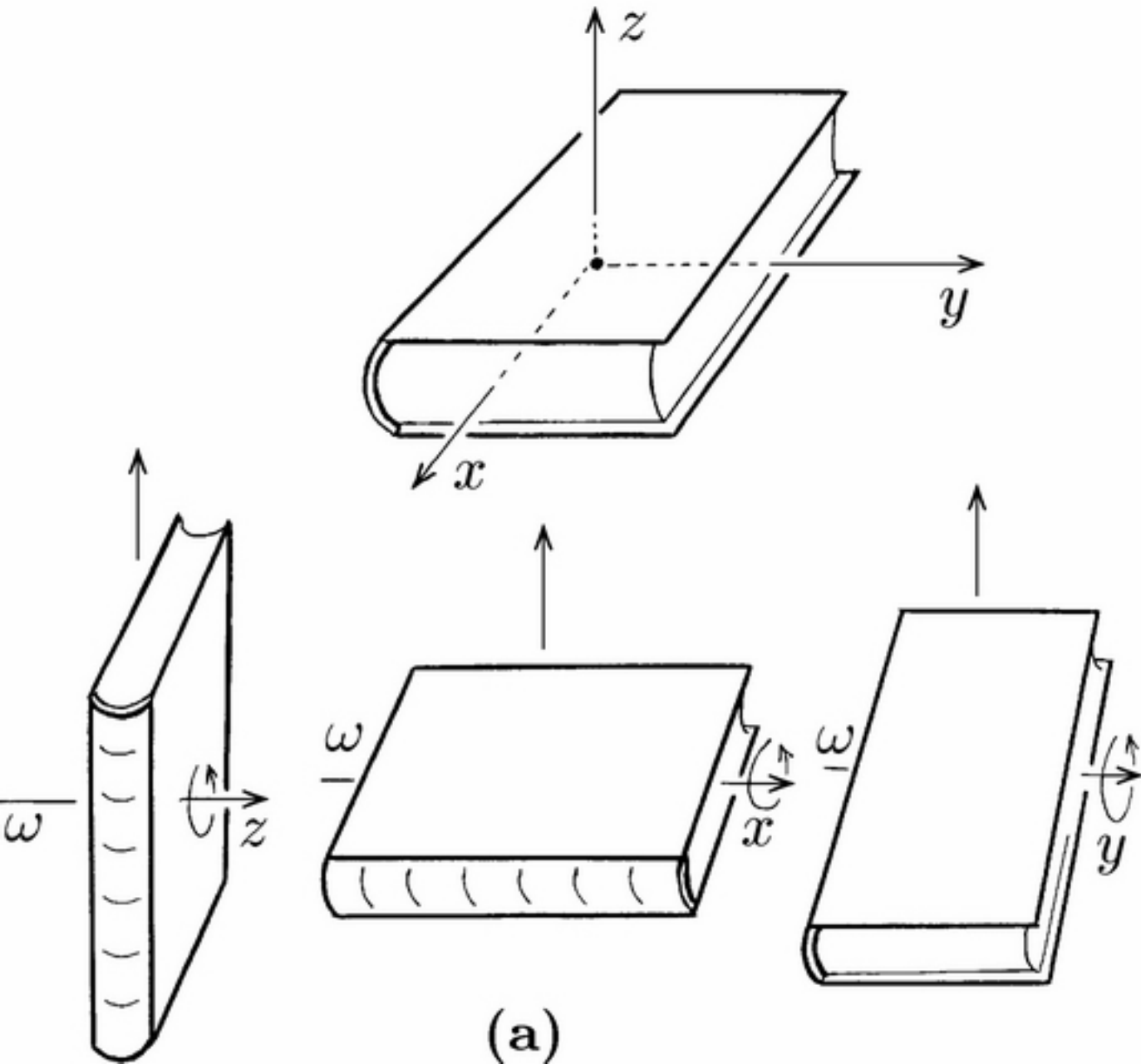
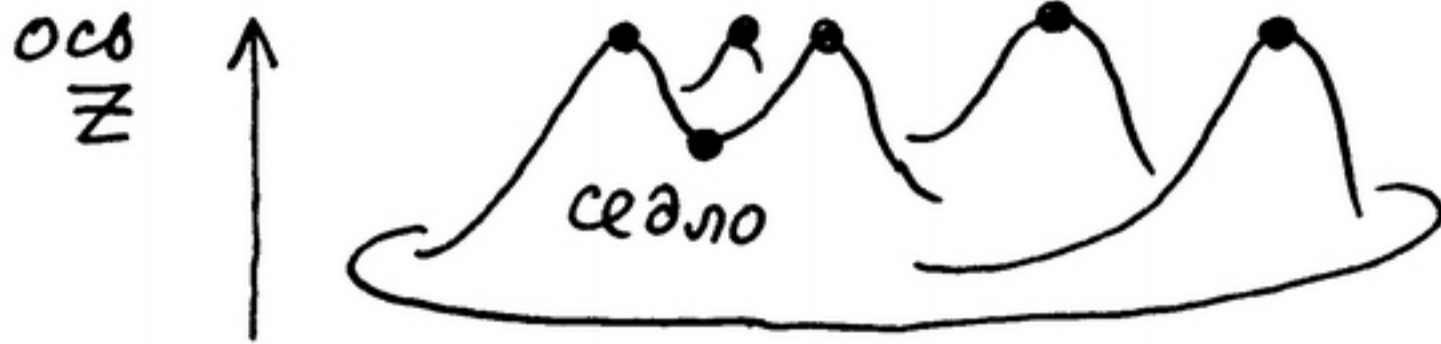




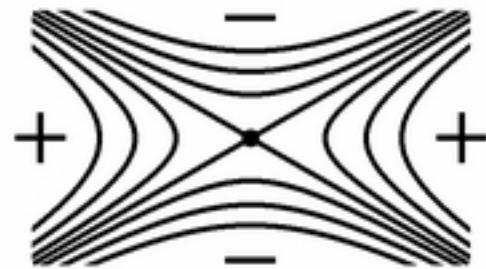
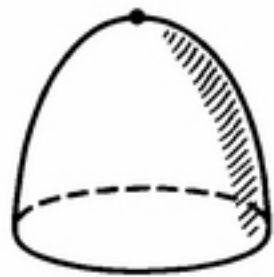
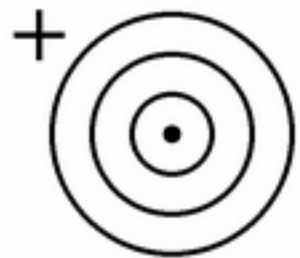
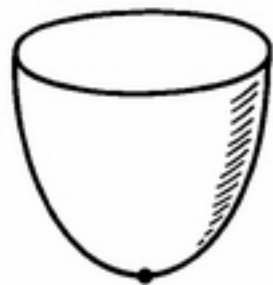
- Метод Максвелла. Восстановление рельефа по критическим точкам функции высоты (попарное объединение локальных максимумов и седел.

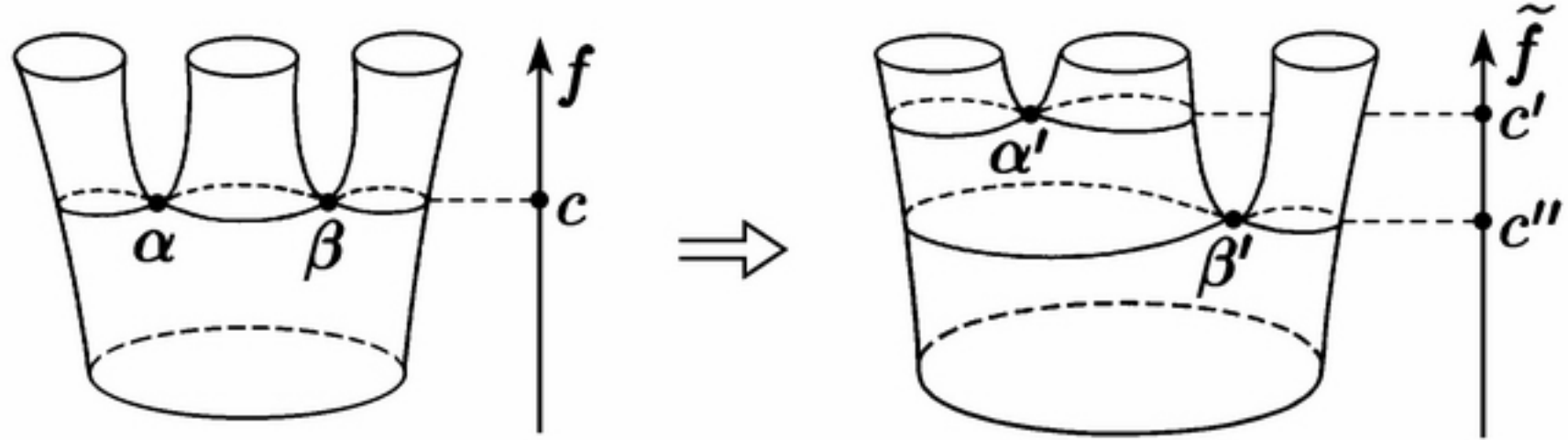


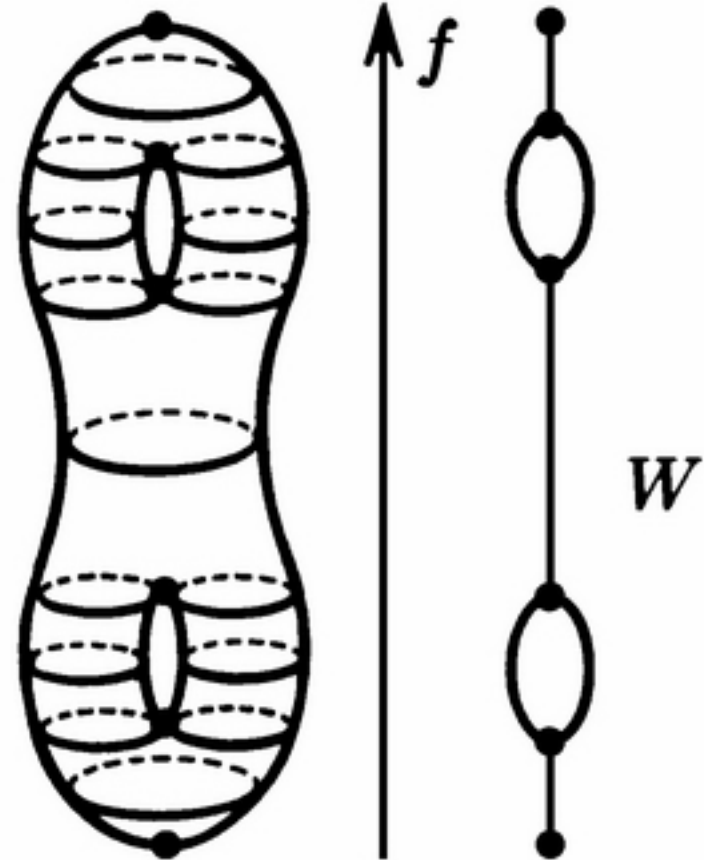
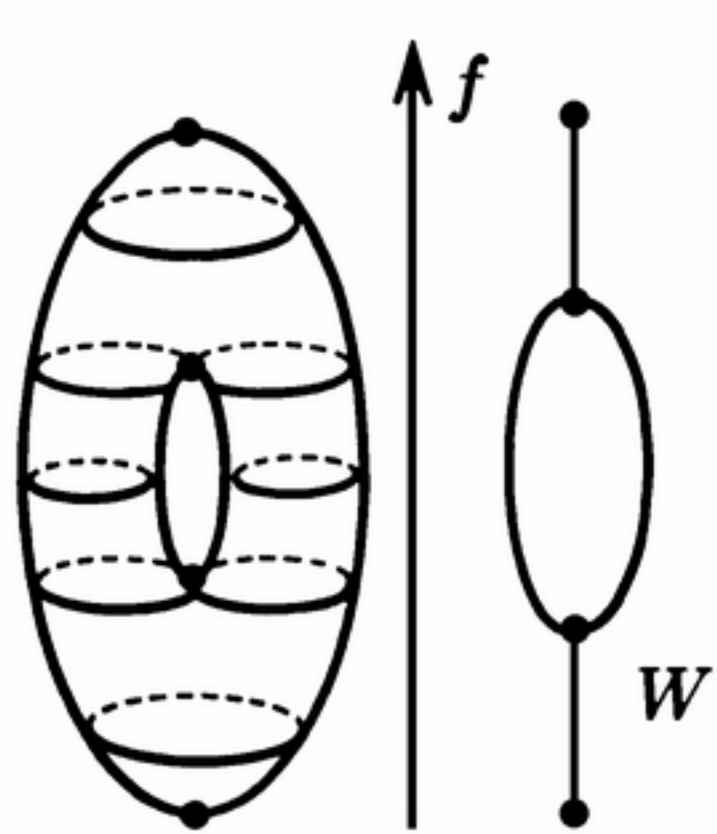
- Теория Морса: восстановление топологии многооб-

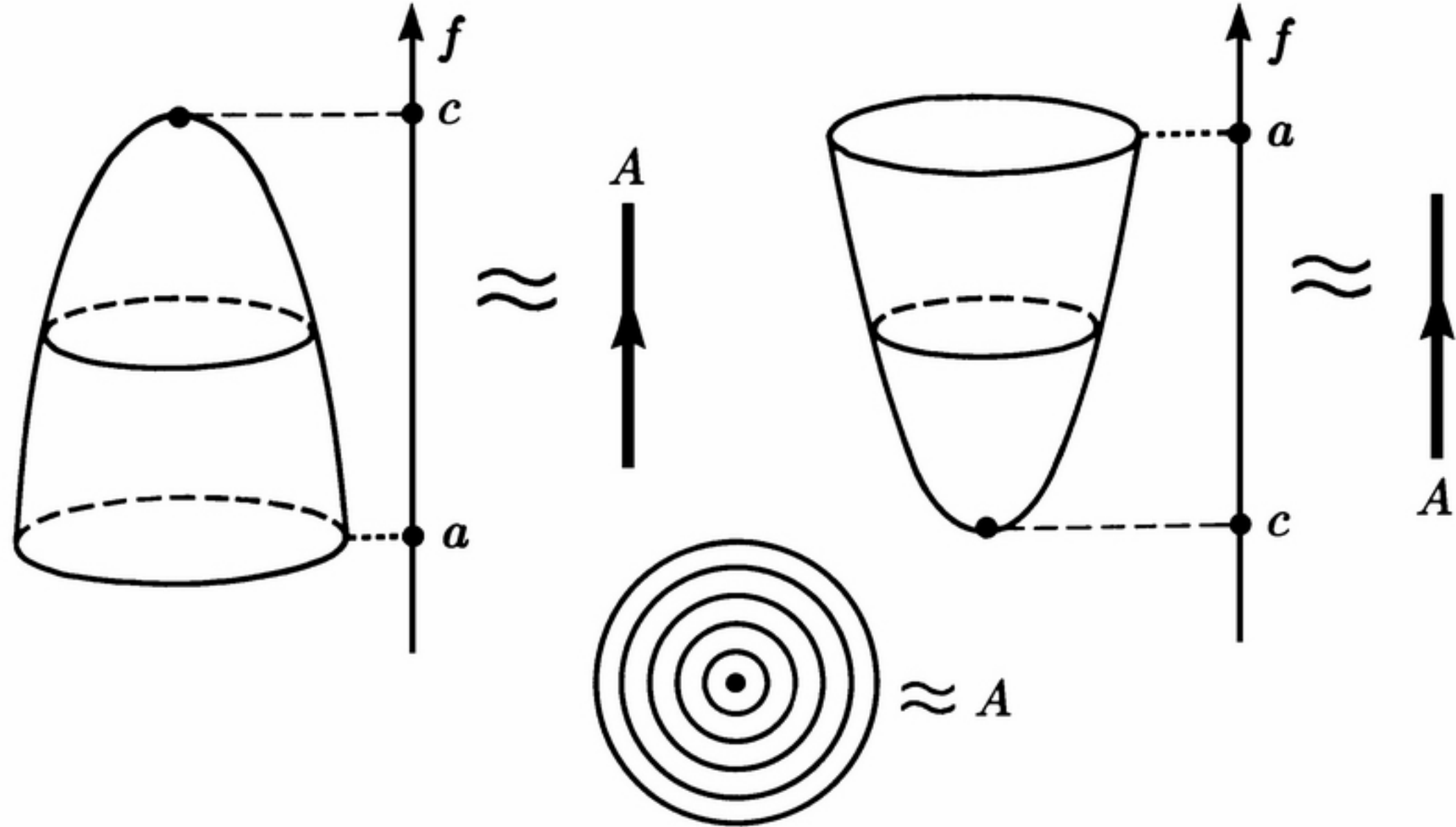
разия по информации о критических точках функции Морса, заданной на многообразии.

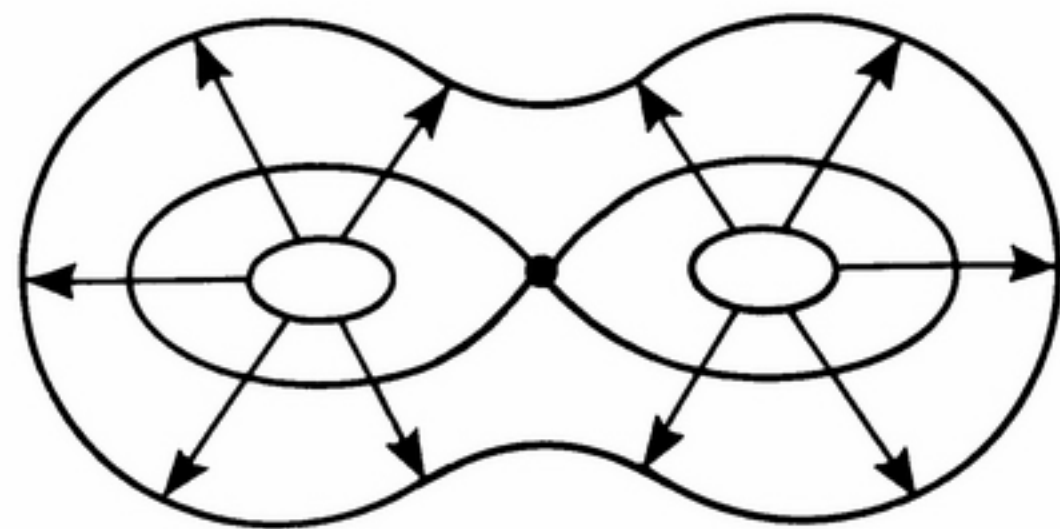
- Перестройки линий уровня функций при изменении ее значения (бифуркации).
- Кодирование бифуркаций = "атомы"
- предполагается, что все критические точки невырождены (d^2f - невырожден).



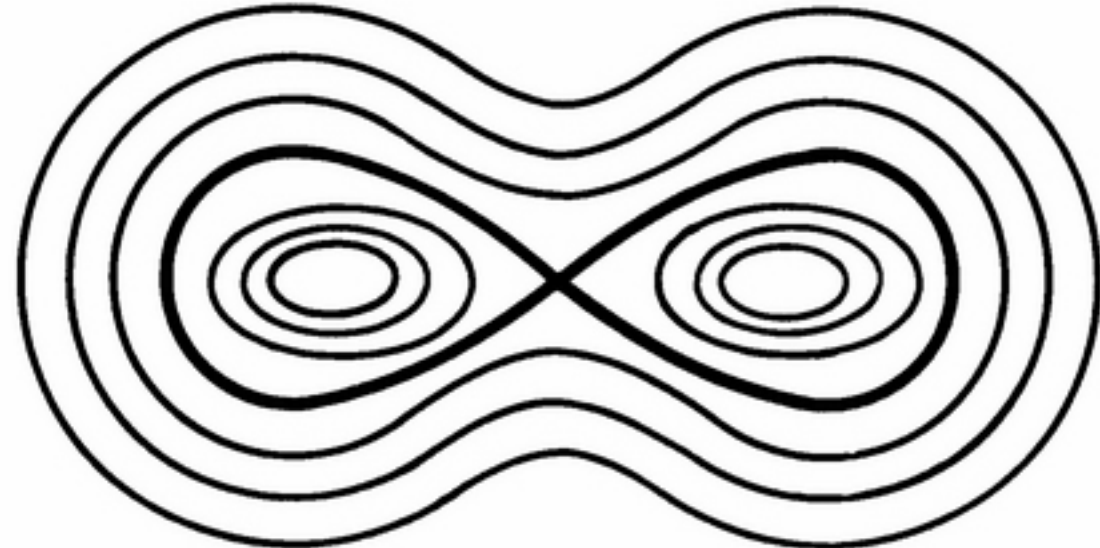


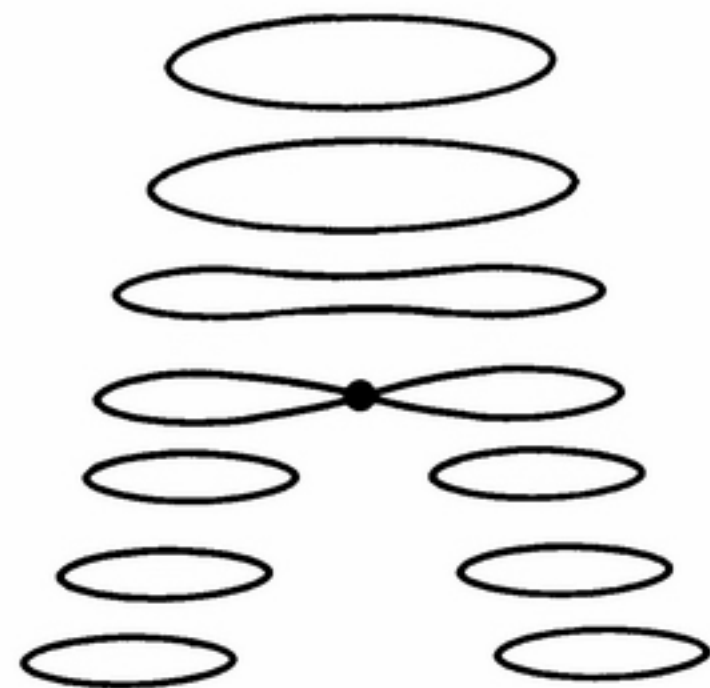
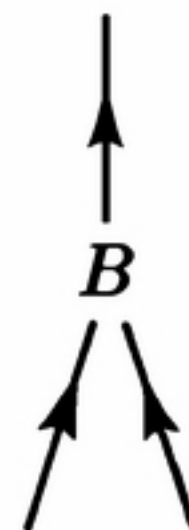
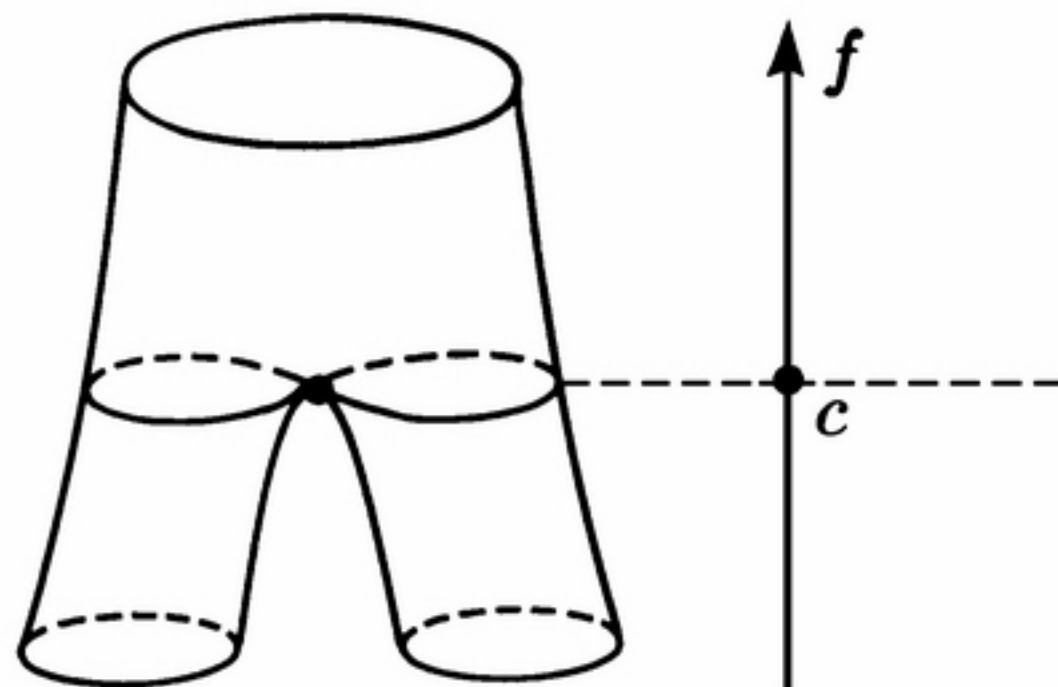
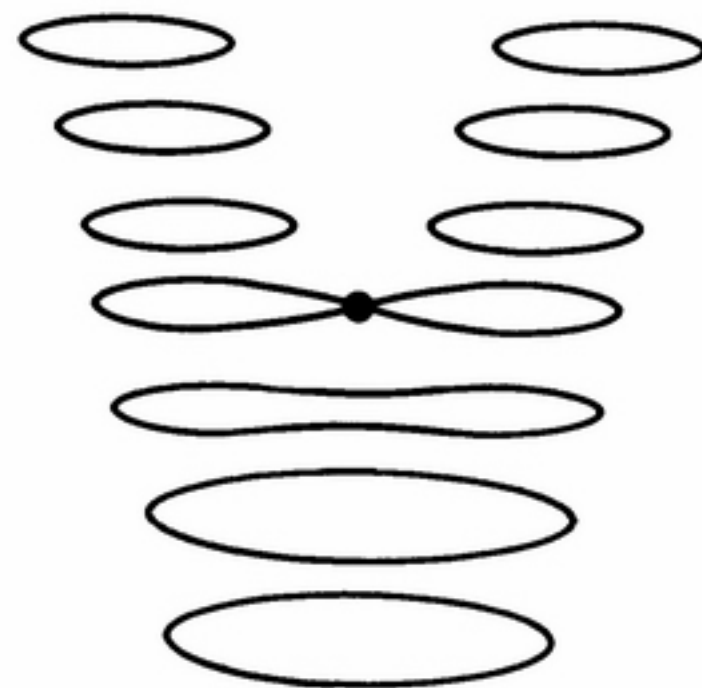
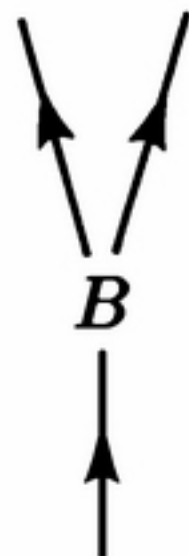
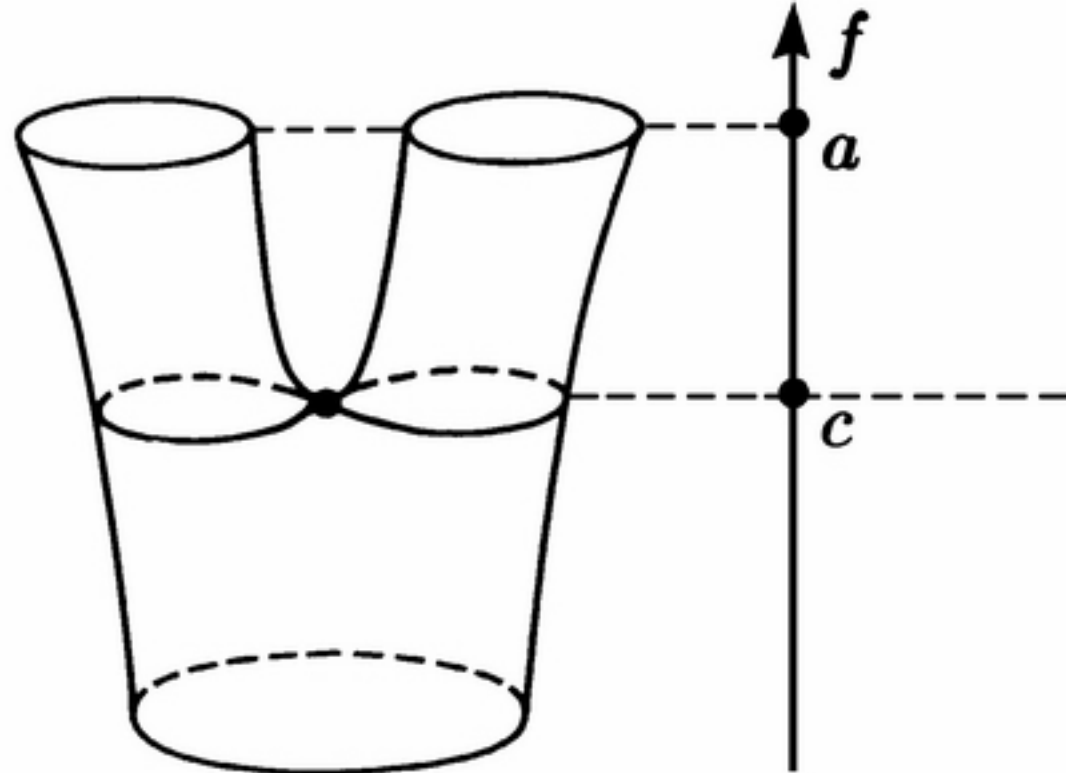


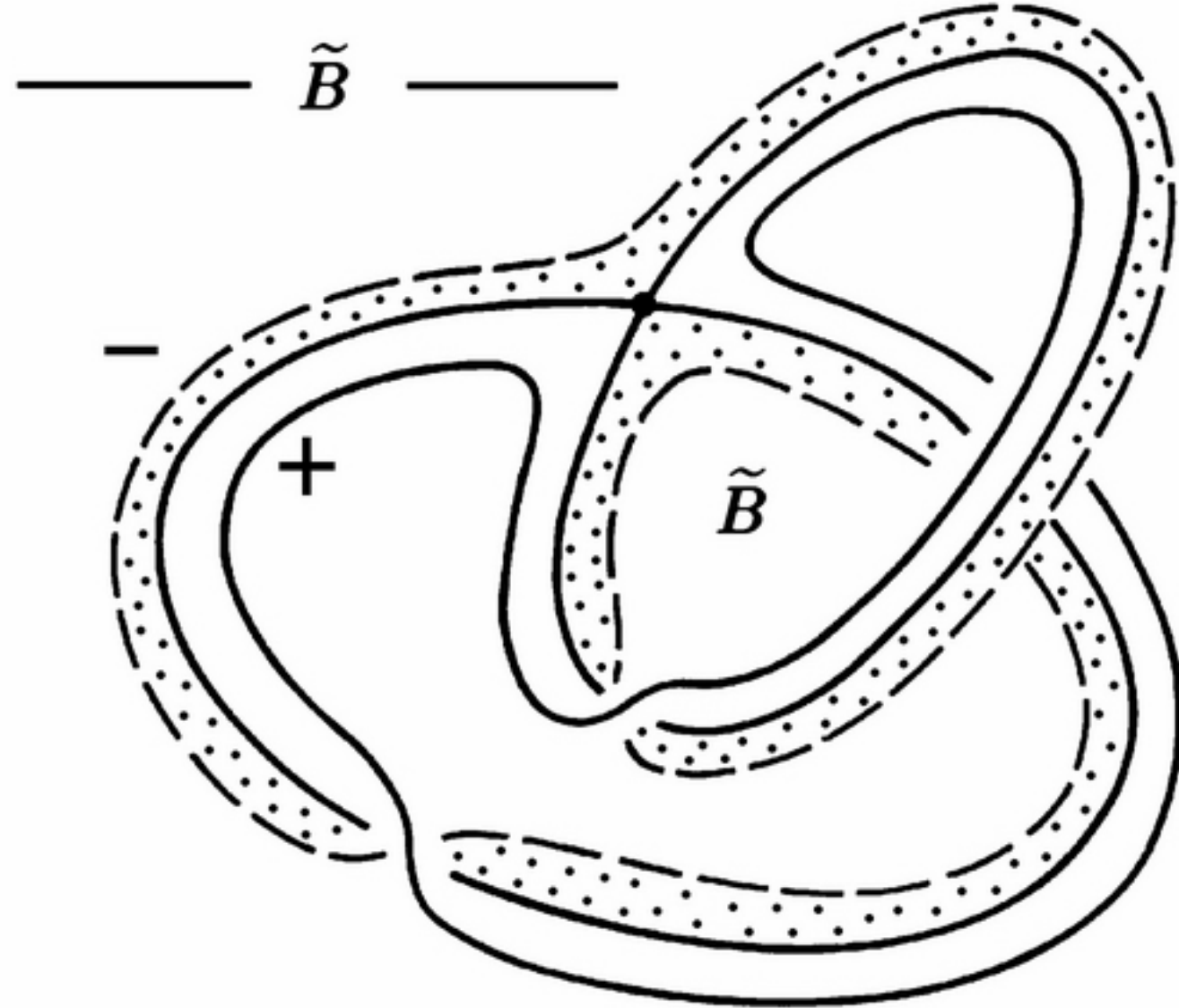


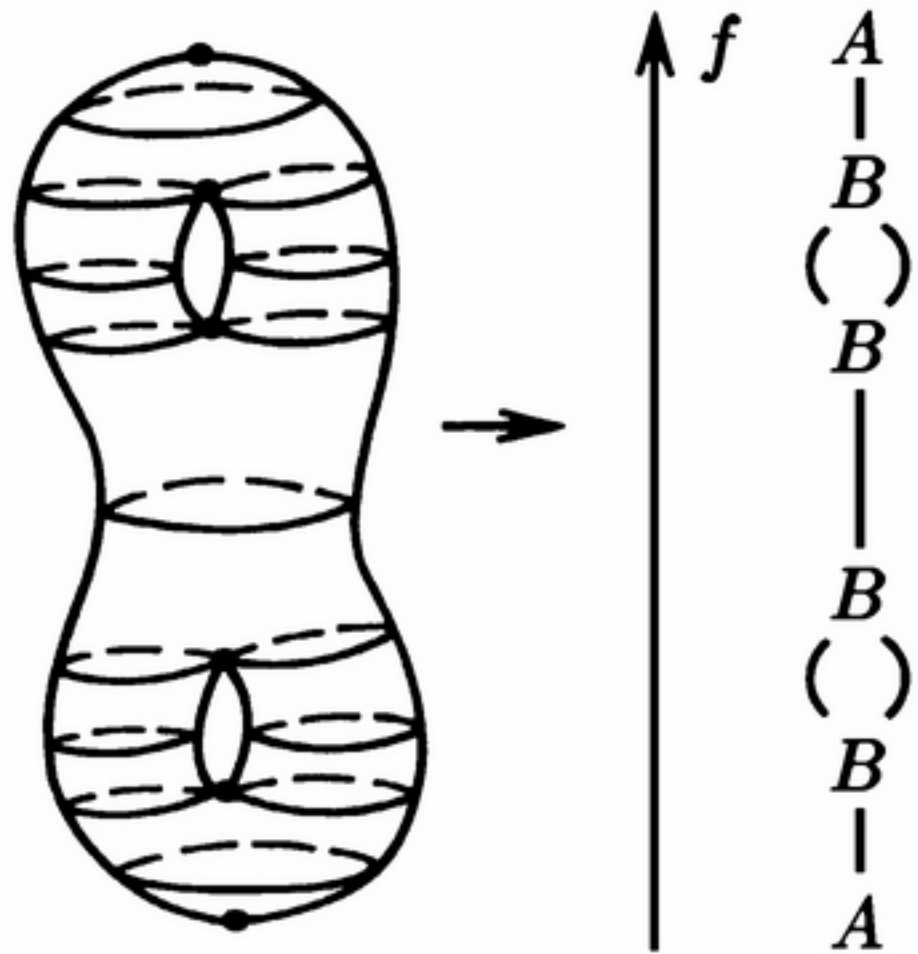


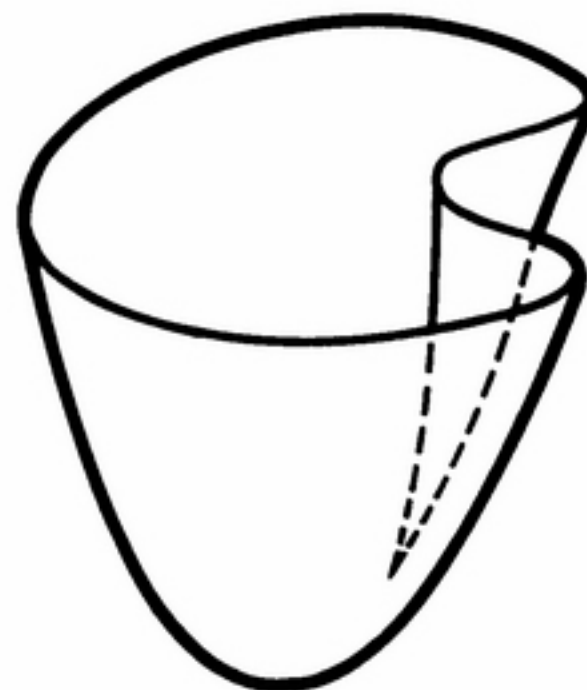
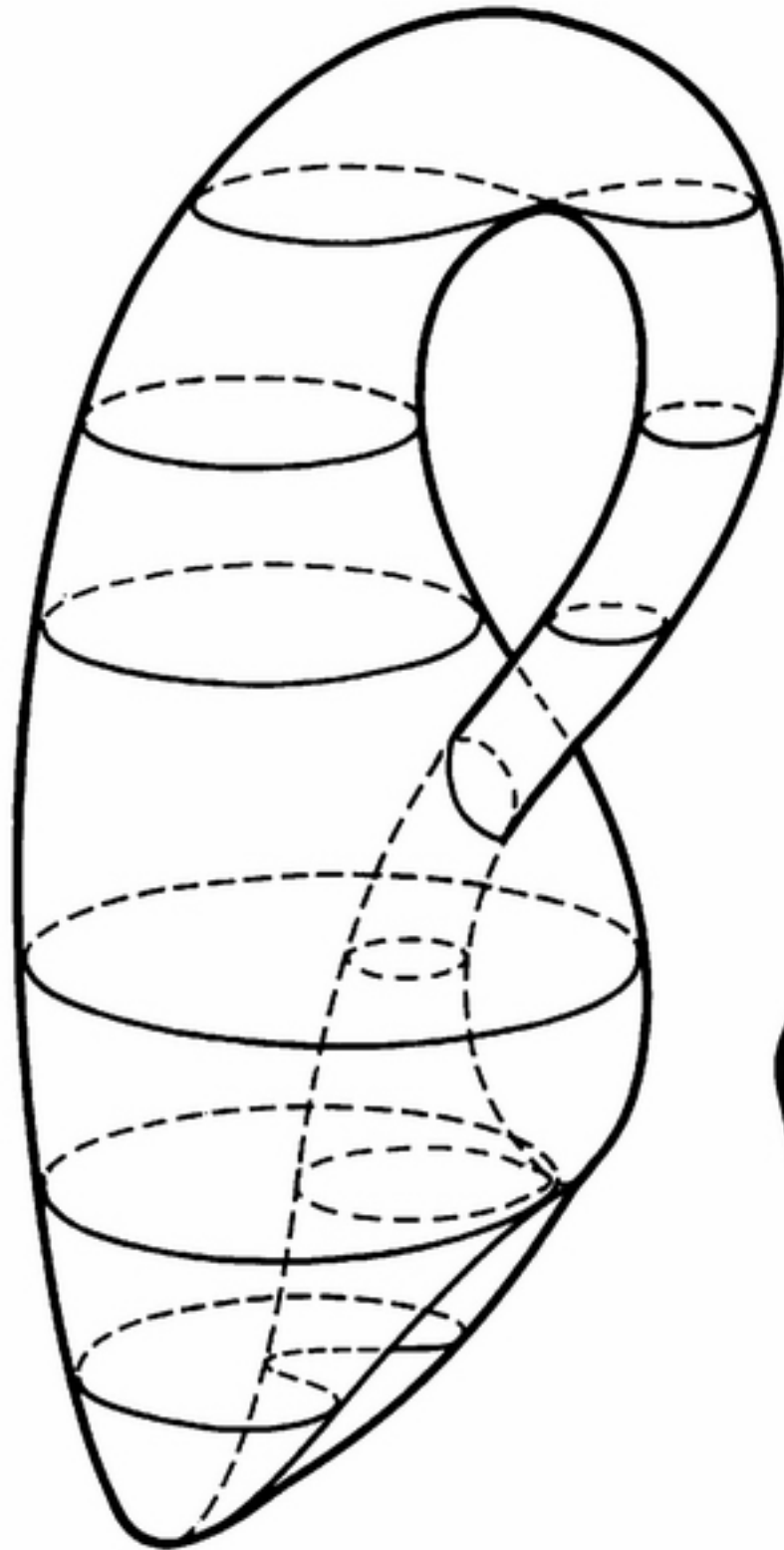
B



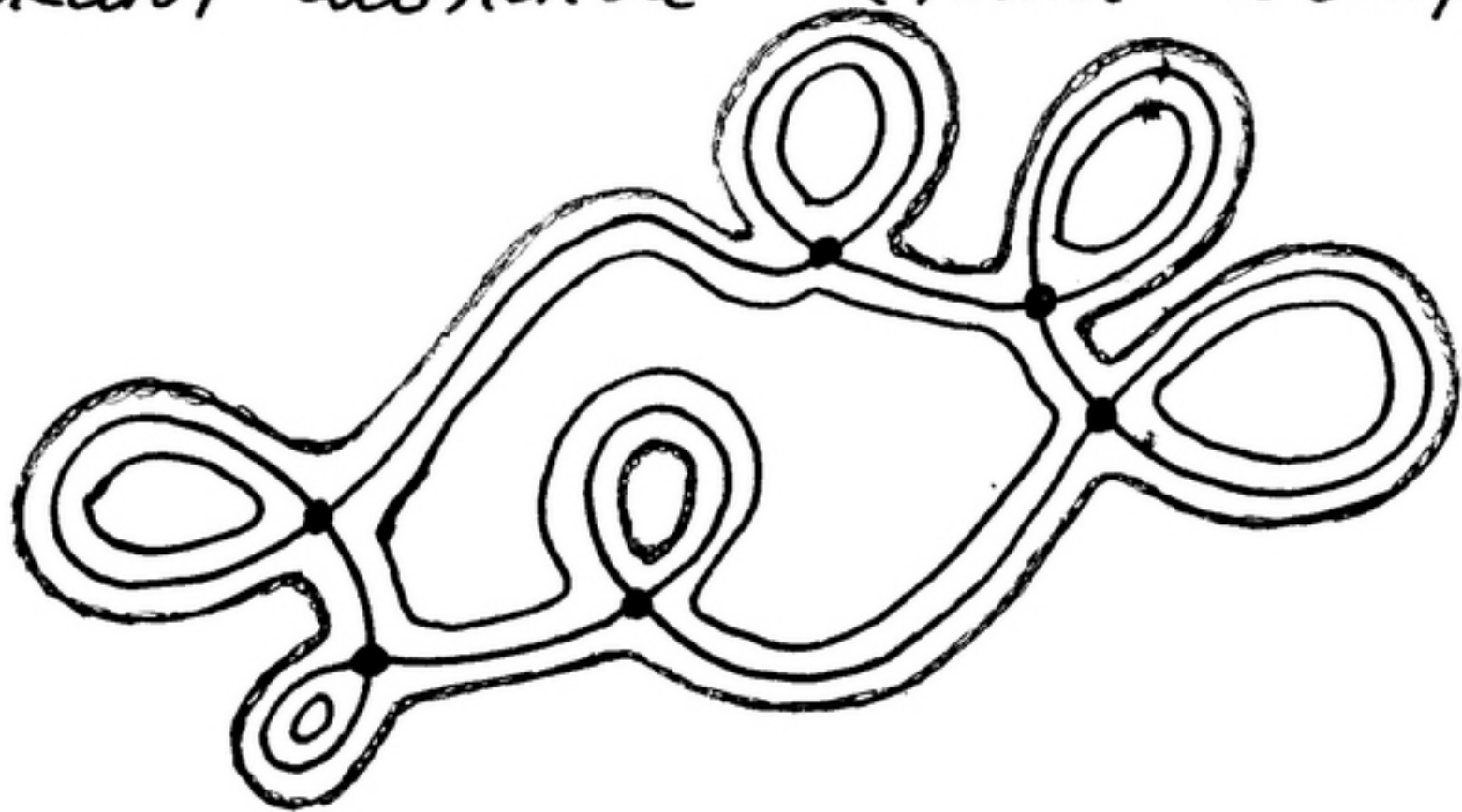


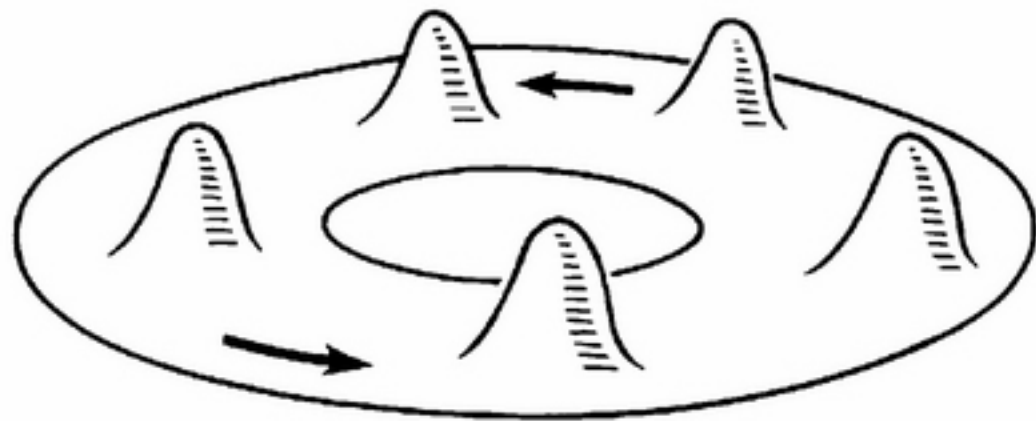




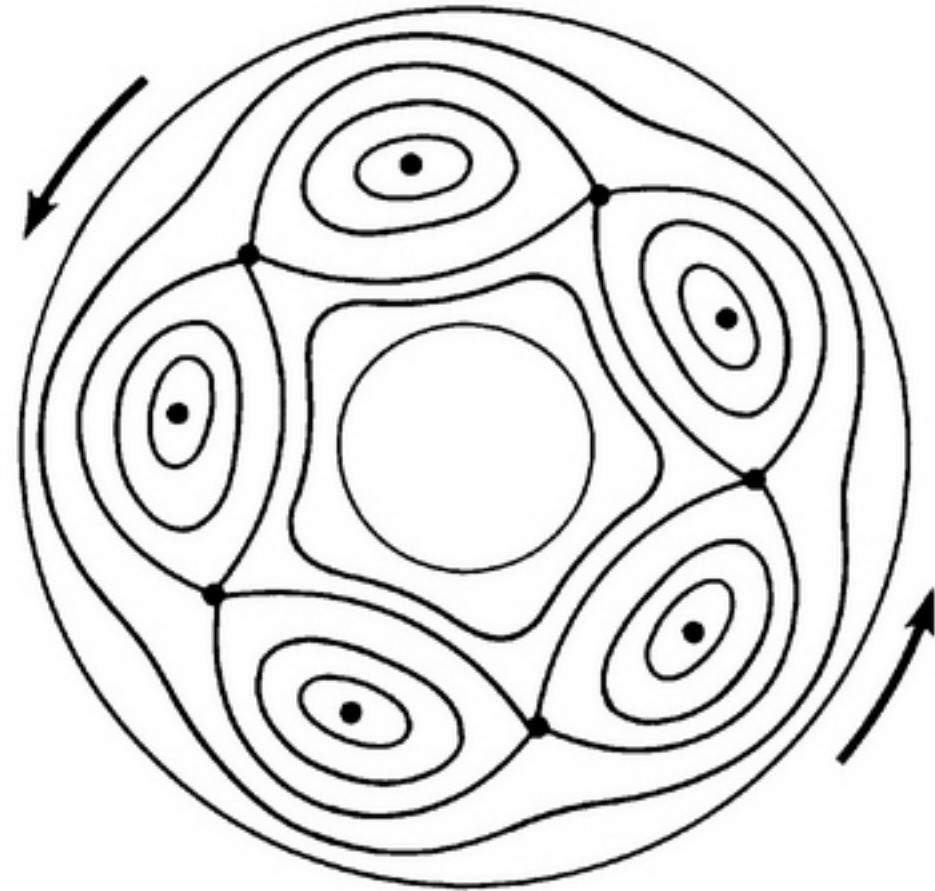


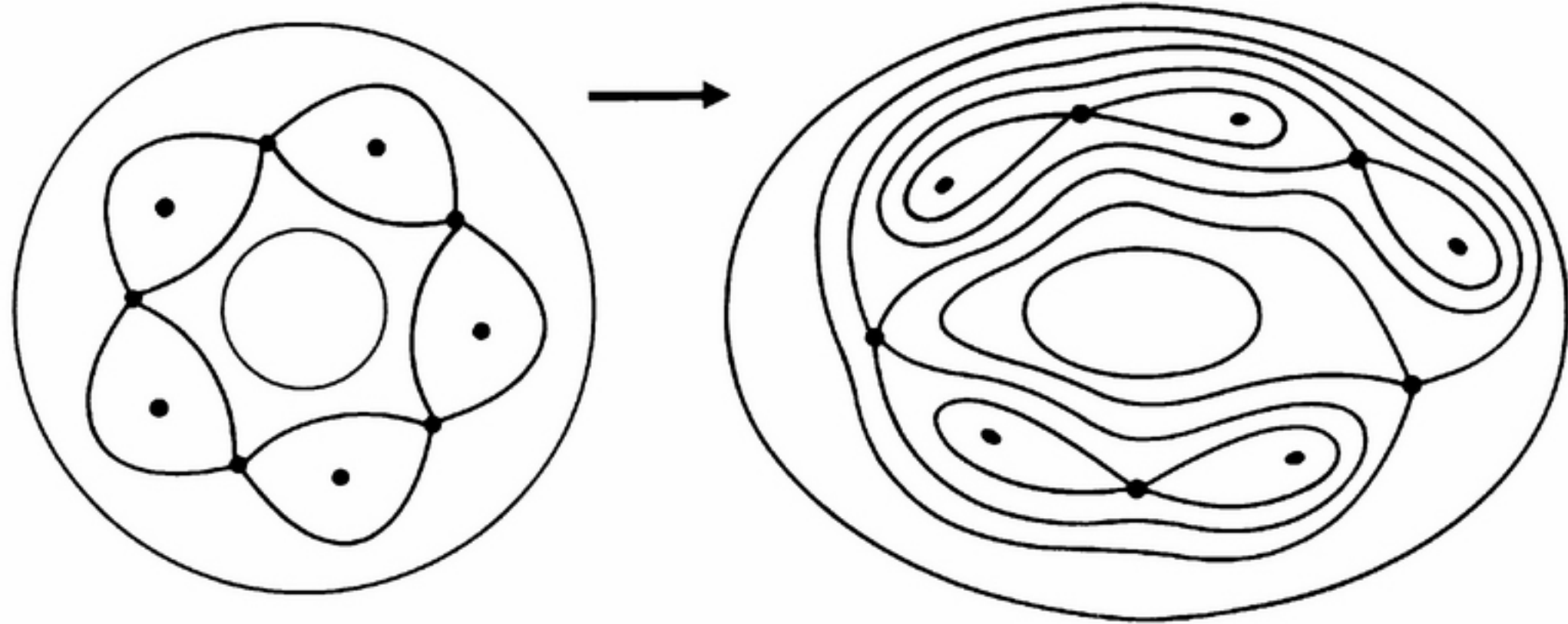
- 12
- Простые функции Морса: на $f^{-1}(c)$ лежит ровно одна особенность.
 - Сложные функции Морса: на $f^{-1}(c)$ лежит несколько особенностей.
 - Возникают сложные "атоми" = деформации.

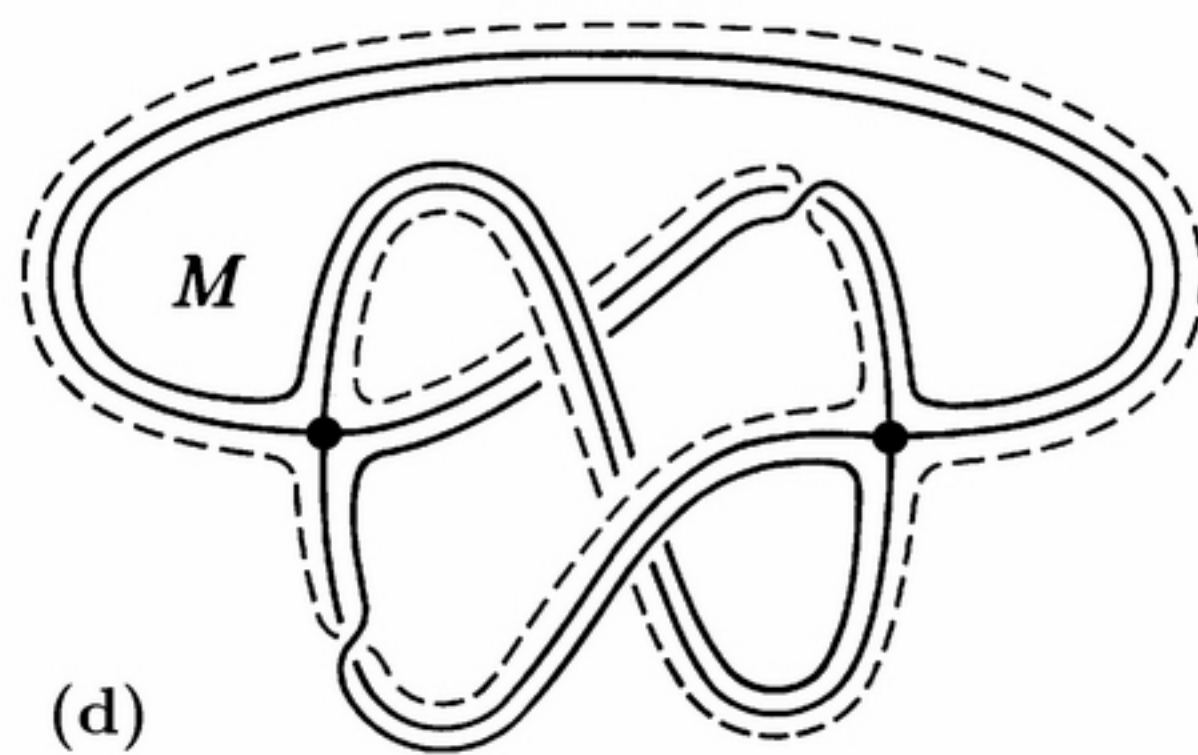
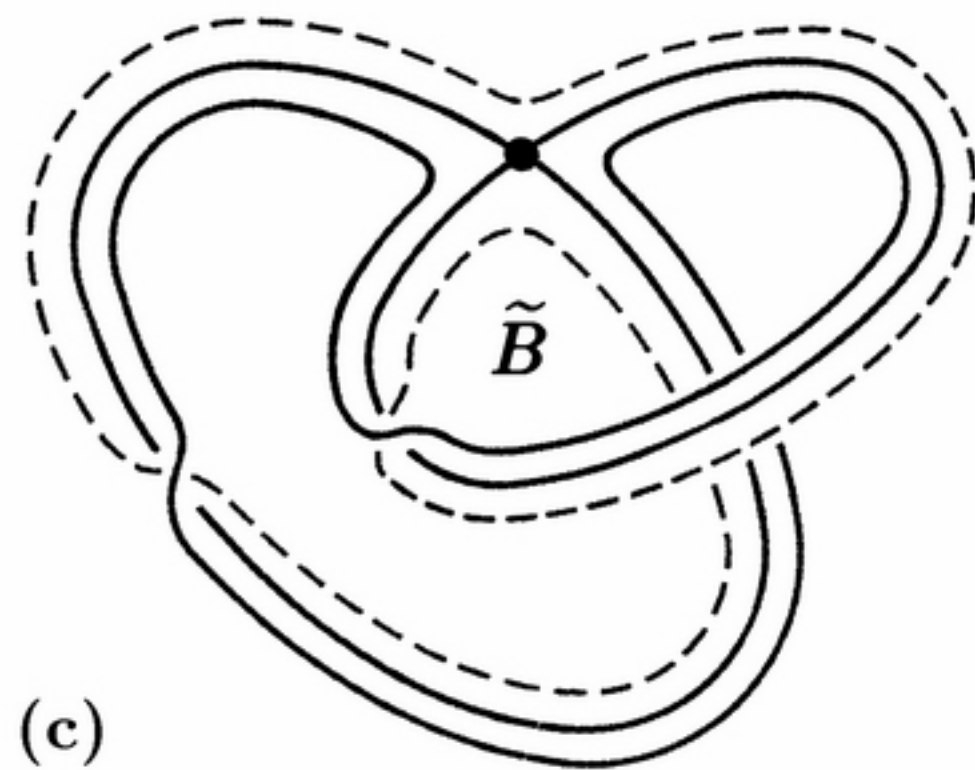
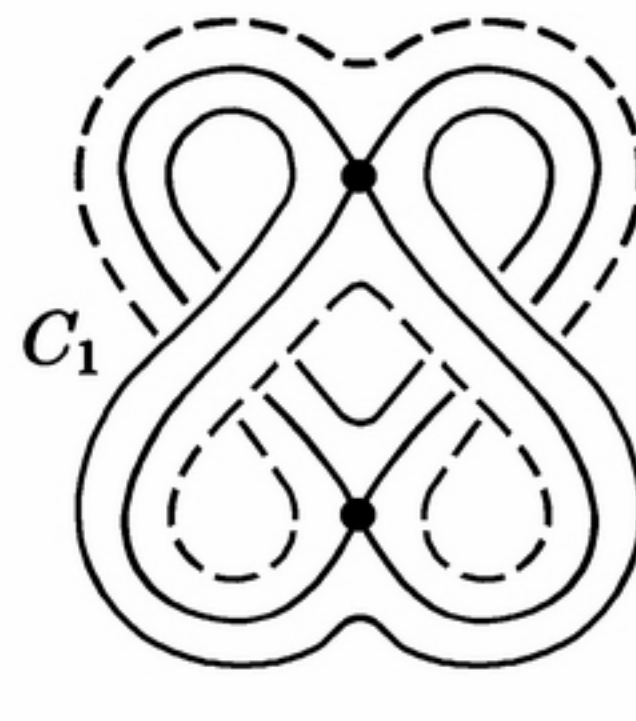
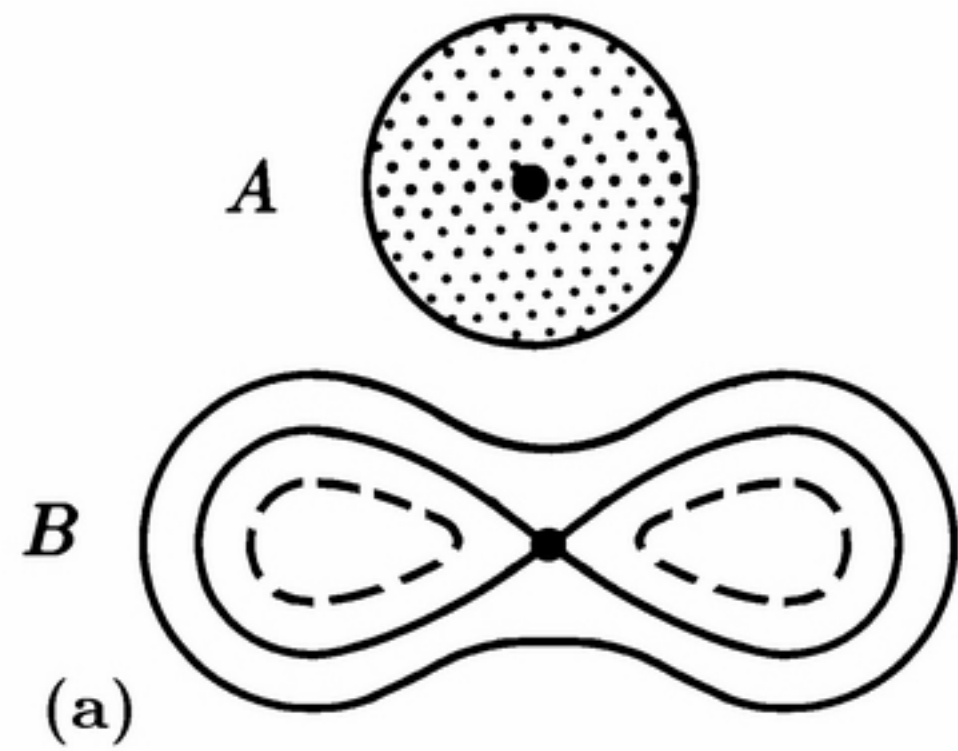


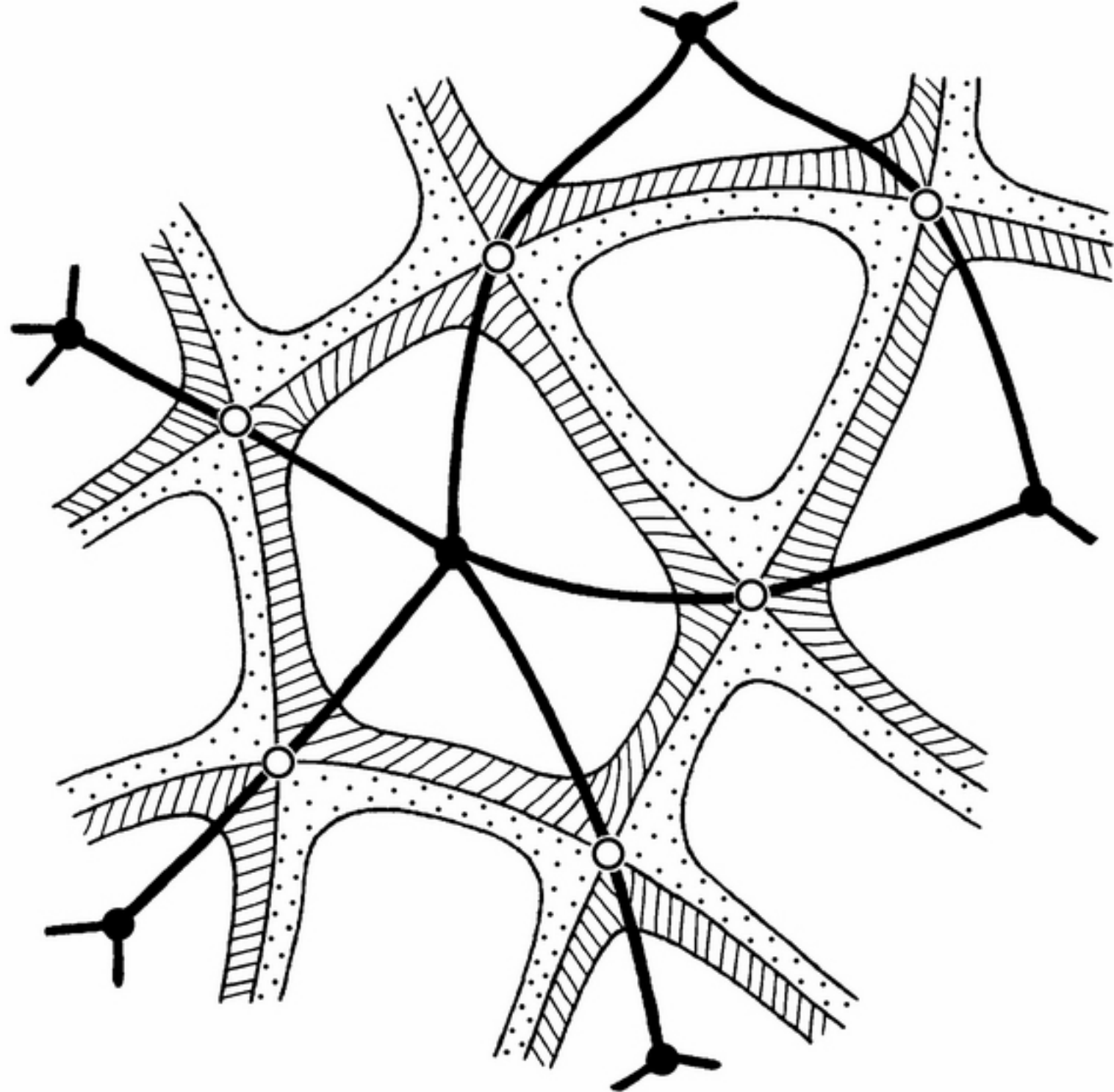


Symmetry

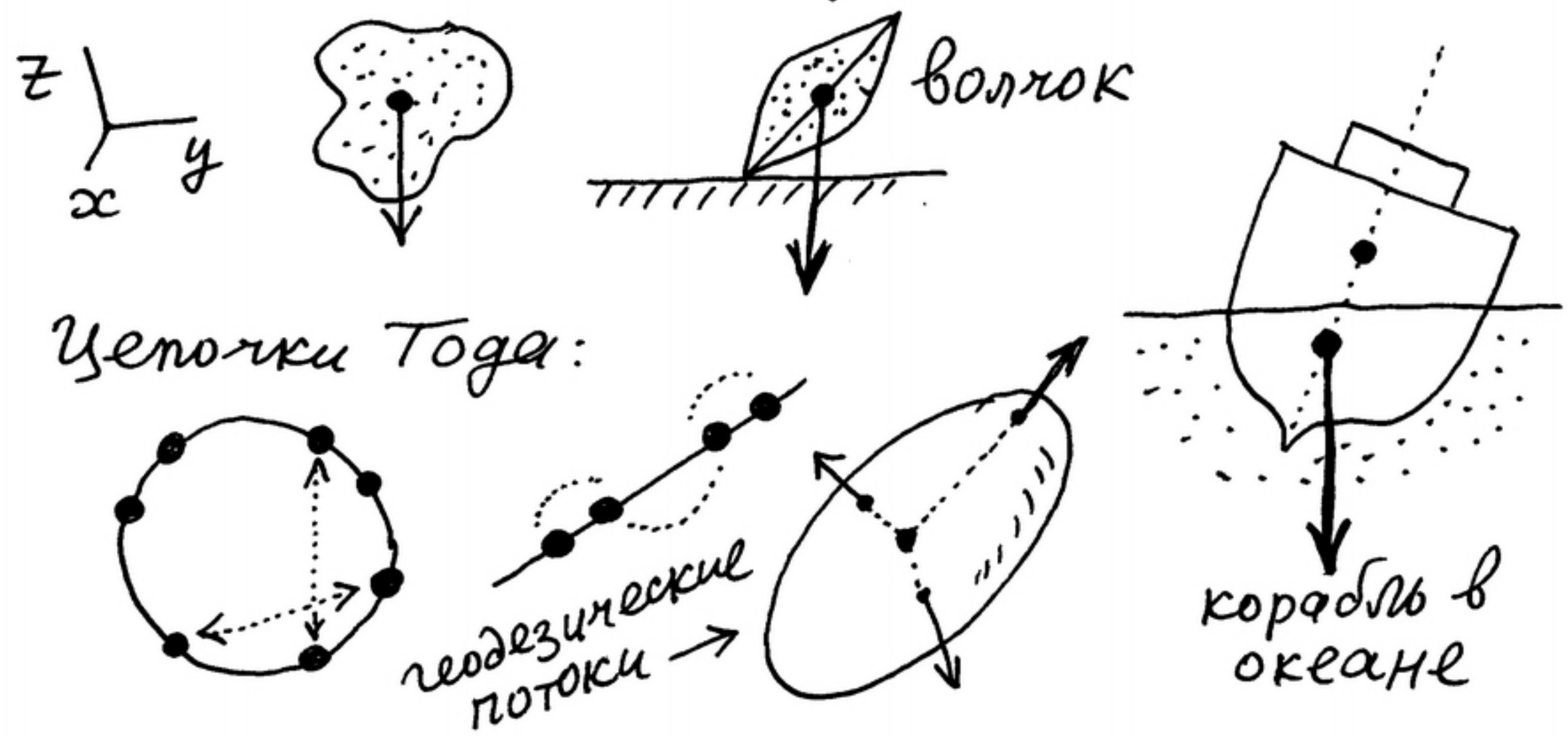








- "Атомы" были обнаружены в теории гамильтоновых динам. ур-й, в физике, механике, симплектической геометрии.
- Гамильтонова система ур-й: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$
- Примеры: динамика тяжелого твердого тела в $\mathbb{R}^3$, в различных средах.

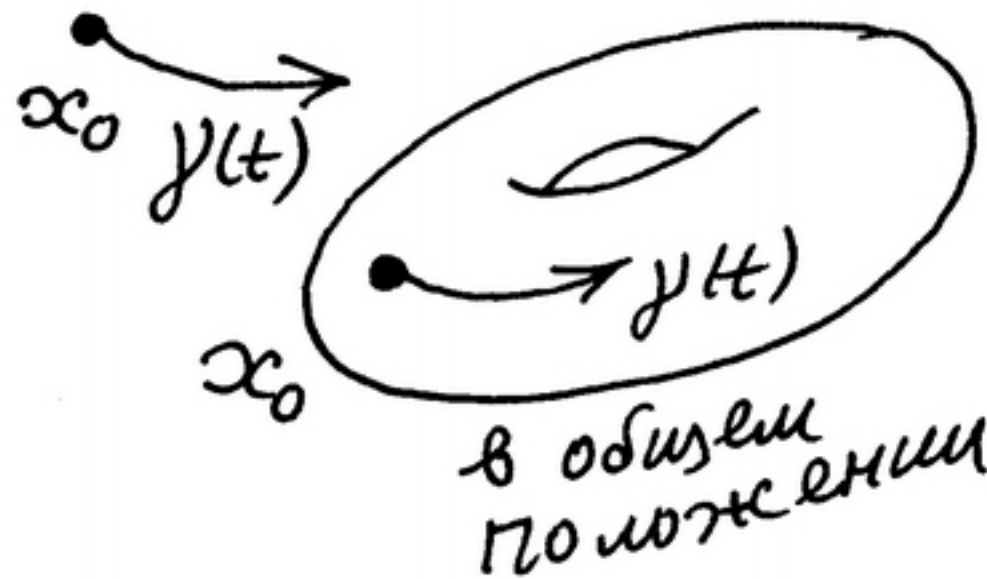


- Проблема качественного (геометрического) описания решений гамильтоновых ур-и весьма сложна.
- Завно открыт класс систем, допускающих такое описание. Это — системы, обладающие достаточно богатыми симметриями.
- Скобка Пуассона: $(x) = (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_j}$$

 инволютивность: $\{f, g\} \equiv 0$ в $\mathbb{R}^{2n}(p, q)$
- В общем случае: (M^{2n}, ω) , $d\omega = 0$, $\omega = \omega^{(2)}$ — гладкая кососимметрическая невырожденная 2-форма, замкнутая. M^{2n} — симплектическое многообразие
- Система "интегрируема по Лиувиллю", если:
 $\exists$ интегралы $f_1, \dots, f_n$, функц. незав. и $\{f_i, f_j\} = 0$ на M^{2n}

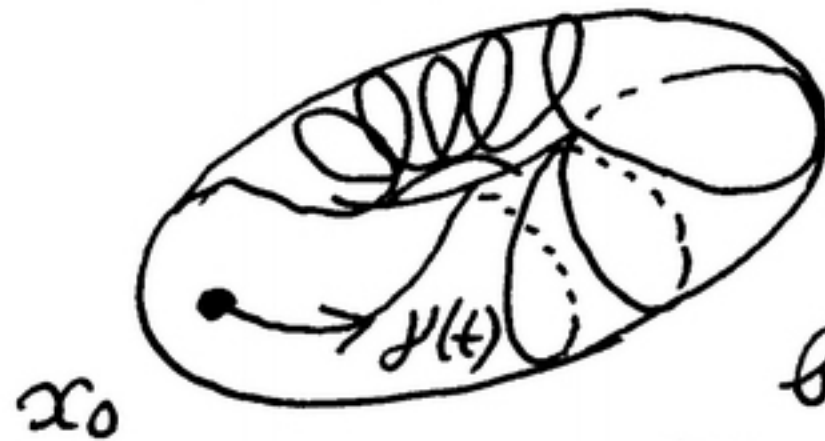
- 19
- "много симметрий". Тогда решения такой системы допускают замечательное геометрическое описание (теорема Пуанкаре). Пример: на M^4 .



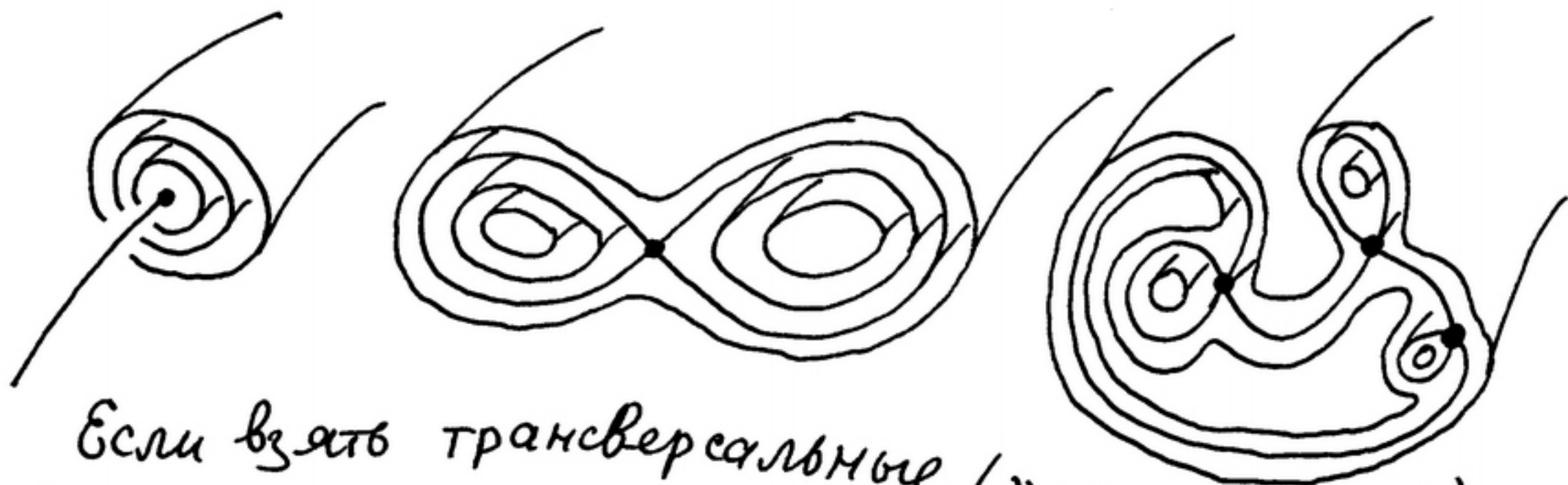
тор T^n ($T^2 \subset M^4$)
если M^{2n} компактно

$$\overline{y(t)} = T^n$$

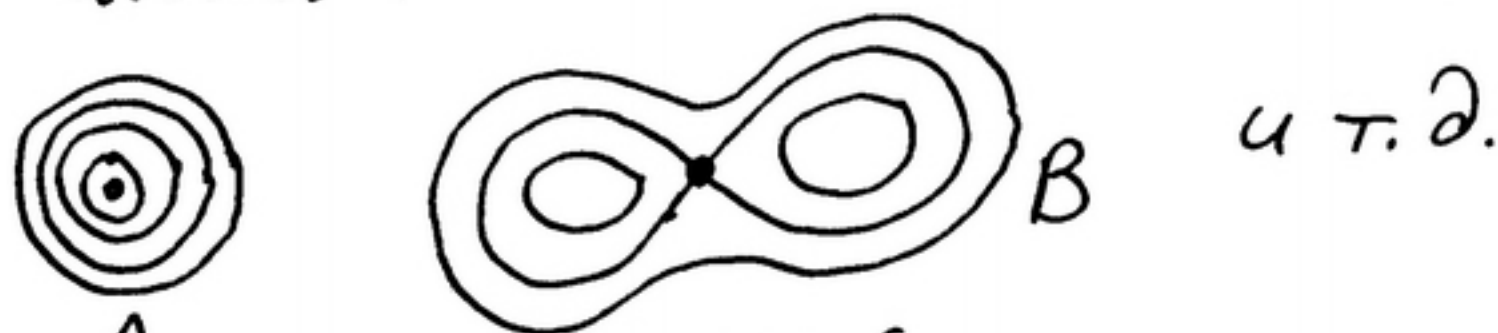
замыкание



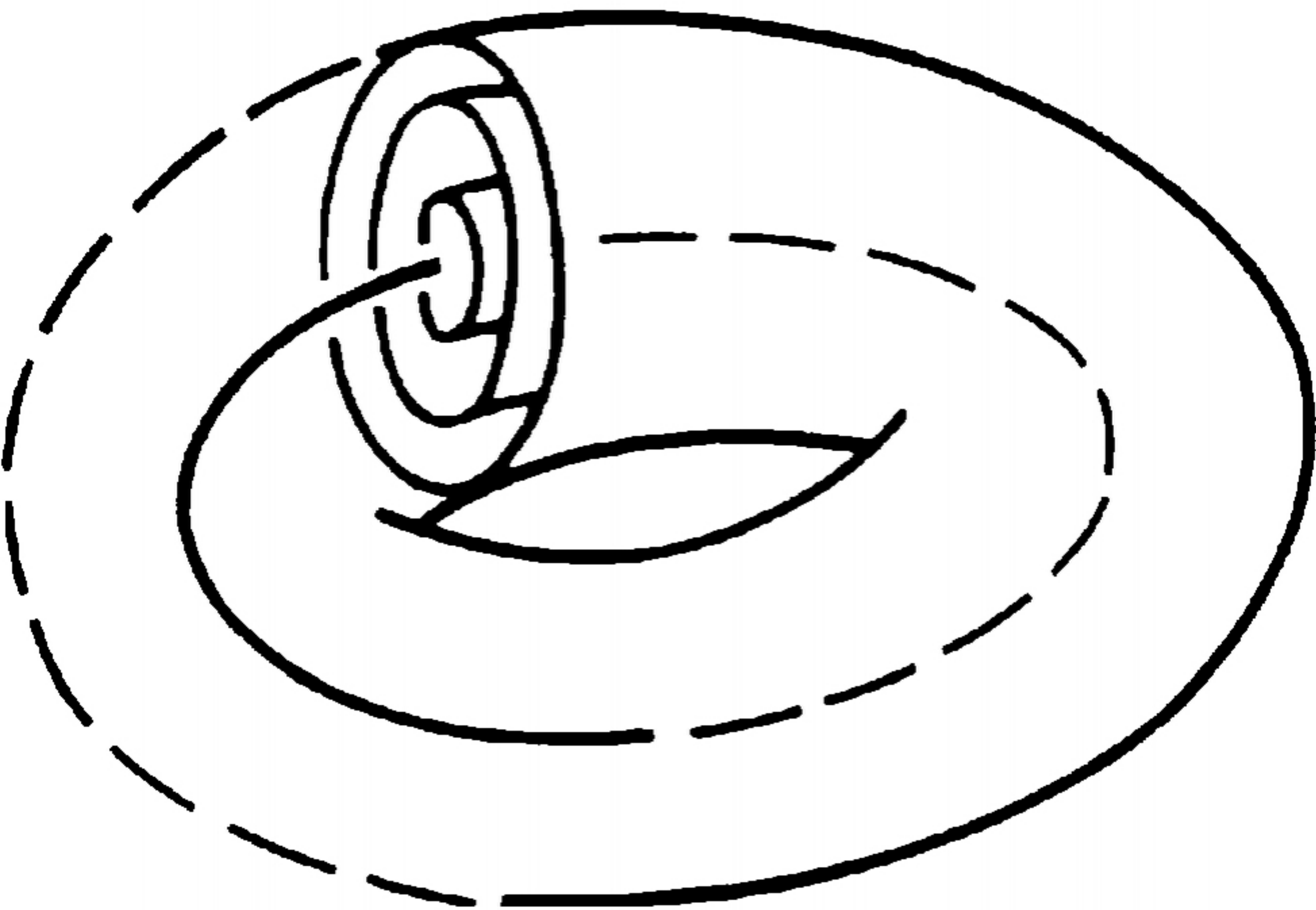
- Возникает слоение M^4 (M^{2n}) на 2-торы. Функция H - всегда интеграл системы, т.е. ее можно изобразить на 3-уровне ($H = \text{const}$) = $\mathbb{Q}^3$
- Оказывается, все такие слоения можно классифицировать и описать (наглядно).

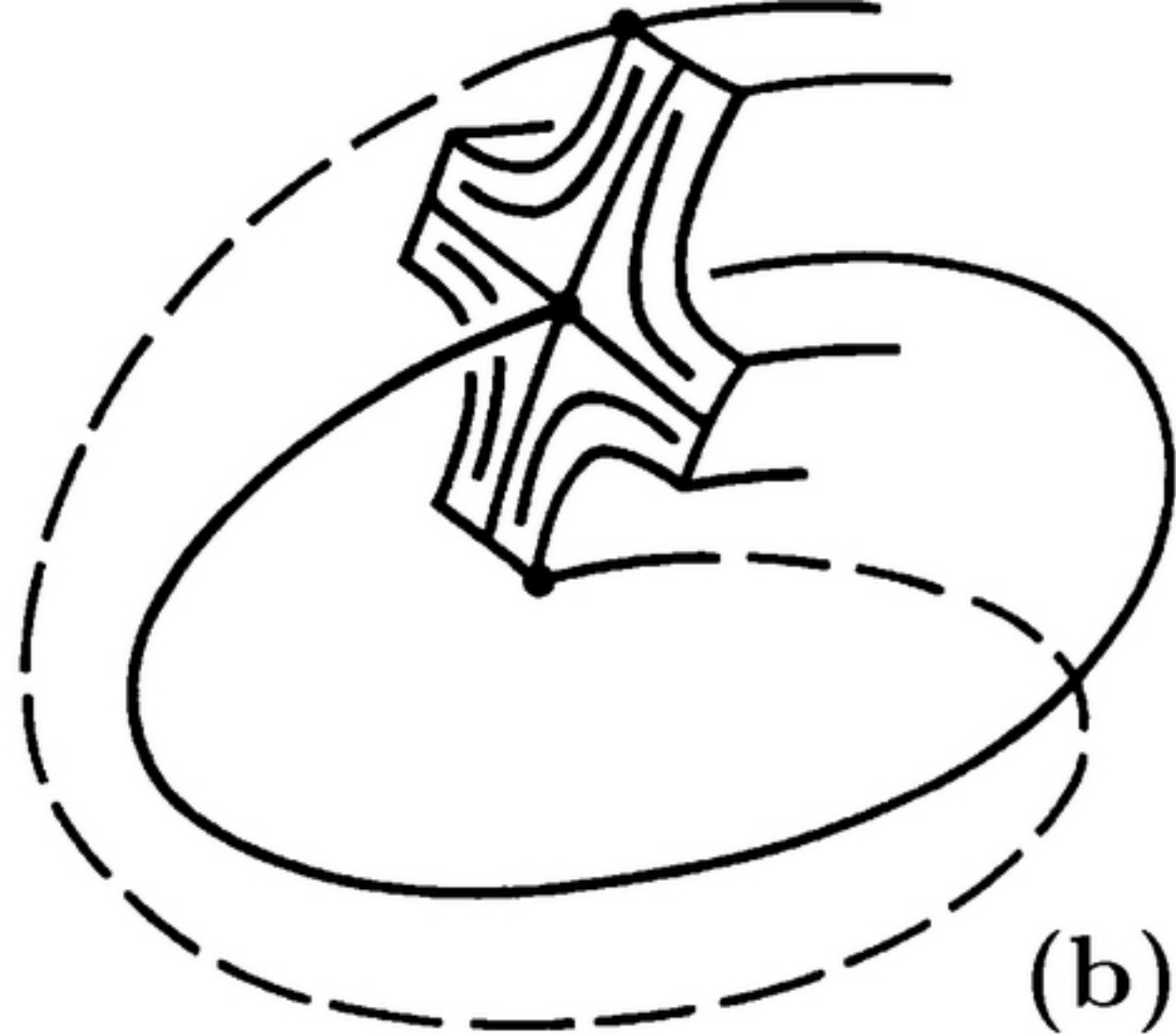
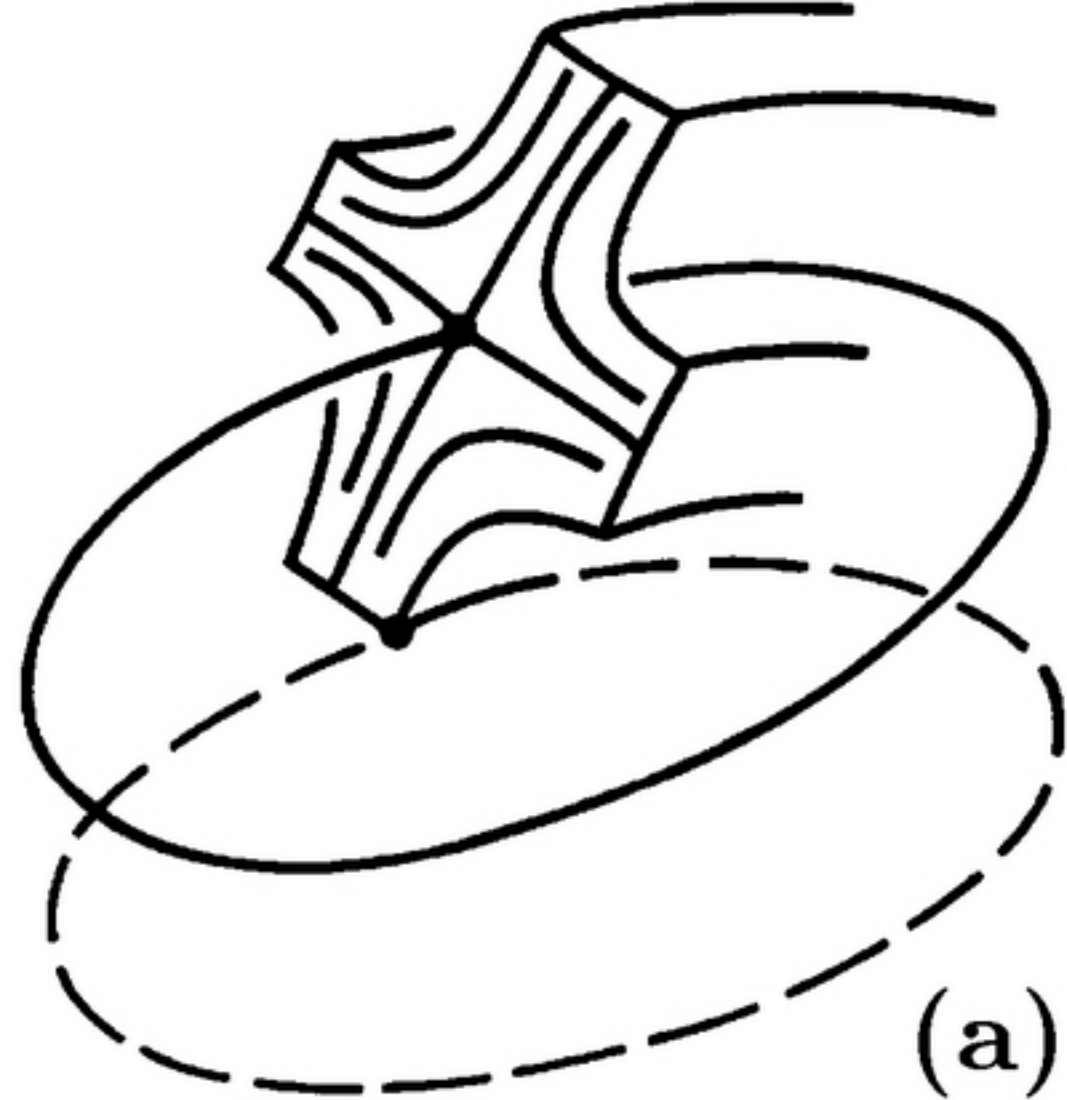


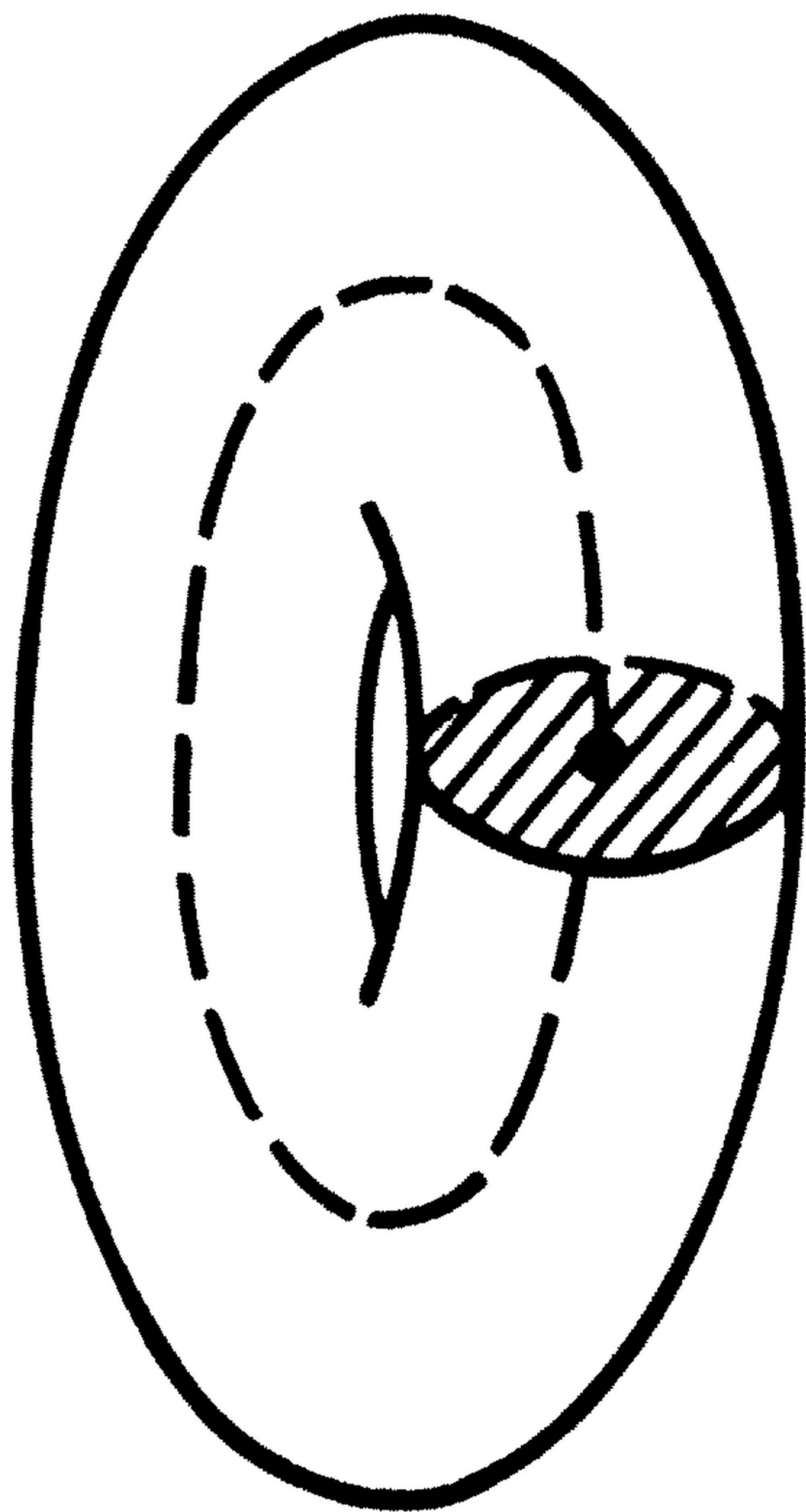
Если взять трансверсальные ("нормальные") 2-мерные "сечения" таких слоев, то появляются 2-"атомы".



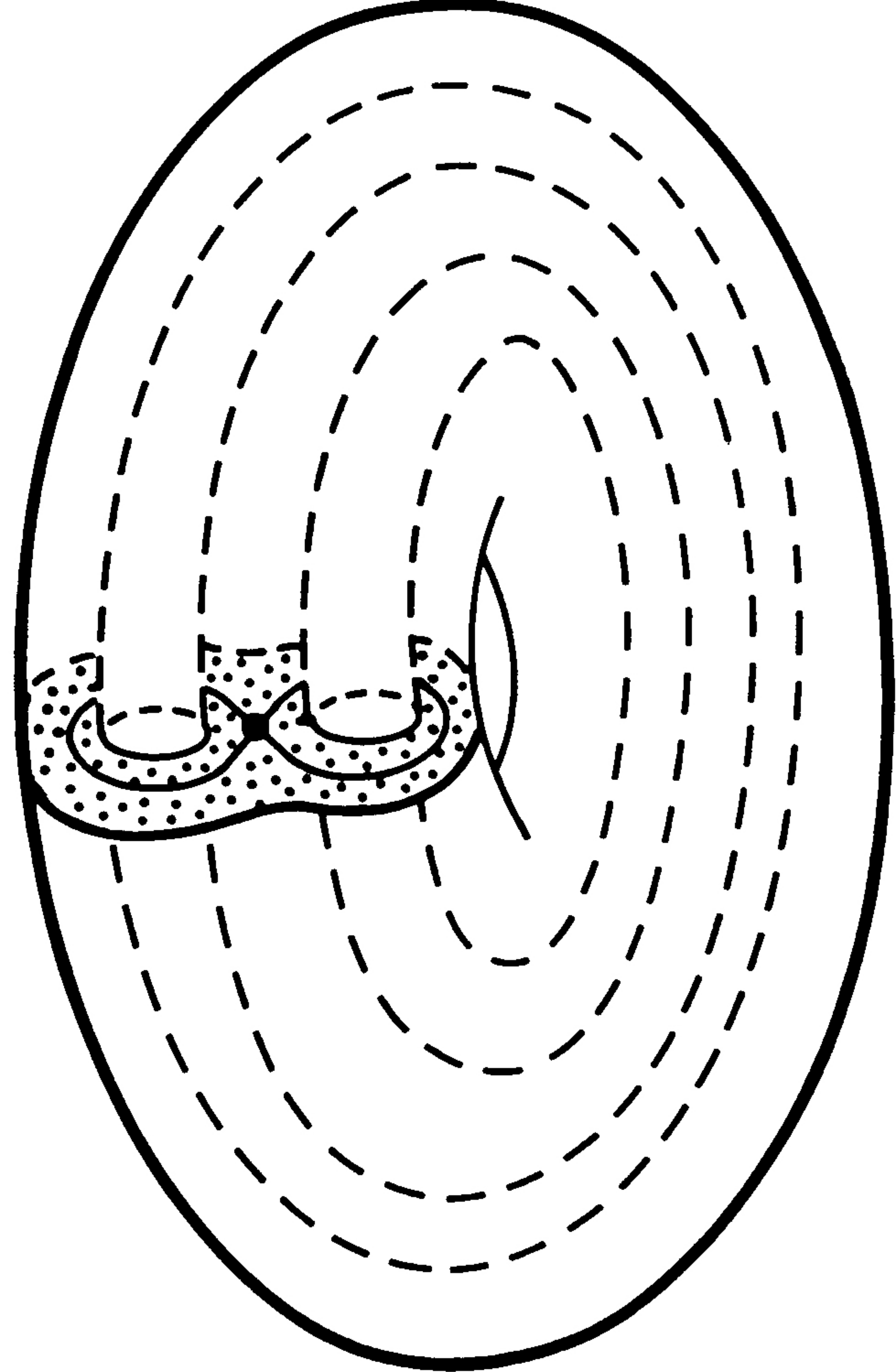
- А авторитетской
- Задача классификации всех невырожденных бифуркаций (2-атомов) в интерпретируемых гамильтоновых системах успешно решена (А.Т. Фоменко, А.В. Болсинов, А.А. Ошечков).



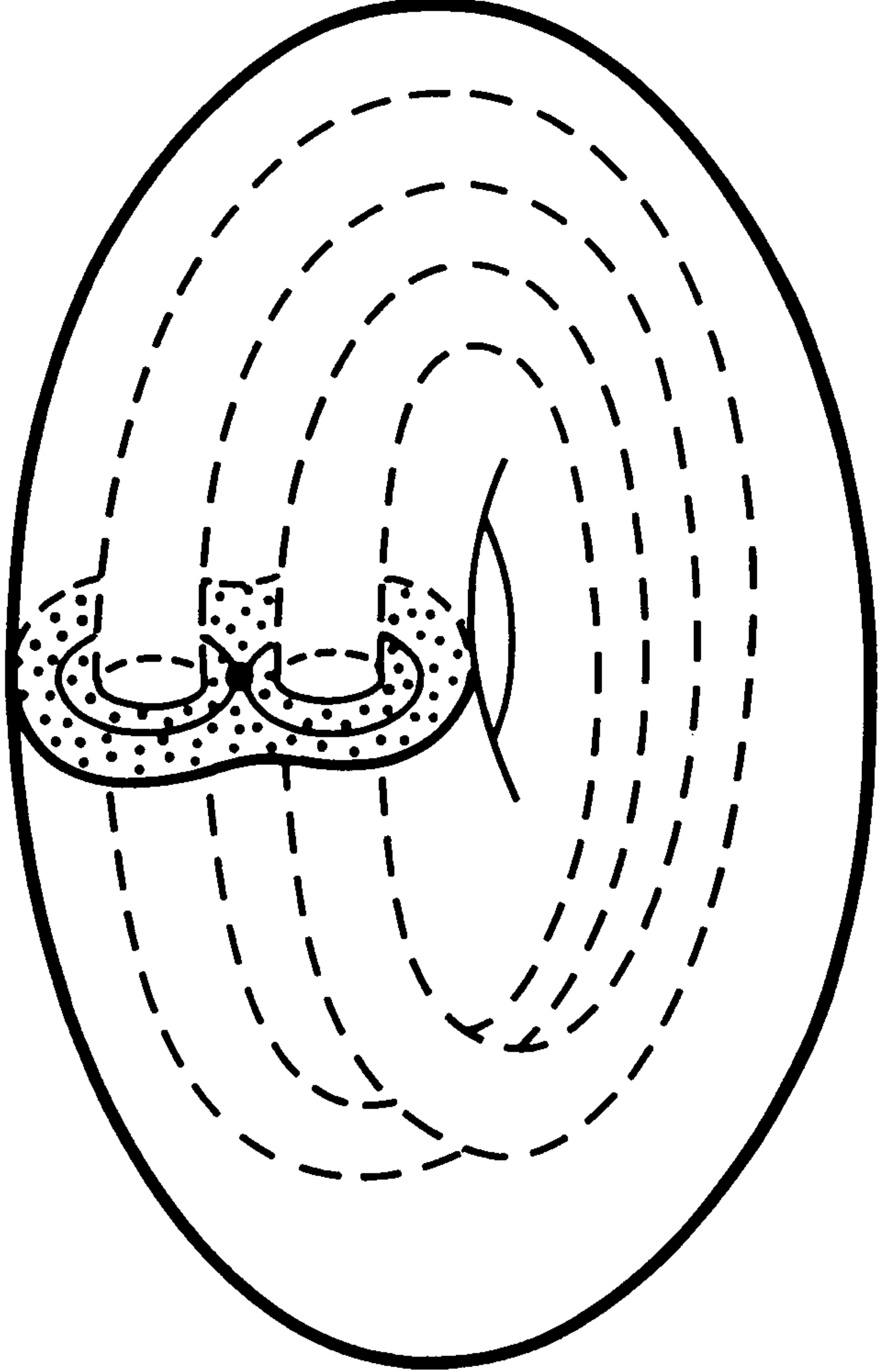




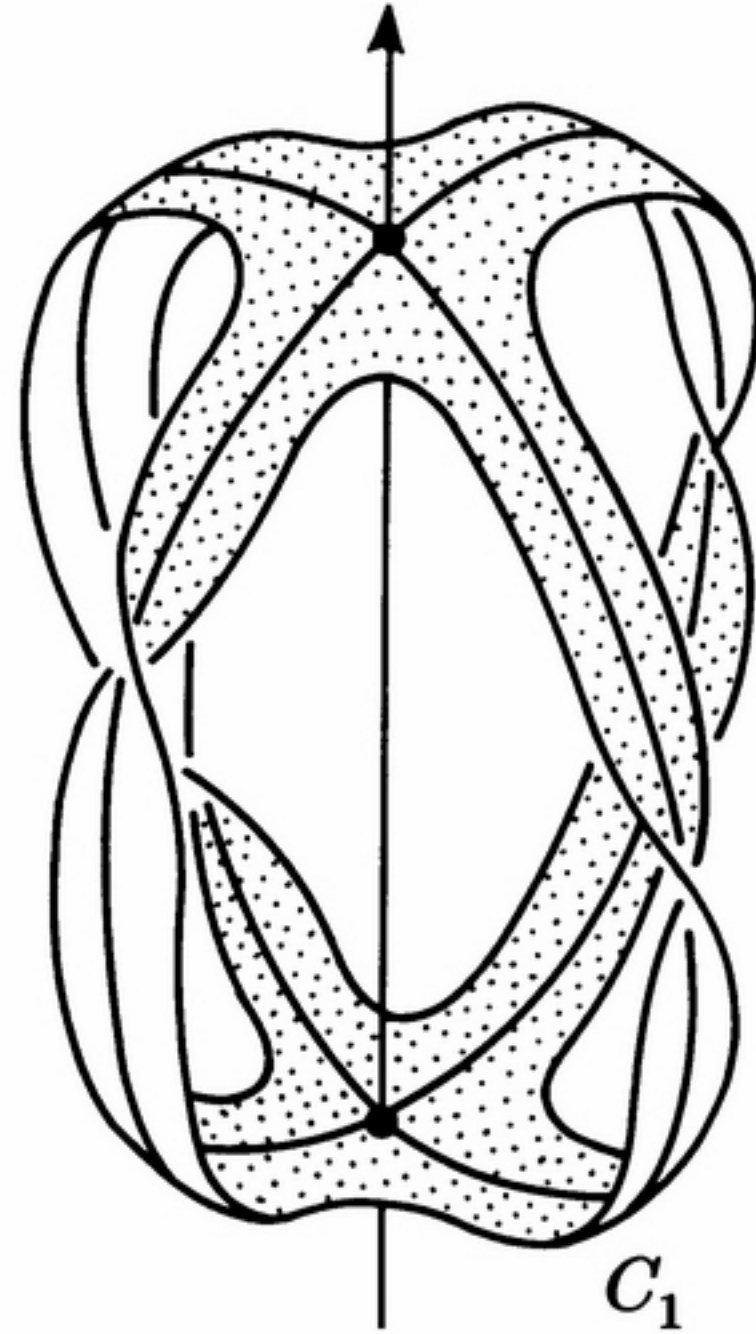
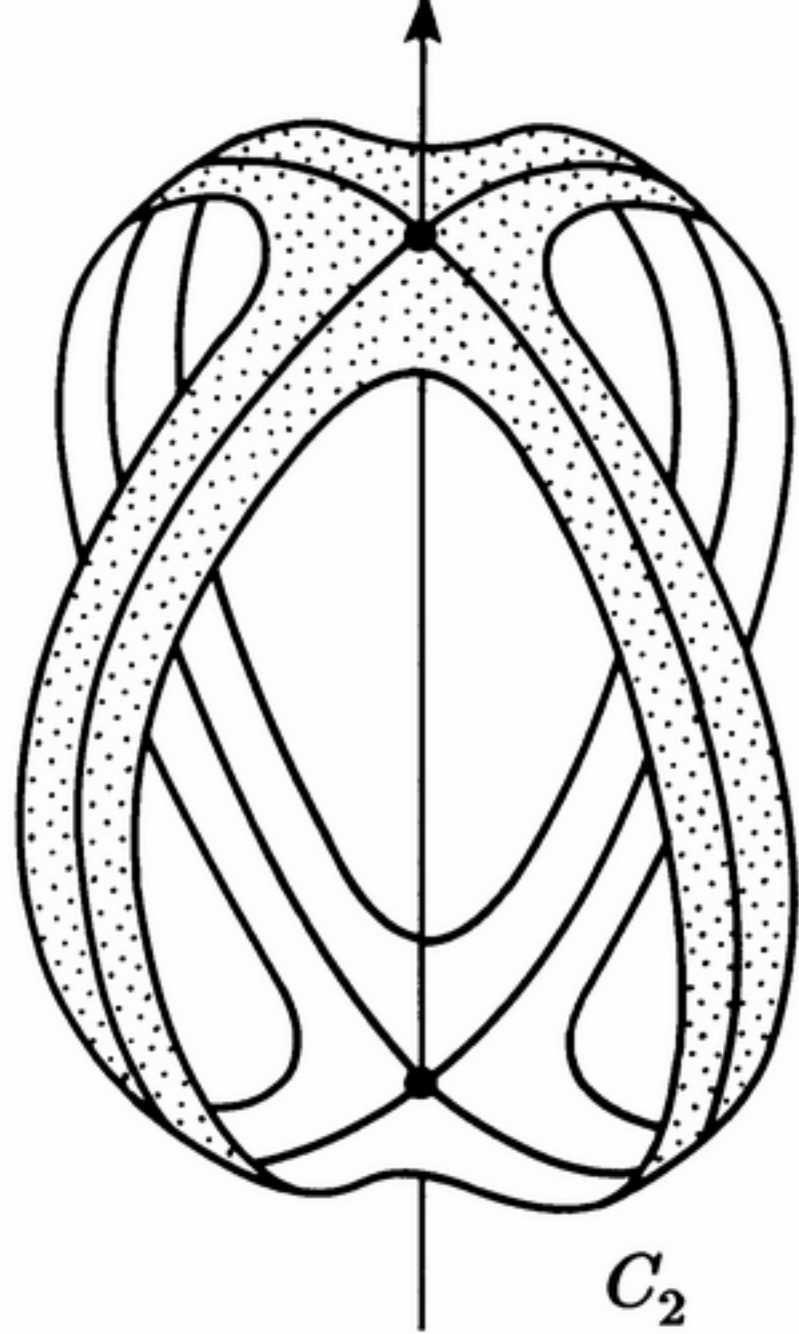
3-Atom A

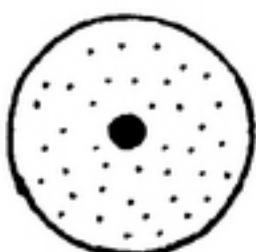
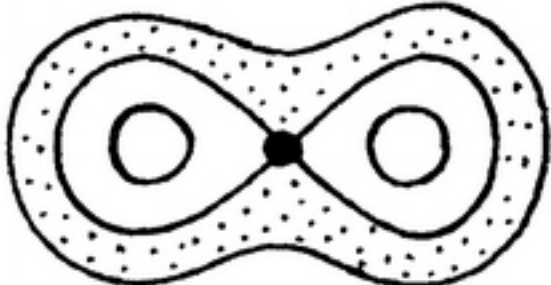
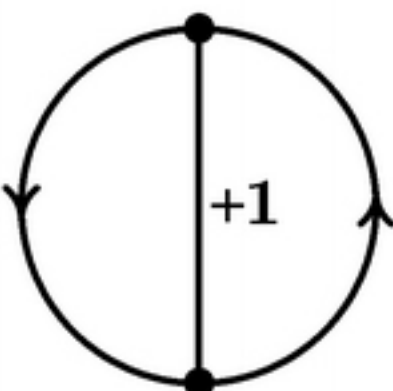
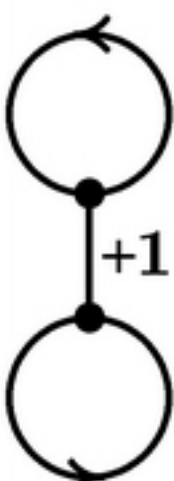
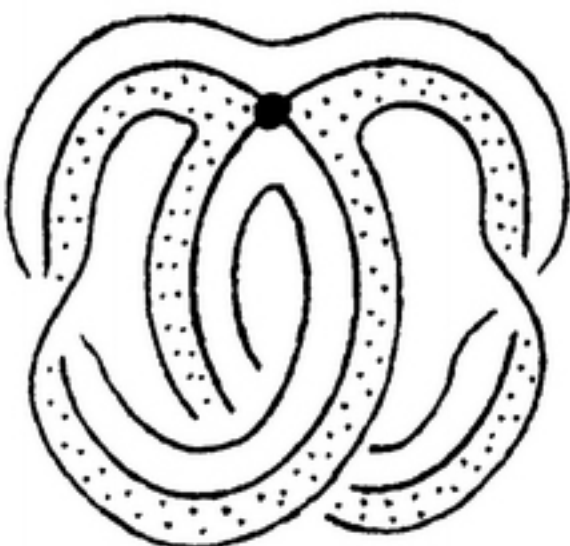
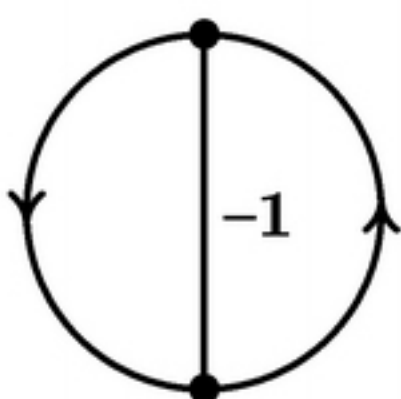
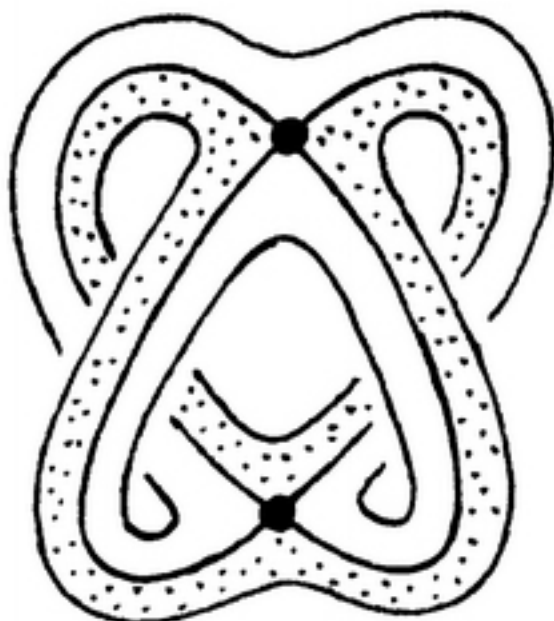
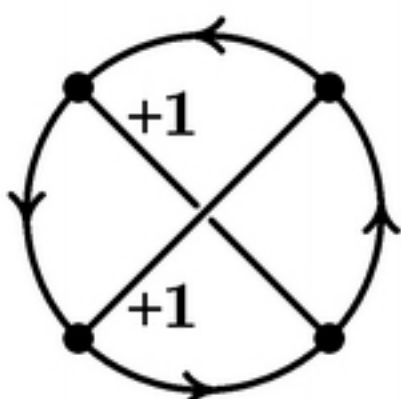
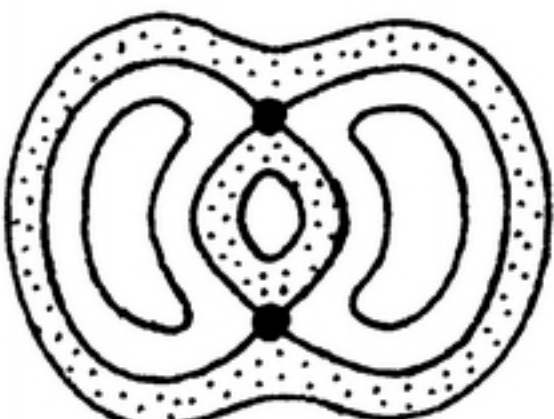
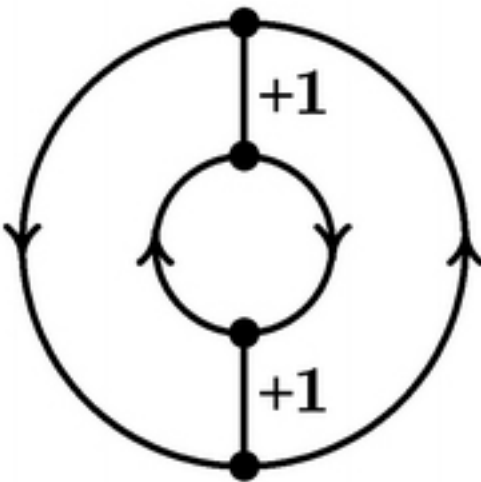
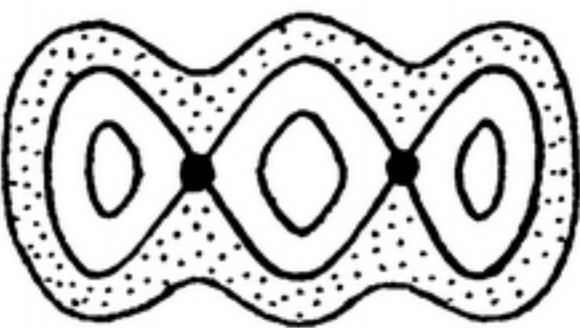
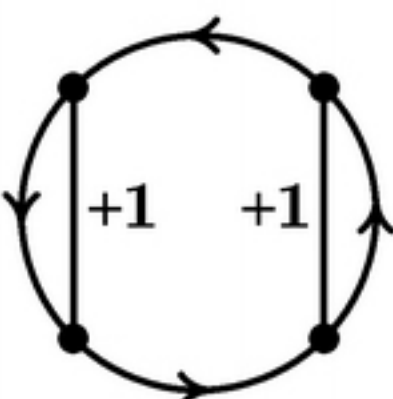


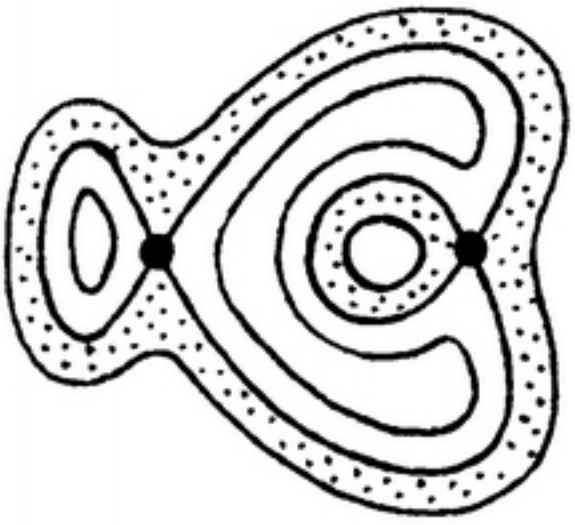
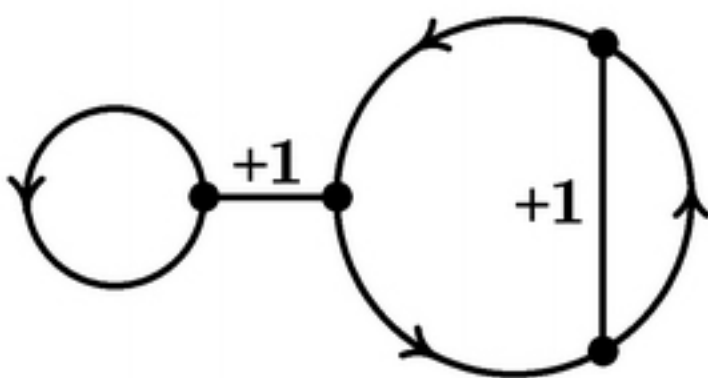
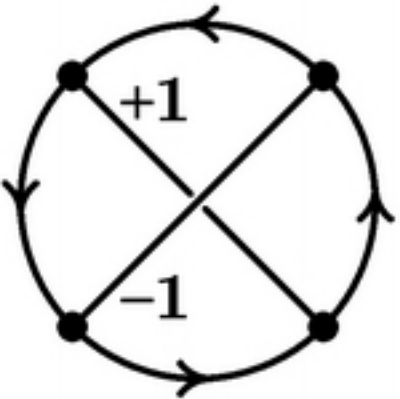
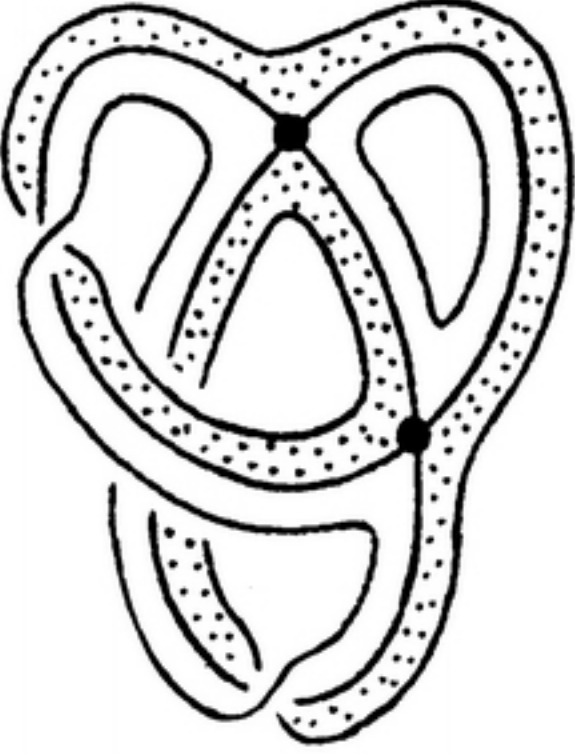
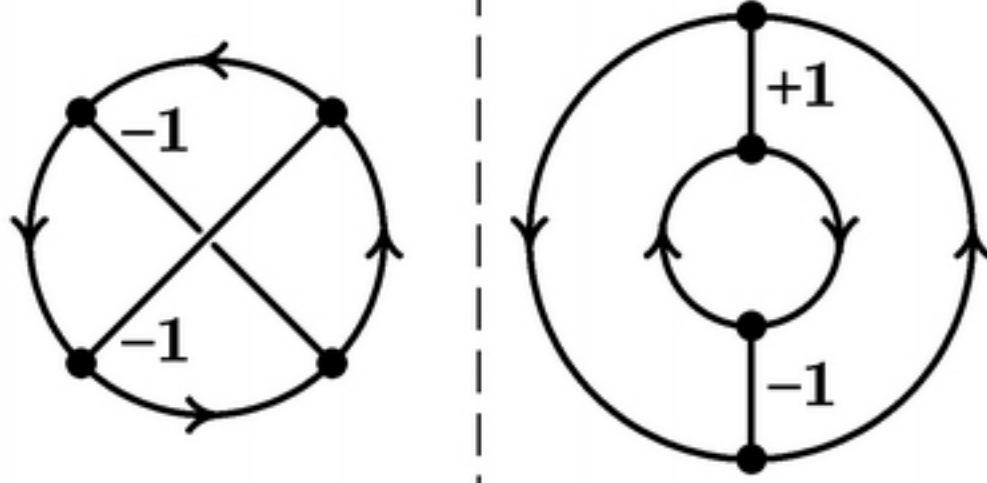
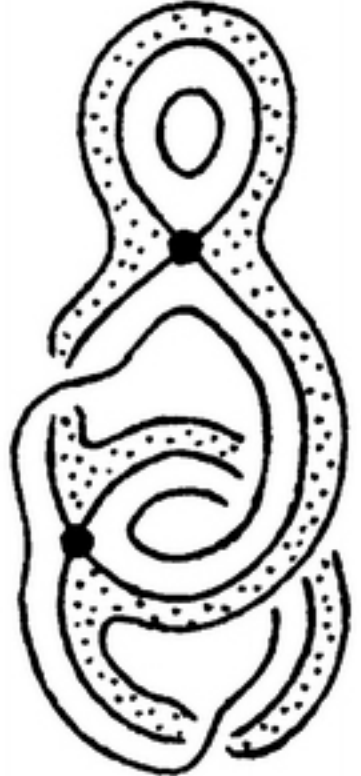
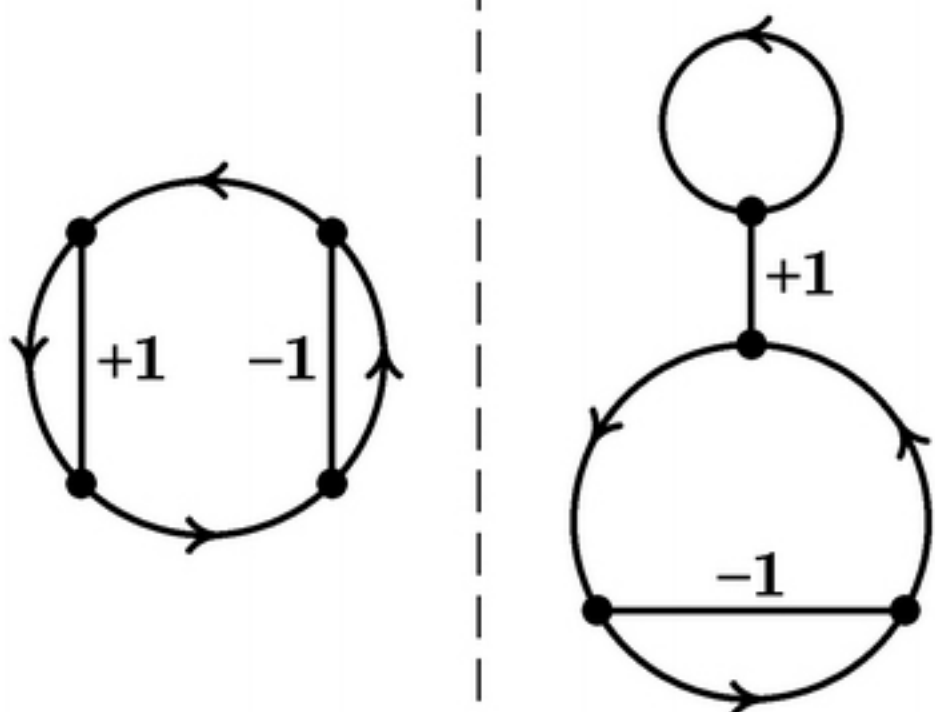
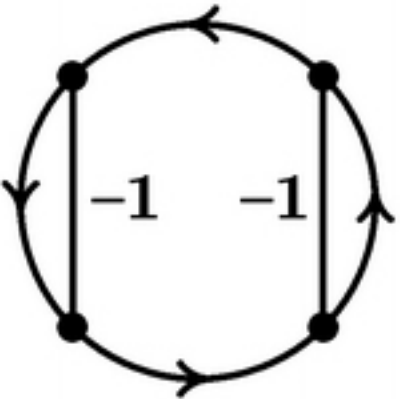
3-Atom B

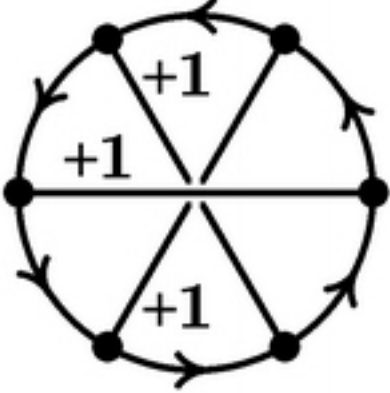
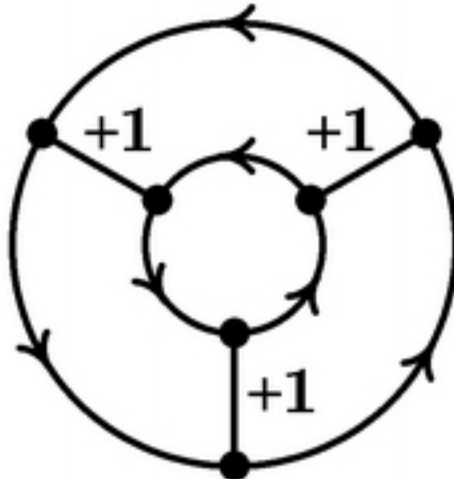
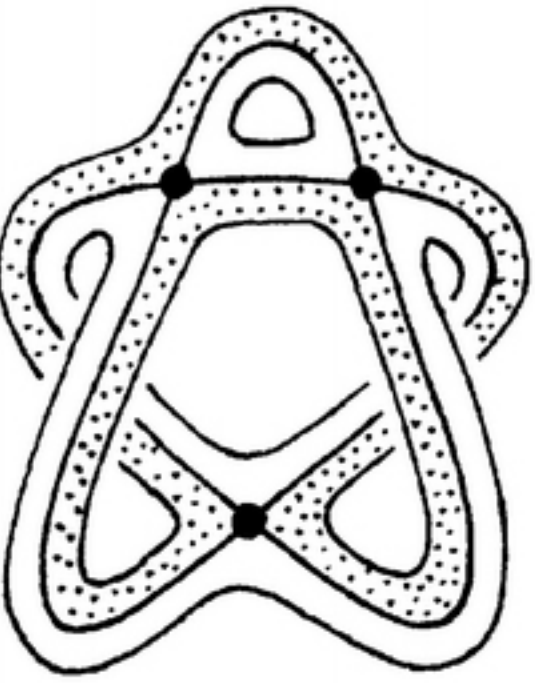
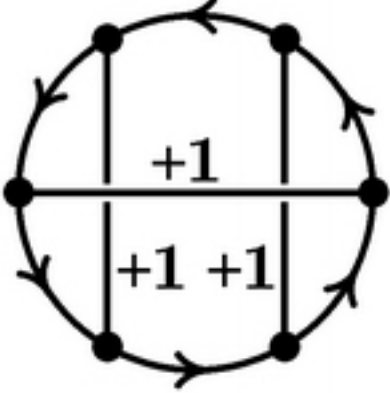
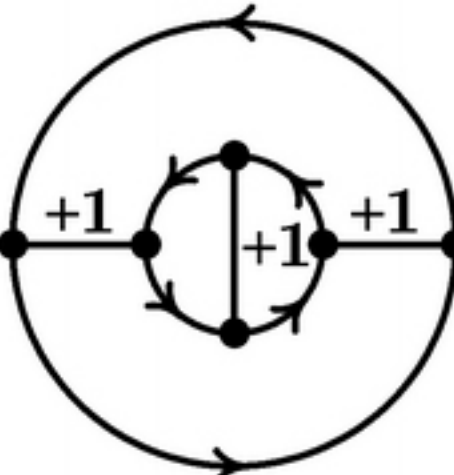
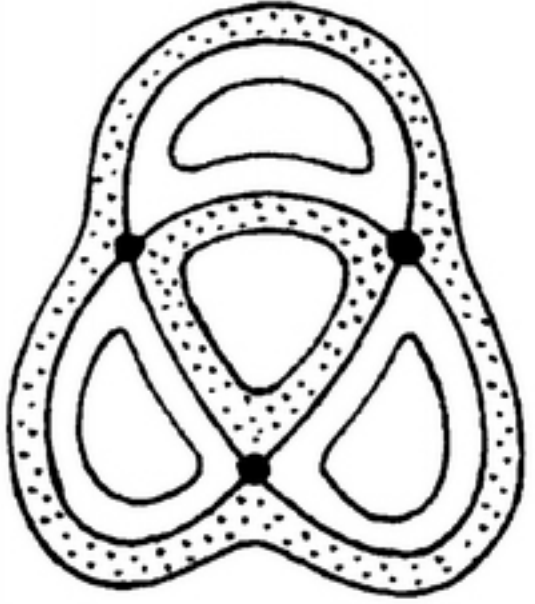
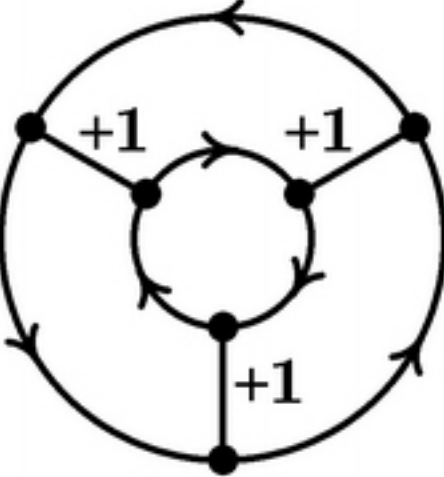
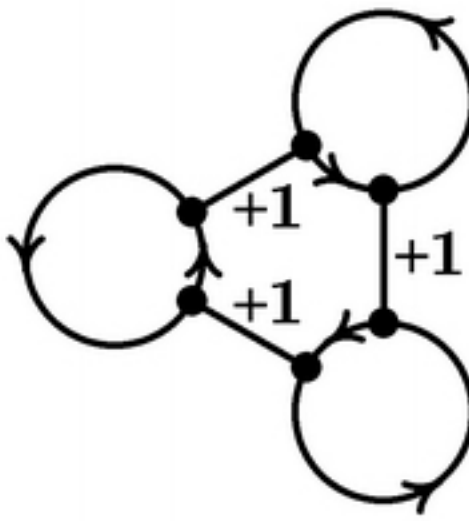
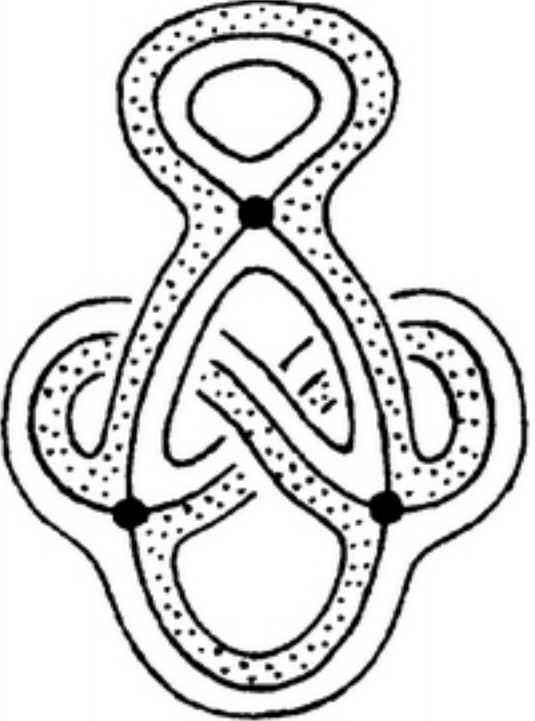
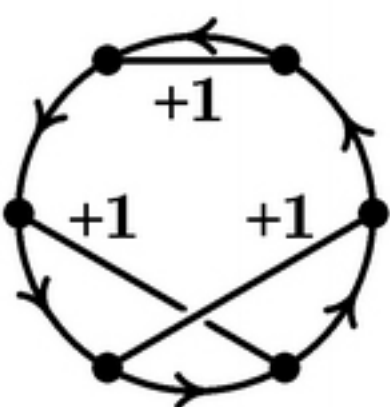
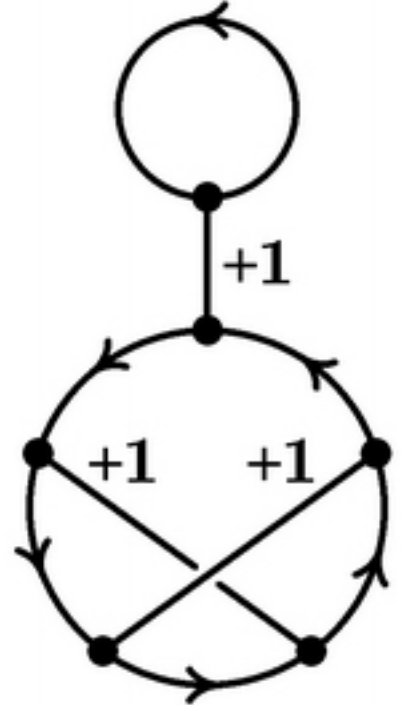
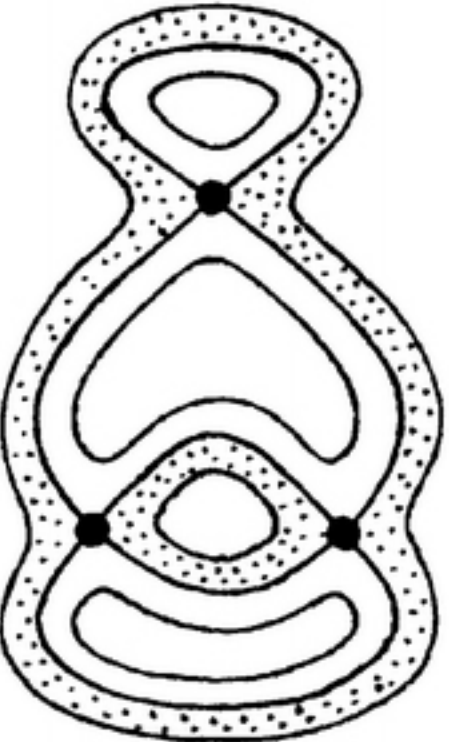
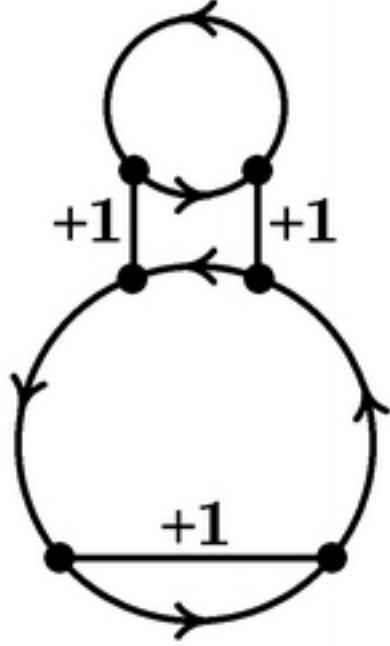
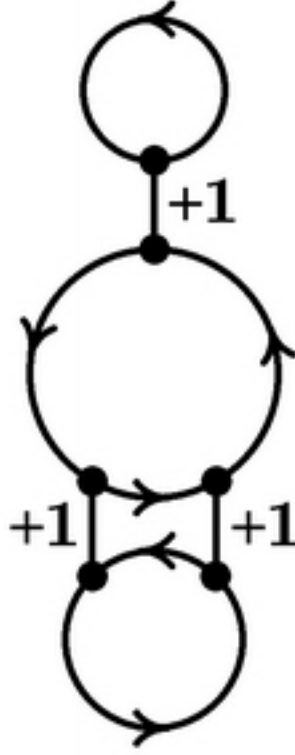


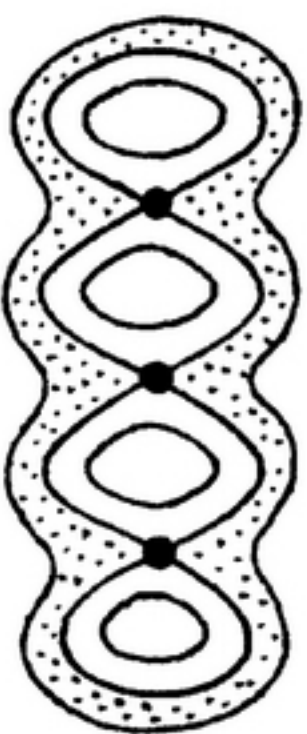
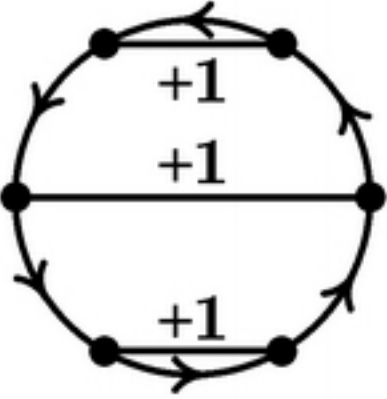
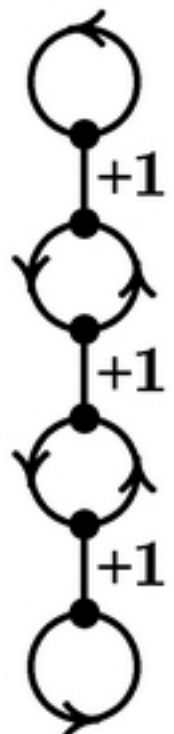
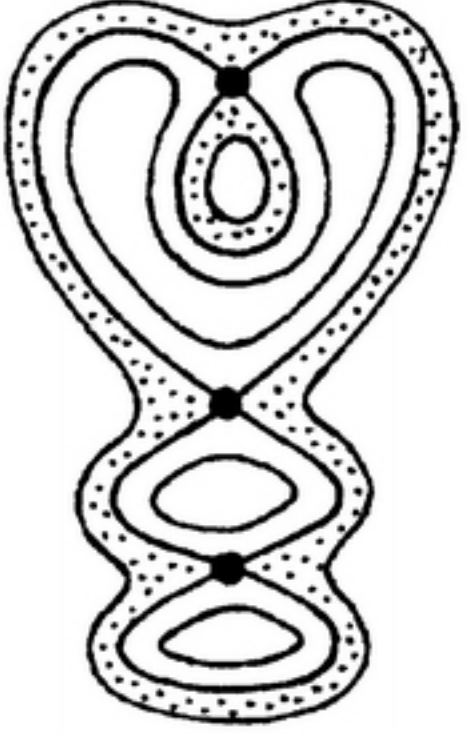
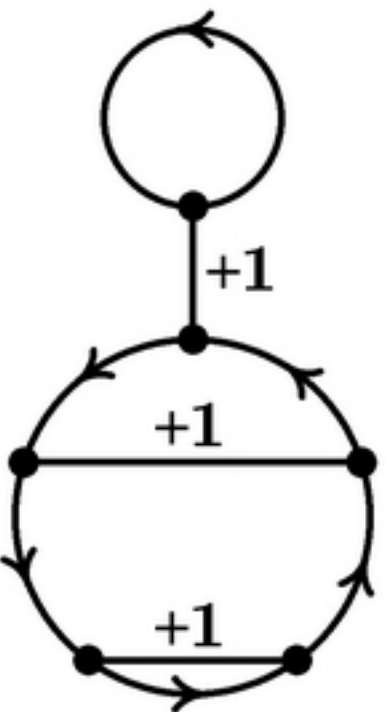
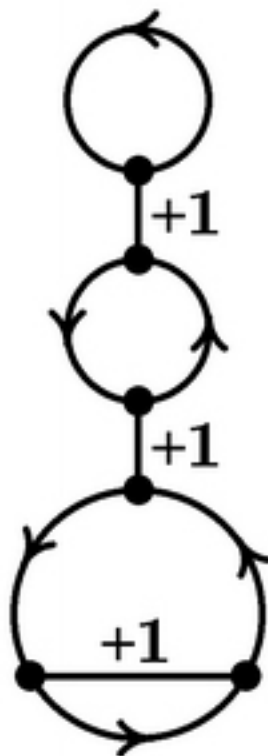
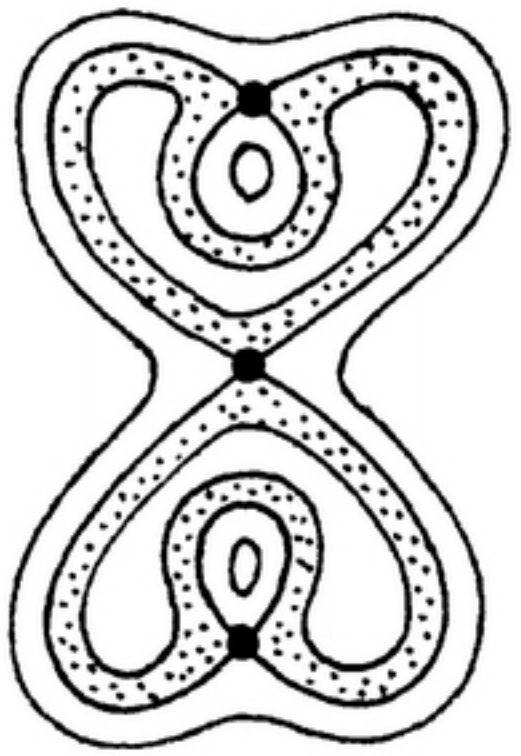
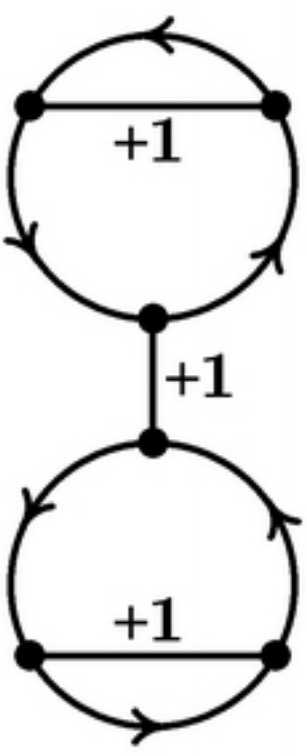
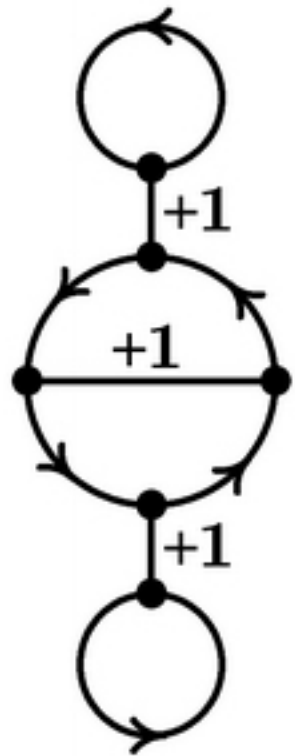
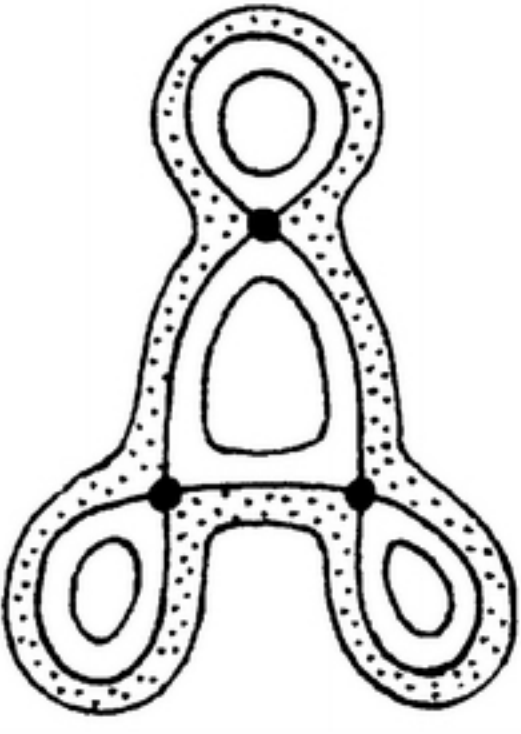
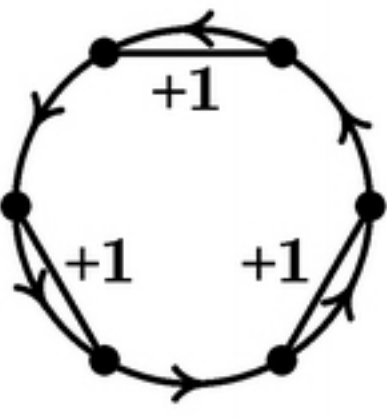
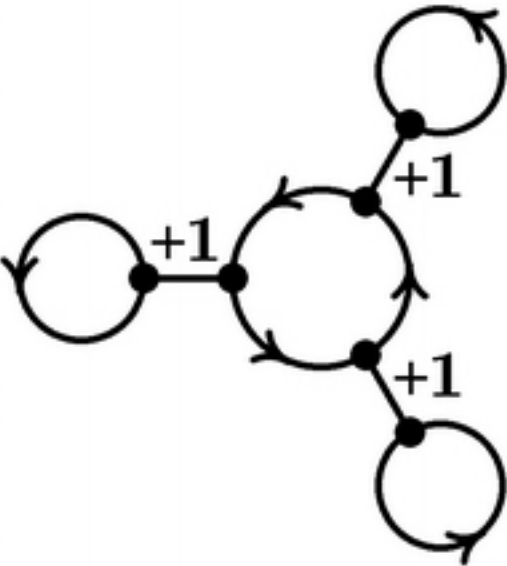
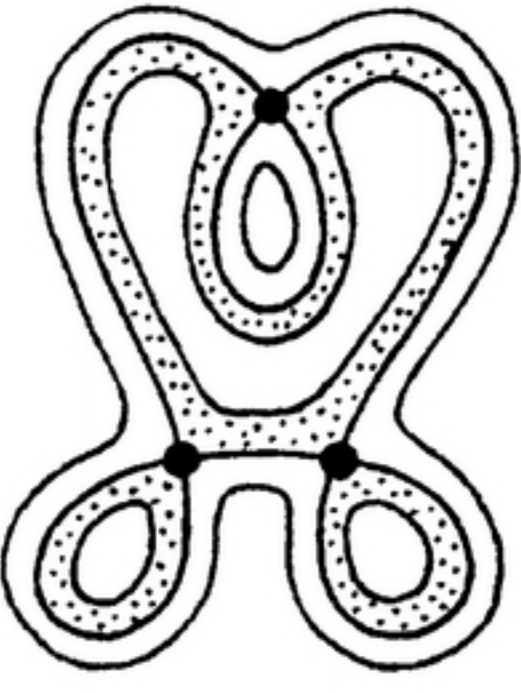
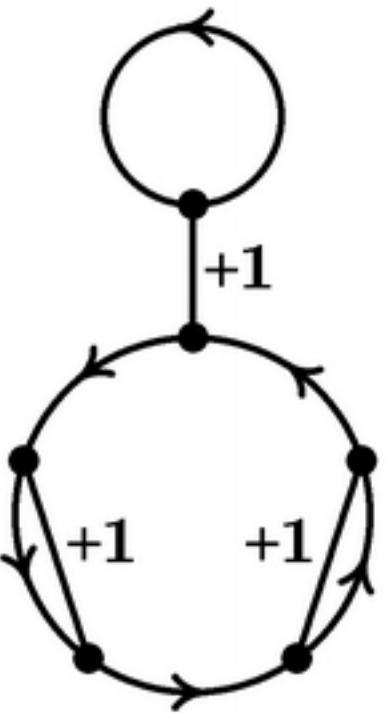
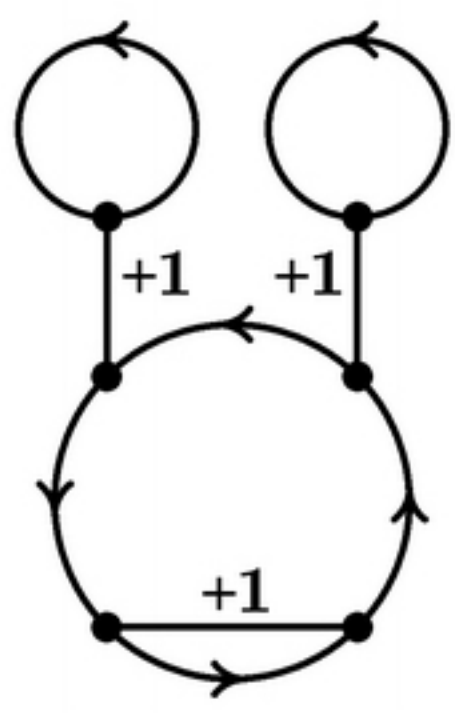
3-Atom A^*



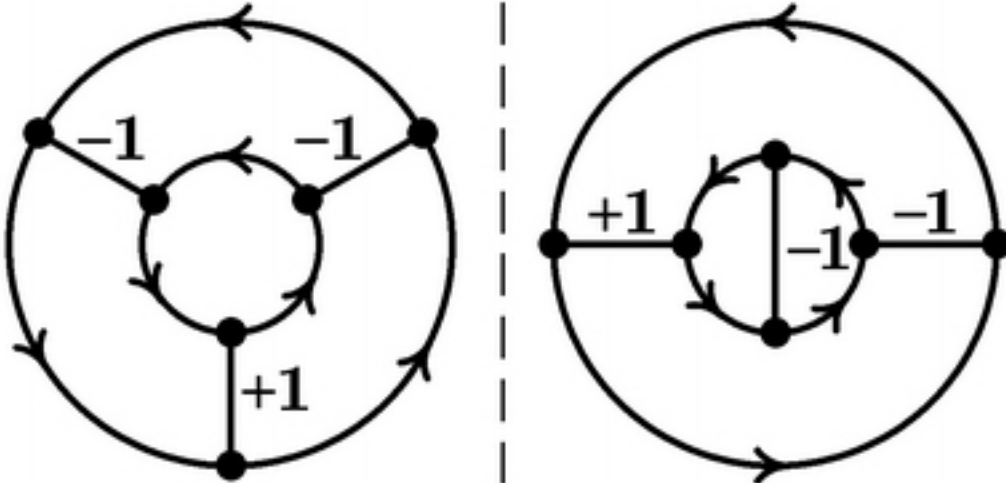
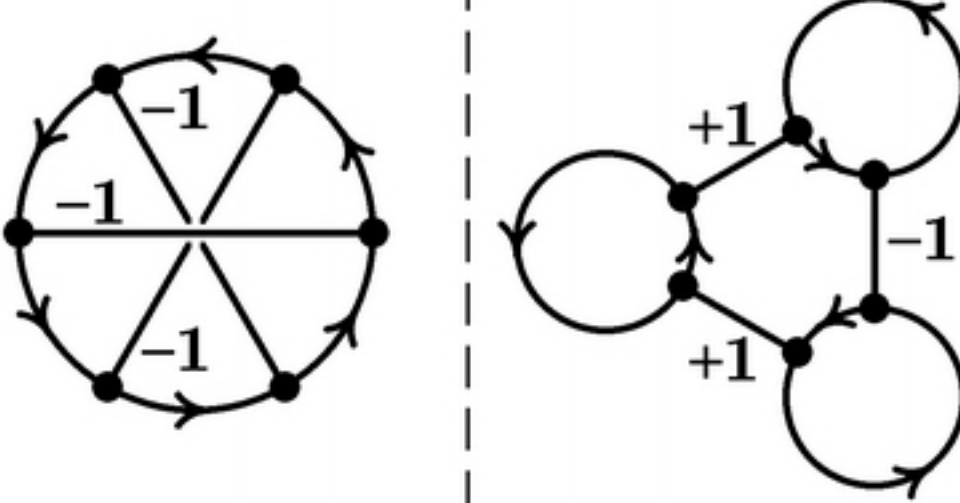
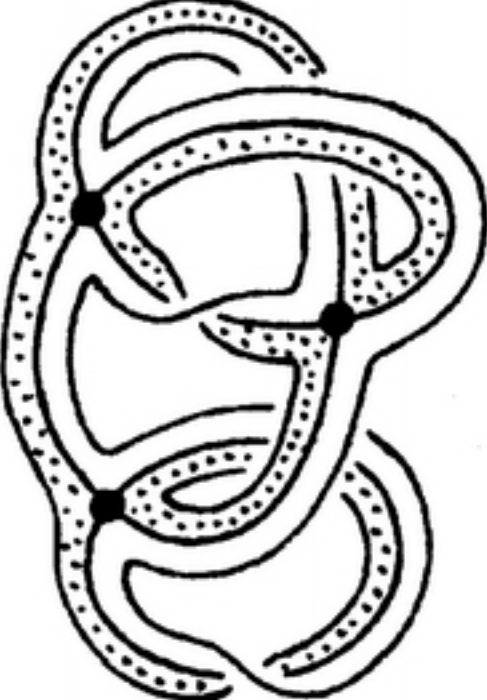
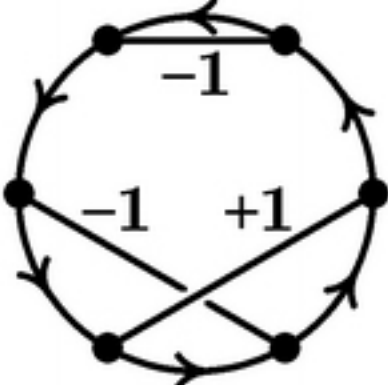
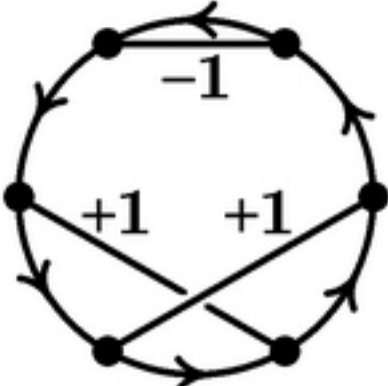
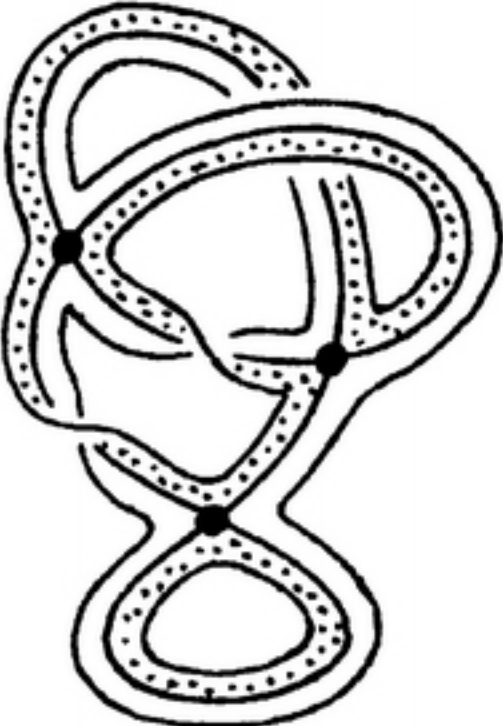
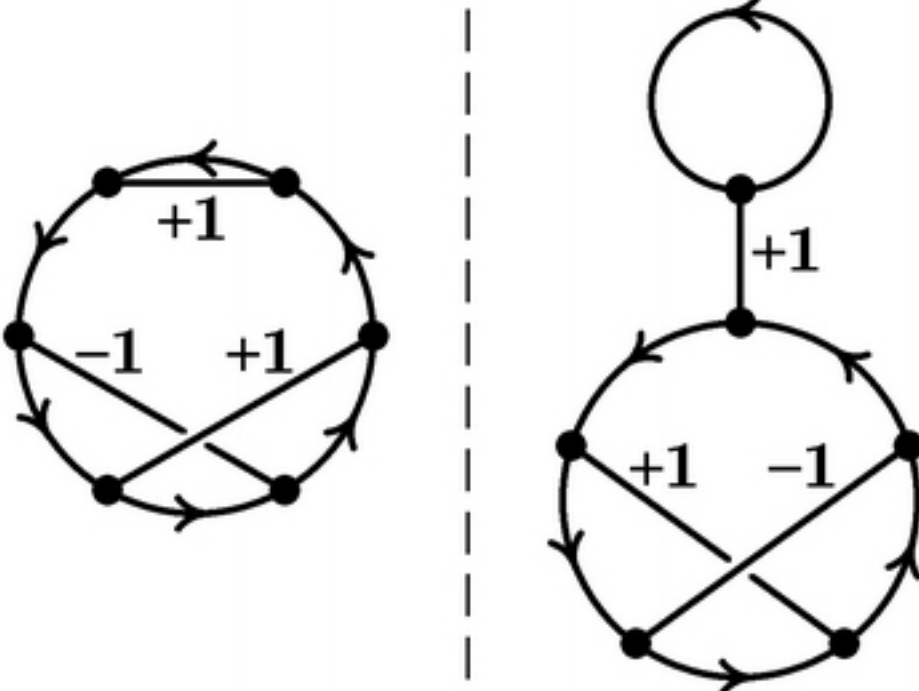
No	ATOM	f -GRAPHS		CODE	GENUS
Complexity 1, orientable					
1				$-A$	S^2
2				$-B \leq$	S^2
Complexity 1, non-orientable					
$\tilde{1}$				$-\tilde{B}-$	$\mathbb{R}P^2$
Complexity 2, orientable					
1				$-C_1-$	T^2
2				$\geq C_2 \leq$	S^2
3				$-D_1 \leq$	S^2

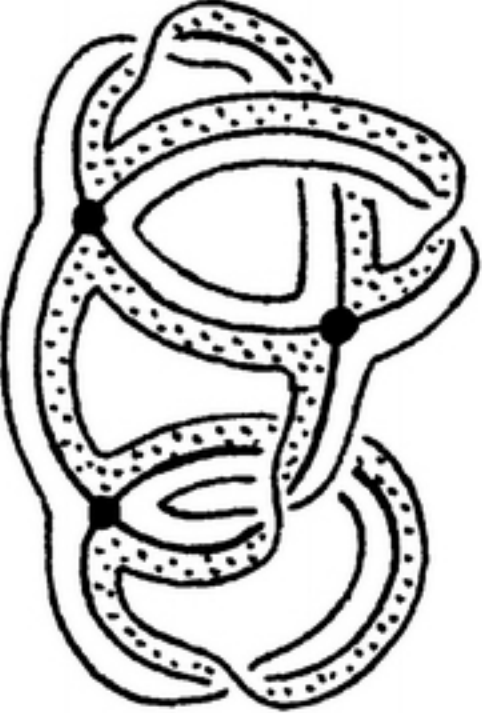
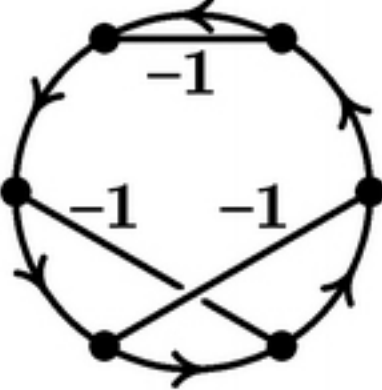
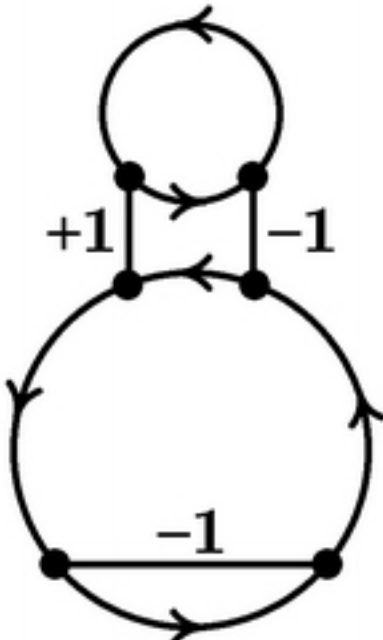
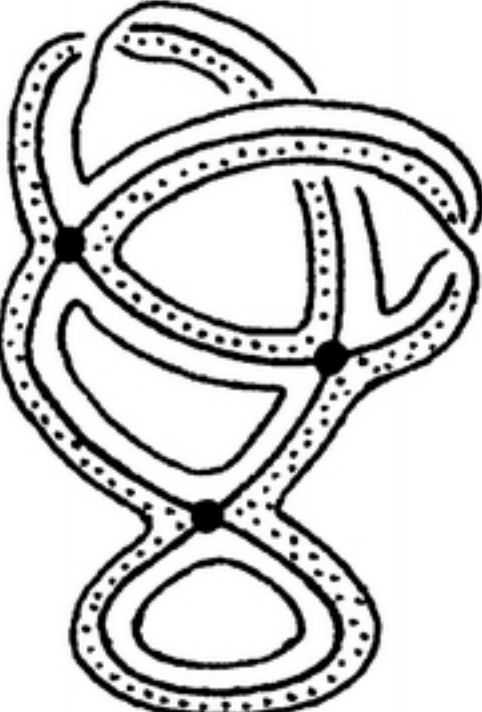
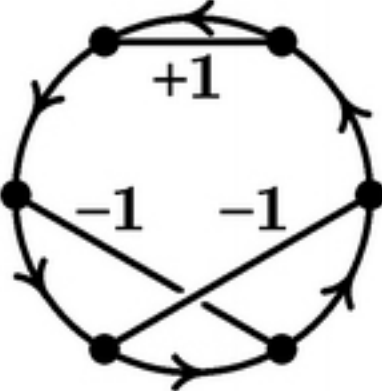
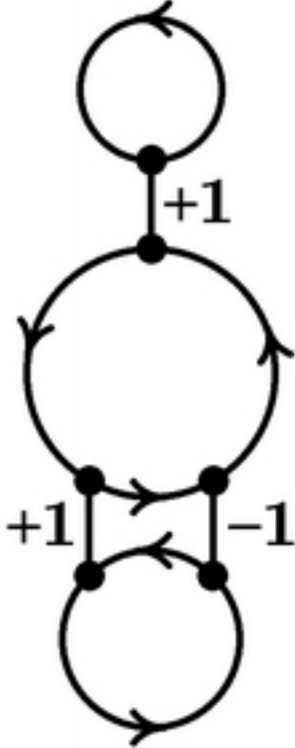
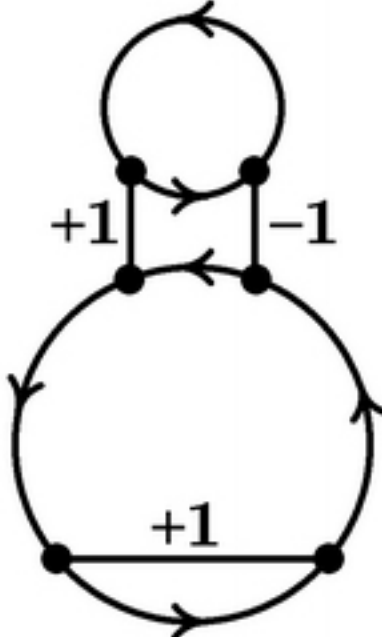
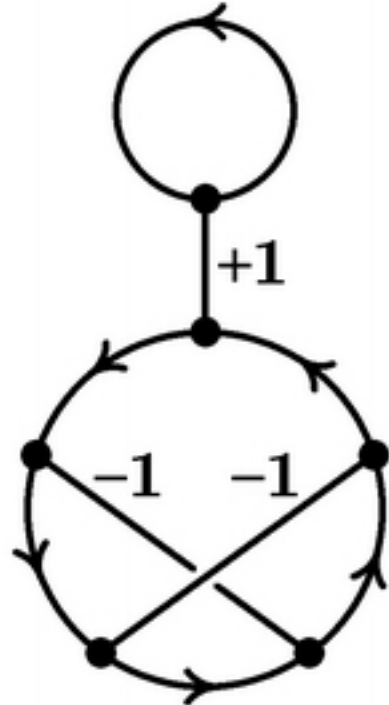
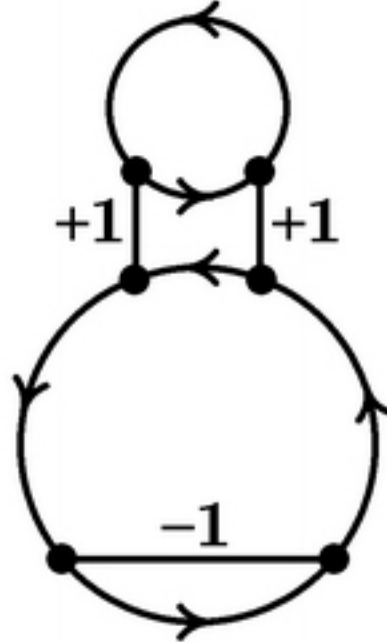
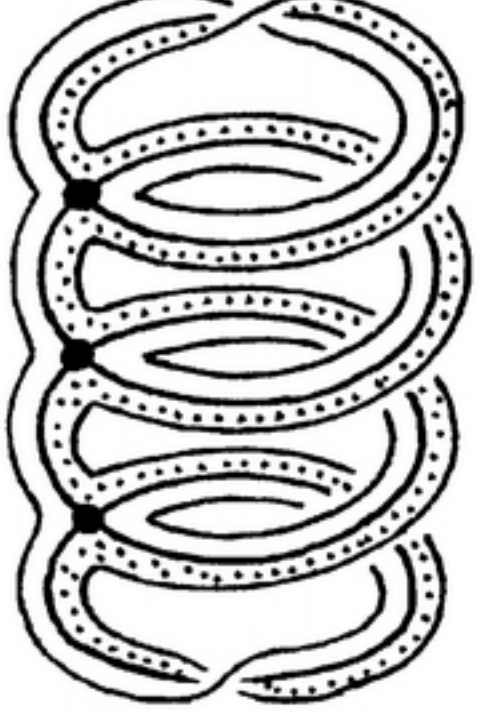
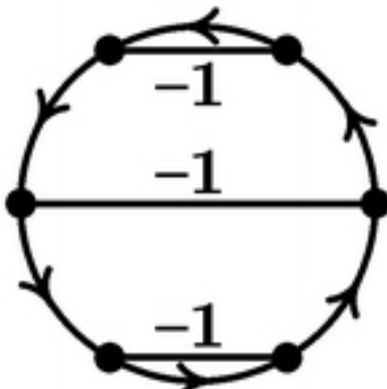
No	ATOM	f -GRAPHS	CODE	GENUS
4			$\succ D_2 \prec$	S^2
Complexity 2, non-orientable				
$\tilde{1}$			$-\tilde{C}_2-$	Kl
$\tilde{2}$			$-\tilde{C}_1 \prec$	$\mathbb{R}P^2$
$\tilde{3}$			$-\tilde{D}_1 \prec$	$\mathbb{R}P^2$
$\tilde{4}$			$-\tilde{D}_2-$	Kl

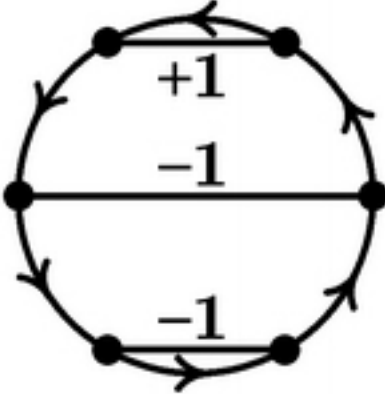
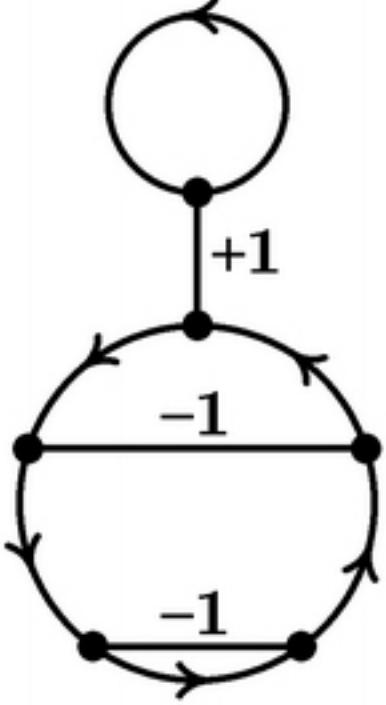
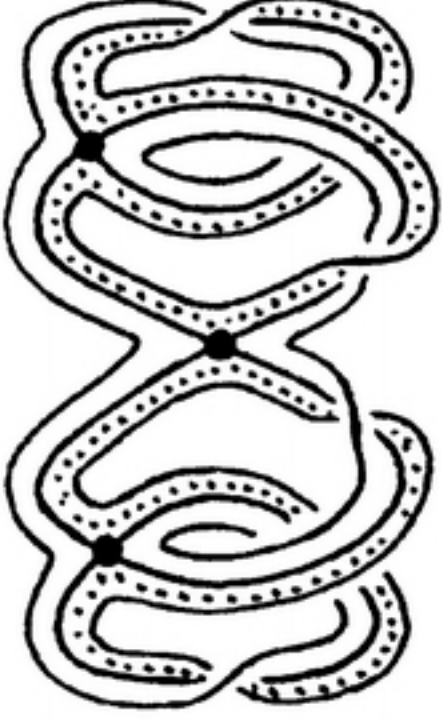
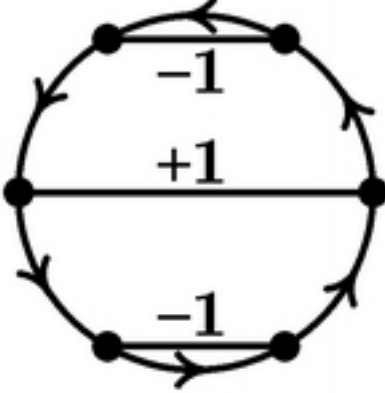
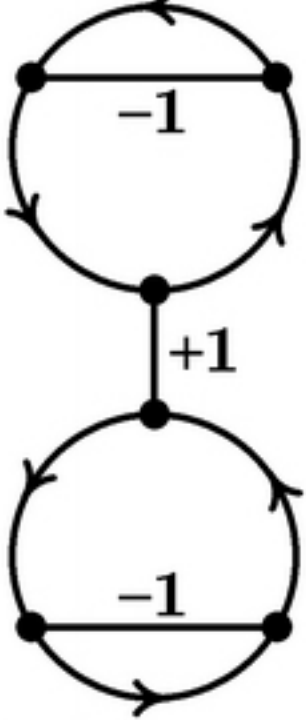
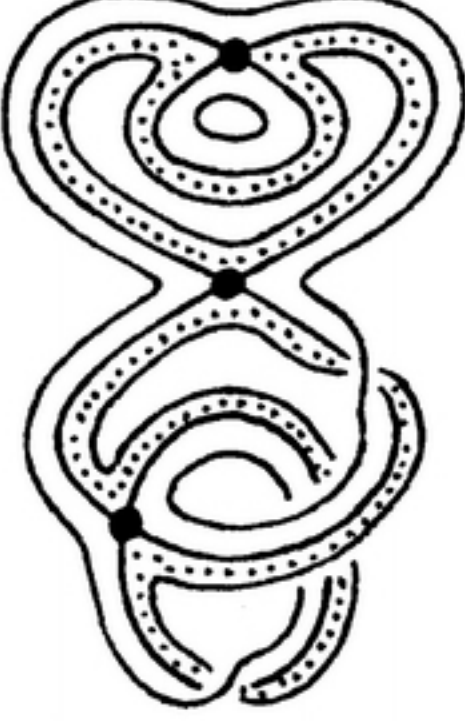
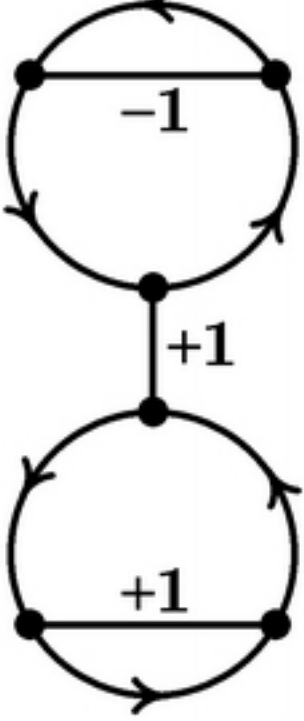
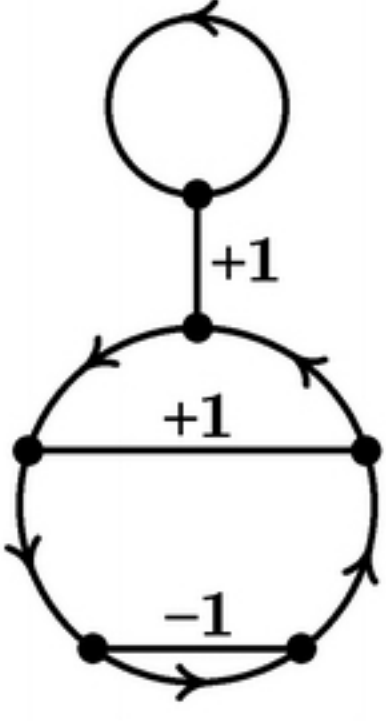
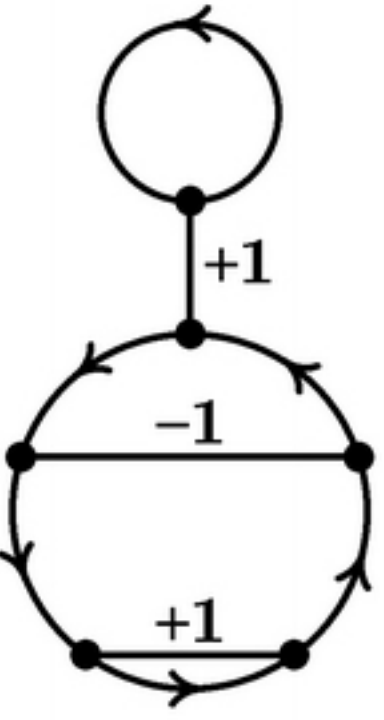
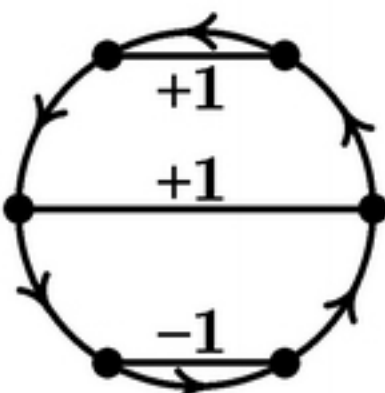
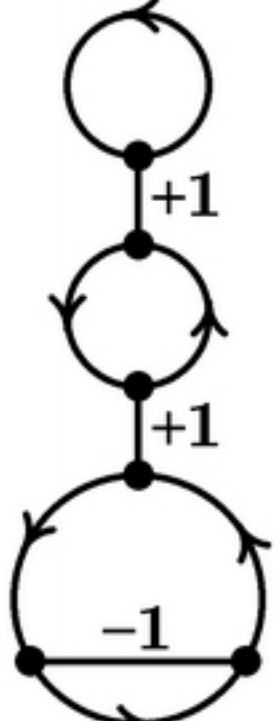
No	ATOM	f -GRAPHS		CODE	GENUS
Complexity 3, orientable					
1				$-E_1 \leq$	T^2
2				$-E_2 \leq$	T^2
3				$\geq E_3 \equiv$	S^2
4				$-F_1 \leq$	T^2
5				$\geq F_2 \equiv$	S^2

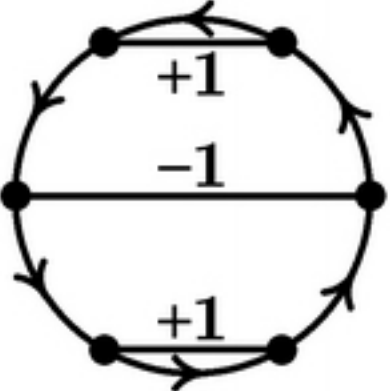
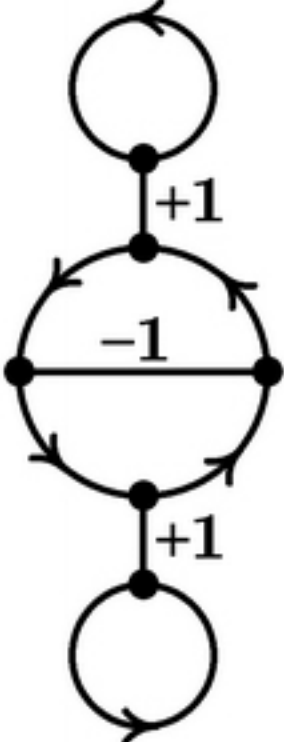
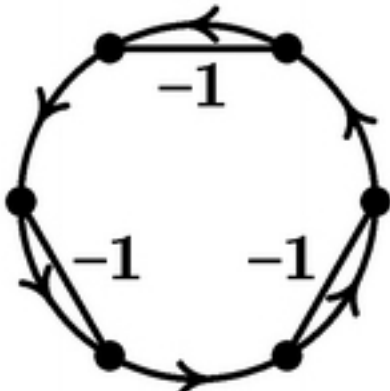
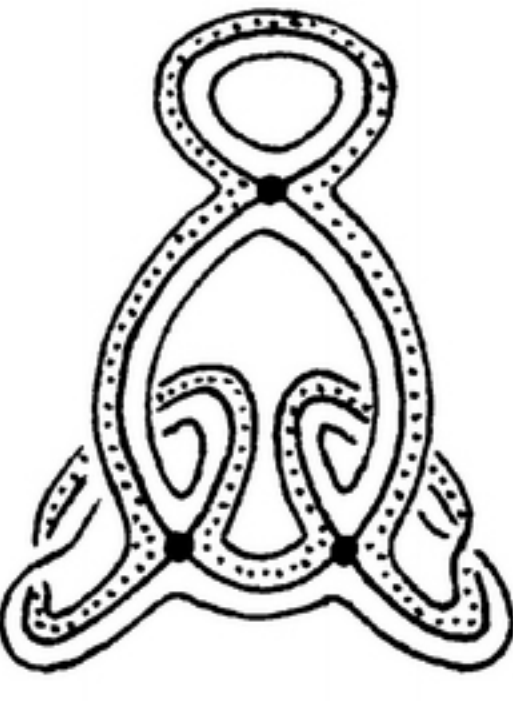
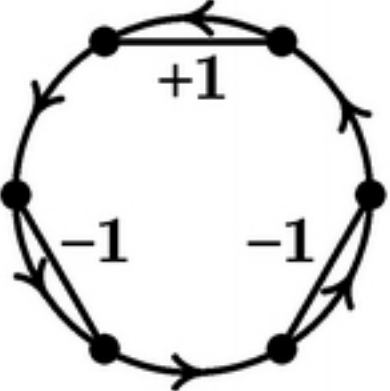
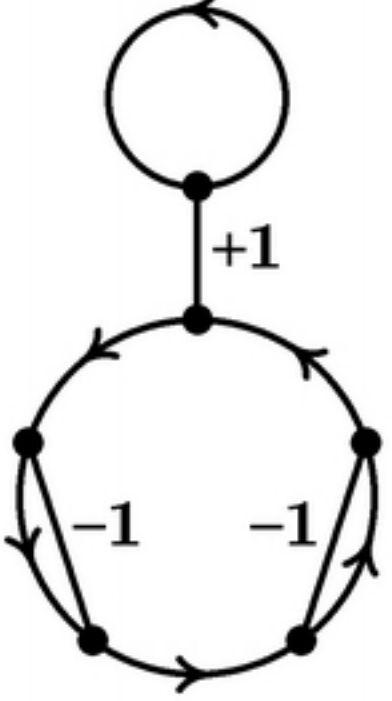
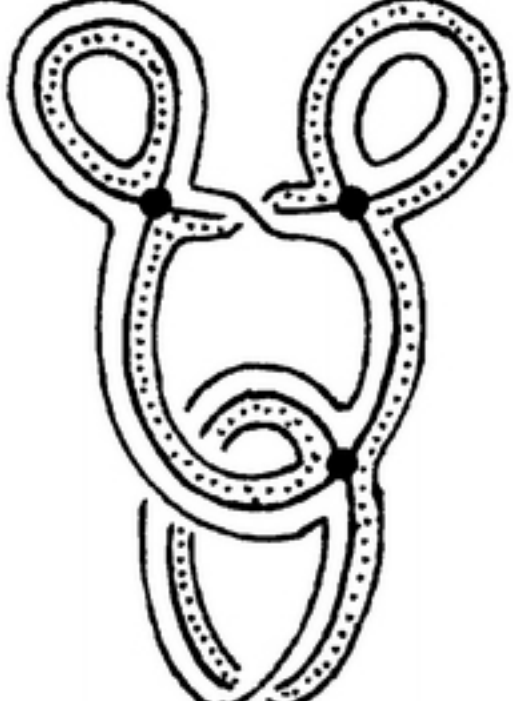
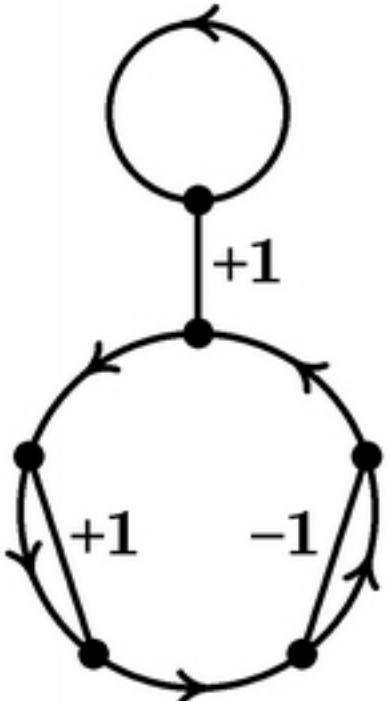
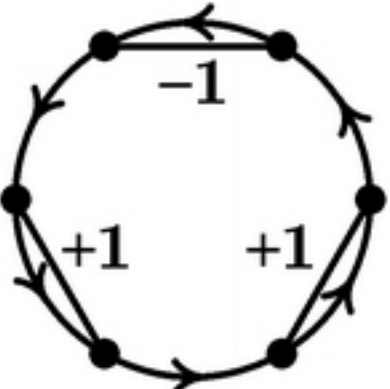
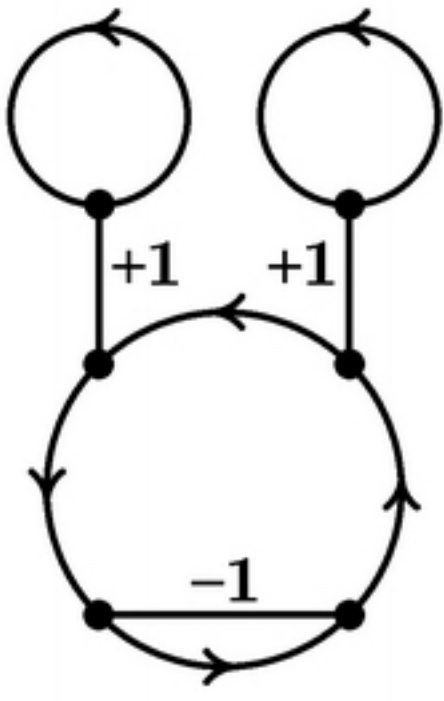
No	ATOM	f -GRAPHS		CODE	GENUS
6				$-G_1 \cong$	S^2
7				$\succ G_2 \cong$	S^2
8				$\succ G_3 \cong$	S^2
9				$-H_1 \cong$	S^2
10				$\succ H_2 \cong$	S^2

No	ATOM	f -GRAPHS		CODE	GENUS
Complexity 3, non-orientable					
$\tilde{1}$				$-\tilde{E}_1-$	$S^2+3\mu$
$\tilde{2}$				$-\tilde{E}_2-$	$S^2+3\mu$
$\tilde{3}$				$-\tilde{E}_3\leq$	Kl
$\tilde{4}$				$-\tilde{E}_4\leq$	Kl
$\tilde{5}$				$-\tilde{E}_5\leq$	Kl

No	ATOM	f -GRAPHS	CODE	GENUS
$\tilde{6}$			$\succ \tilde{E}_6 \preccurlyeq$	$\mathbb{R}P^2$
$\tilde{7}$			$- \tilde{E}_7 \preccurlyeq$	$\mathbb{R}P^2$
$\tilde{8}$			$- \tilde{F}_1 -$	$S^2 + 3\mu$
$\tilde{9}$			$- \tilde{F}_2 -$	$S^2 + 3\mu$
$\tilde{10}$			$- \tilde{F}_3 \preccurlyeq$	Kl

No	ATOM	f -GRAPHS	CODE	GENUS
$\widetilde{11}$		 	$-\tilde{F}_4 \leq$	Kl
$\widetilde{12}$		 	$-\tilde{F}_5 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{13}$		 	$\geq \tilde{F}_6 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{14}$			$\geq \tilde{F}_7 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{15}$			$-\tilde{G}_1 -$	$S^2 + 3\mu$

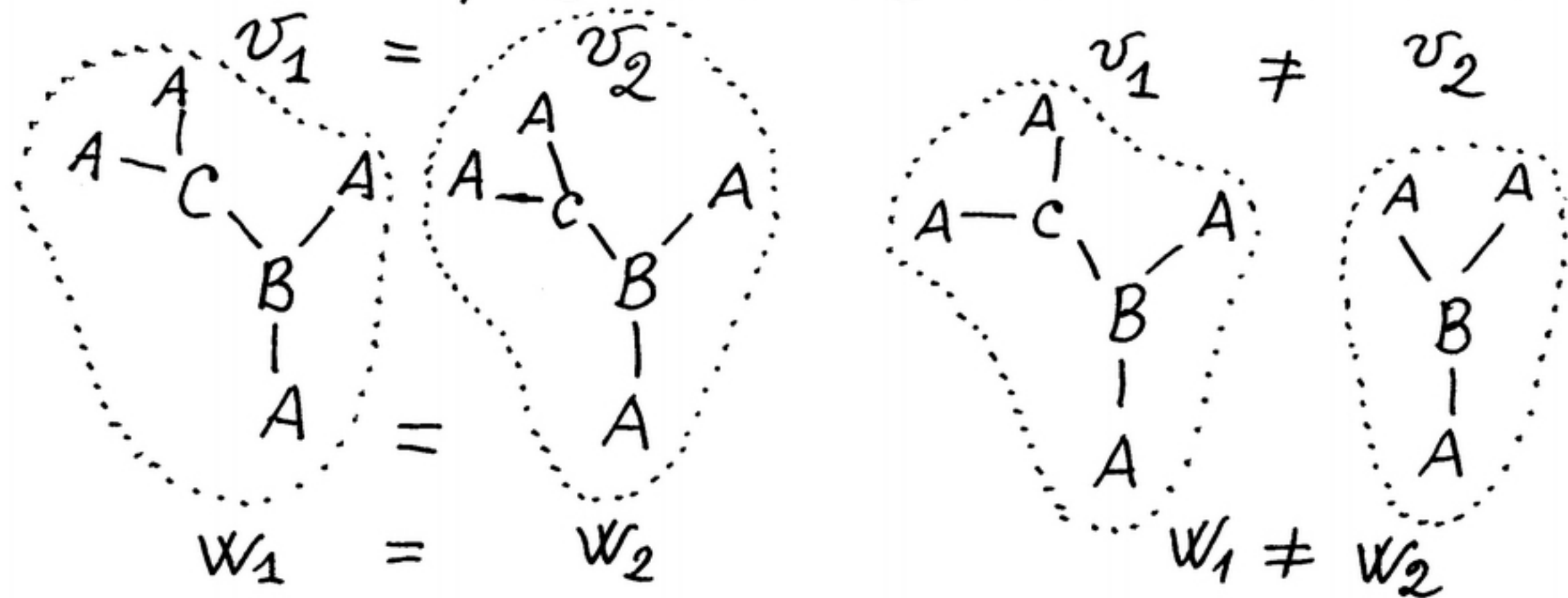
No	ATOM	f -GRAPHS	CODE	GENUS
$\widetilde{16}$		 	$-\tilde{G}_2 \leq$	Kl
$\widetilde{17}$		 	$-\tilde{G}_3 \leq$	Kl
$\widetilde{18}$		 	$\geq \tilde{G}_4 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{19}$			$\geq \tilde{G}_5 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{20}$		 	$-\tilde{G}_6 \equiv$	$\mathbb{R}P^2$

No	ATOM	f -GRAPHS		CODE	GENUS
$\widetilde{21}$				$-\tilde{G}_7 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{22}$				$-\tilde{H}_1 -$	$S^2 + 3\mu$
$\widetilde{23}$				$-\tilde{H}_2 \leq$	Kl
$\widetilde{24}$				$\geq \tilde{H}_3 \leq$	$\mathbb{R}P^2$
$\widetilde{25}$				$-\tilde{H}_4 \leq$	$\mathbb{R}P^2$

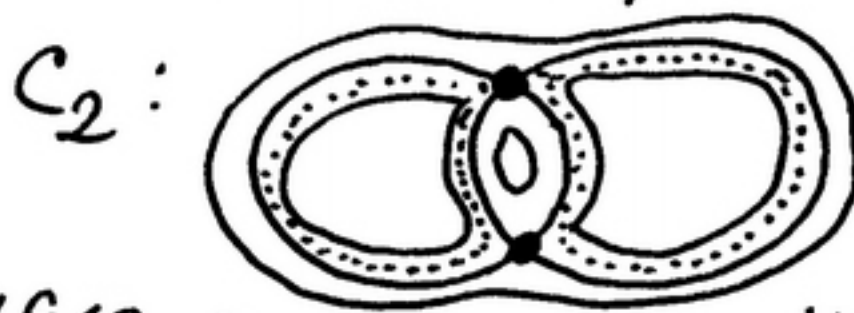
$\Sigma = 2$ (complexity 1) 1● A 1 B	$\Sigma = 4$ (complexity 2) 2 C 2 D	$\Sigma = 58$ (complexity 4) 6 3 8 8 4 9 4 6 4 6				
$\Sigma = 10$ (complexity 3) 3 E 2 F 3 G 2 H						
$\Sigma = 322$ (complexity 5) 26 8 25 5 4 3 7 6 7 16 8 12 3 20 8 12 13 23 4 10 12 6 16 18 10 10 18 12						

- Центральная теорема в теории топологической классификации интег. гамм. систем с 2 степенями свободы (А.Т. Фоменко, Х. Цицант).

инт-гр. гам. системы топологически эквивалентны (т.е. их слоения гомотопичны) на $\mathbb{Q}^3$, если и только если изоморфны их "молекулы", т.е. одномерные графы, вершинами которых служат "атомы", ребра — связывают бифуркации в $\mathbb{Q}^3$, плюс — некоторые числовые метки на ребрах.



- Максимально симметричные атомы: автоморфизмами атома можно перевести любую его вершину в любую, и любое ребро — в любое ребро. Это — наиболее симметричные бифуркации в интег. гамил. системах. Примеры:



- Сложность атома = число его вершин. У атома есть белые кольца и черные кольца. Род атома = род 2-поверхности, получаемой заклеивкой 2-дисками всех его граничных окружностей.
- Проблема: описать (классиф.) все максимально симм. атомы. Весьма сложно. Геометрия, алгебра, теория чисел.
- Эта задача, оказывается, ранее уже обсуждалась в XIX-XX вв. на совсем других языках:
 - правильные конечные карты; • симм. копредст. групп;
 - в теории автоморфных ф-й; • обобщ. правильные многогранники

- Исследования: Кокстер, Тремфалл, Браха, Гарбе, Хивуд (Hewood), Шерк (Sherk), Хартер (Harter), Ширан (Širan), МакМюллен (McMillen), Шульте (Schulte), Мозер, Клейн, Дик...
 - В 2008 году были завершены наши исследования:
Е. А. Кудрявцева, Ч. М. Никонов, А. Т. Фоменко.
- Обнаружен метод классификации максим. симм. атомов с помощью макриты.
- Одно из следствий: описание всех макс. симм. атомов сложности ≤ 30 .

В третьей части работы (§8–9) перечисляются все максимально симметричные ориентированные атомы следующих типов:

- атомы сложности $n \leq 30$ (§9),
- атомы, имеющие не более 6 белых колец (§8),
- атомы сложности p или $2p$, где p — простое число (§9).

Отметим, что описание (в терминах правильных карт и копредставлений групп) максимально симметричных ориентированных атомов с двумя белыми кольцами имеется в работе Браханы [B27, с.280], а с числом белых колец, не превышающем 5, — в работе Гарбе [G69].

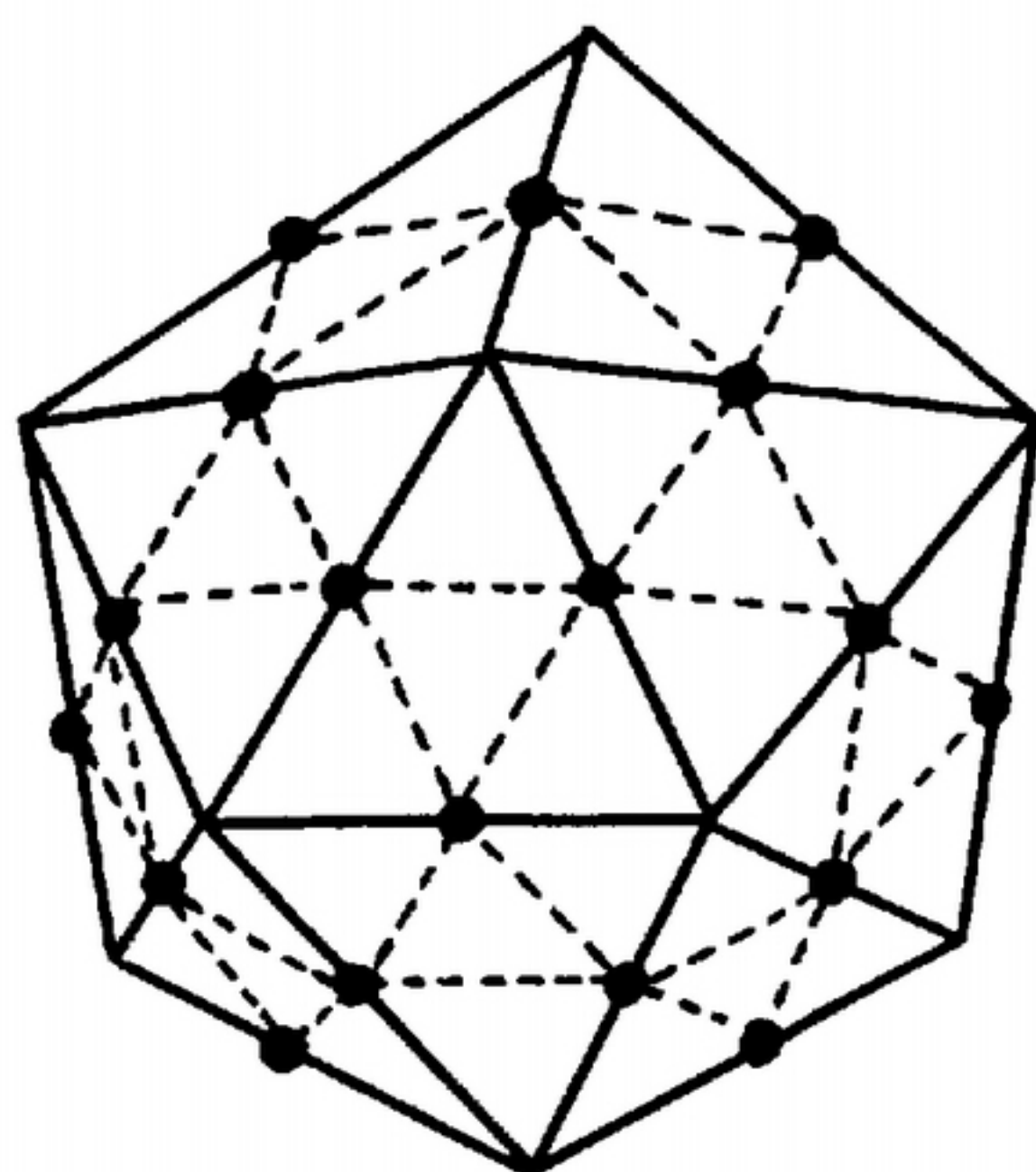
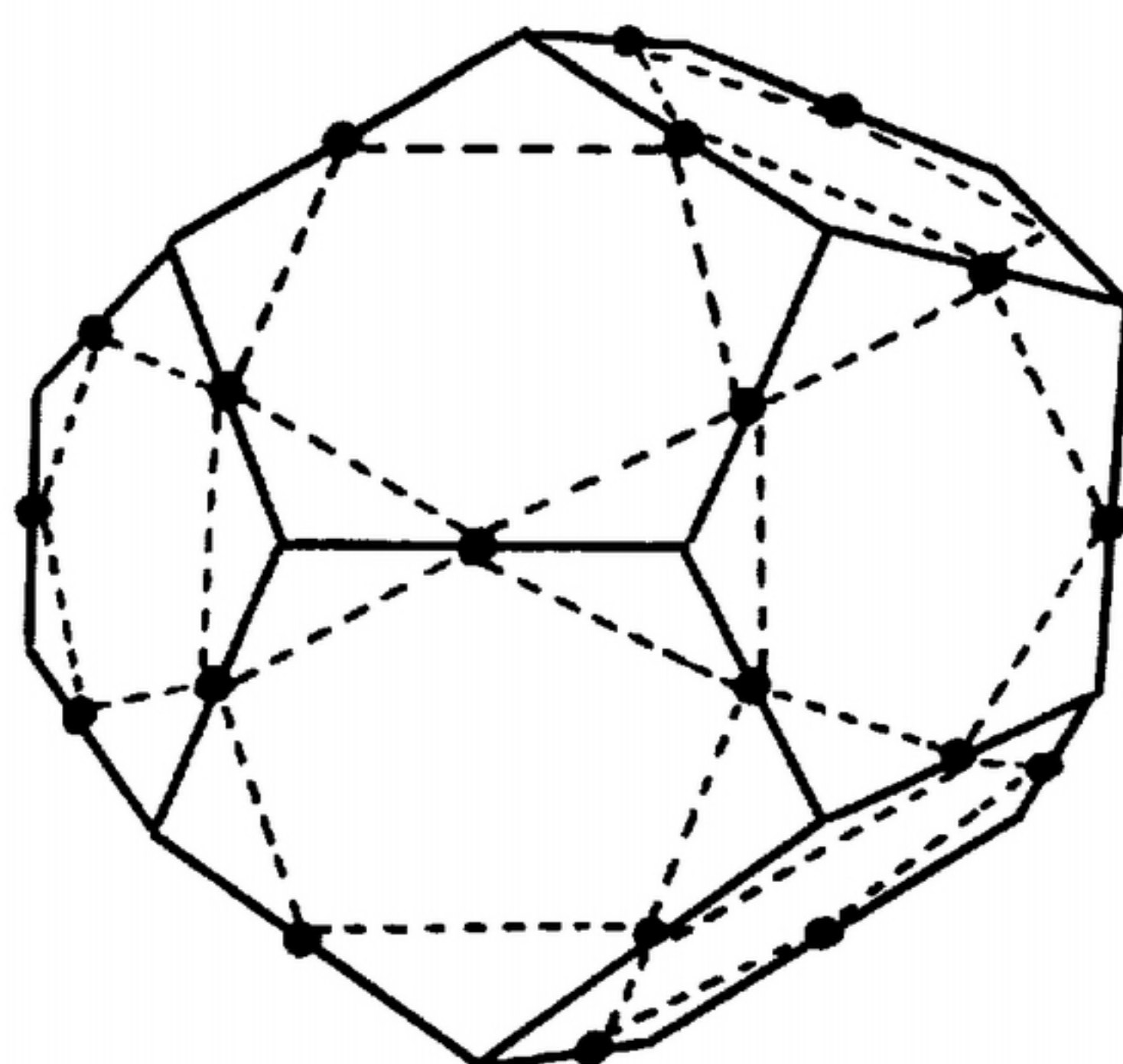
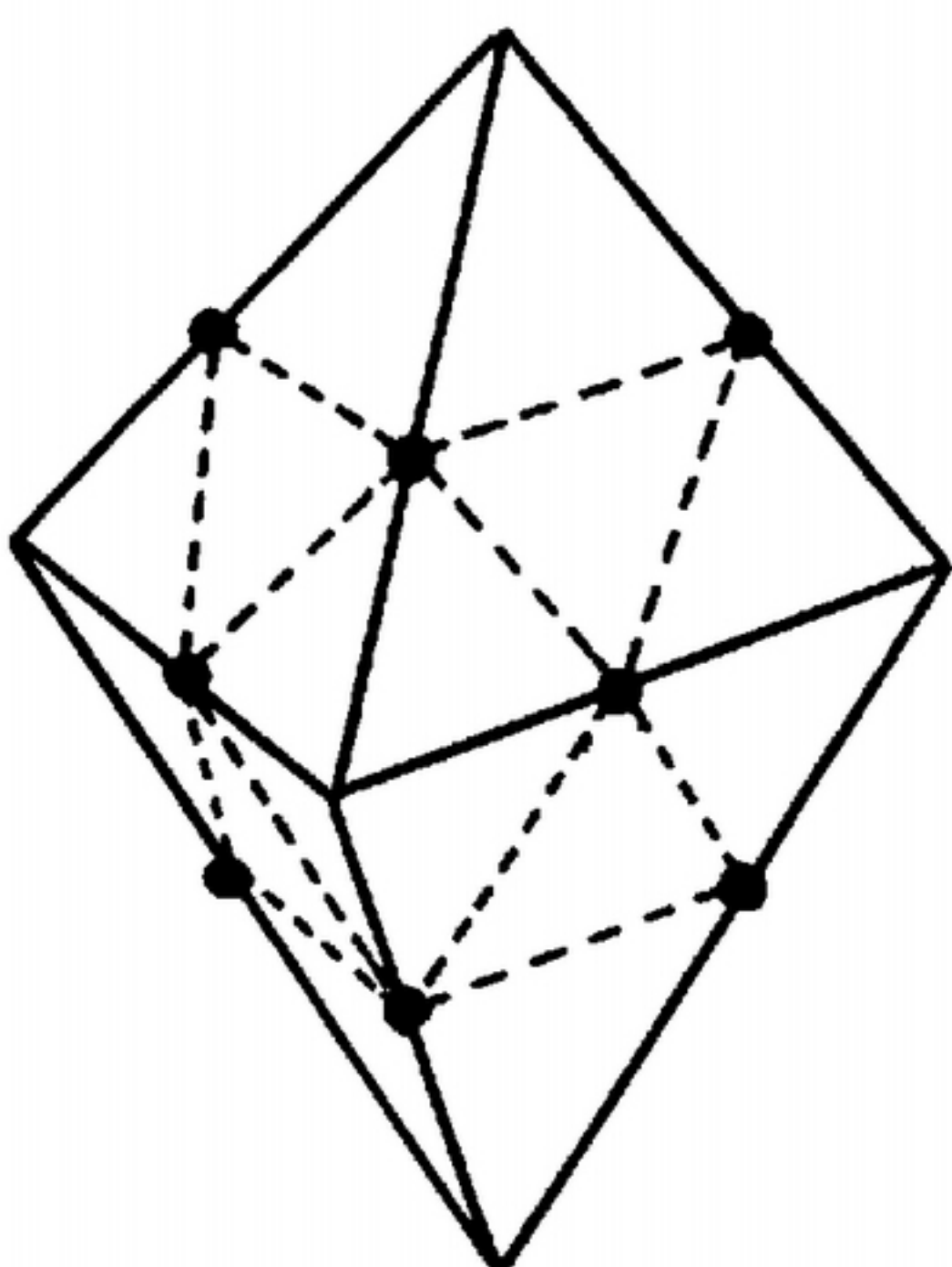
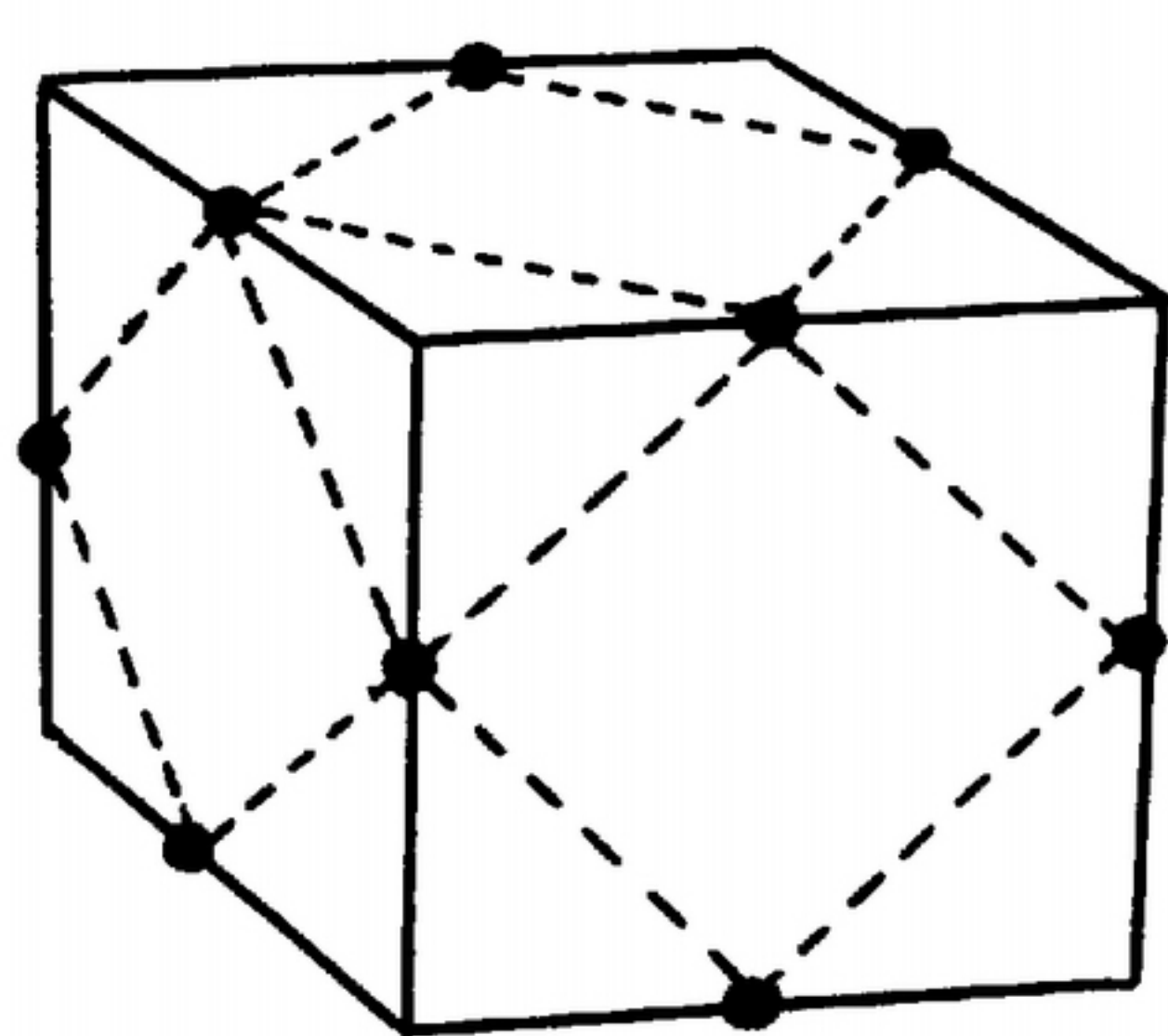
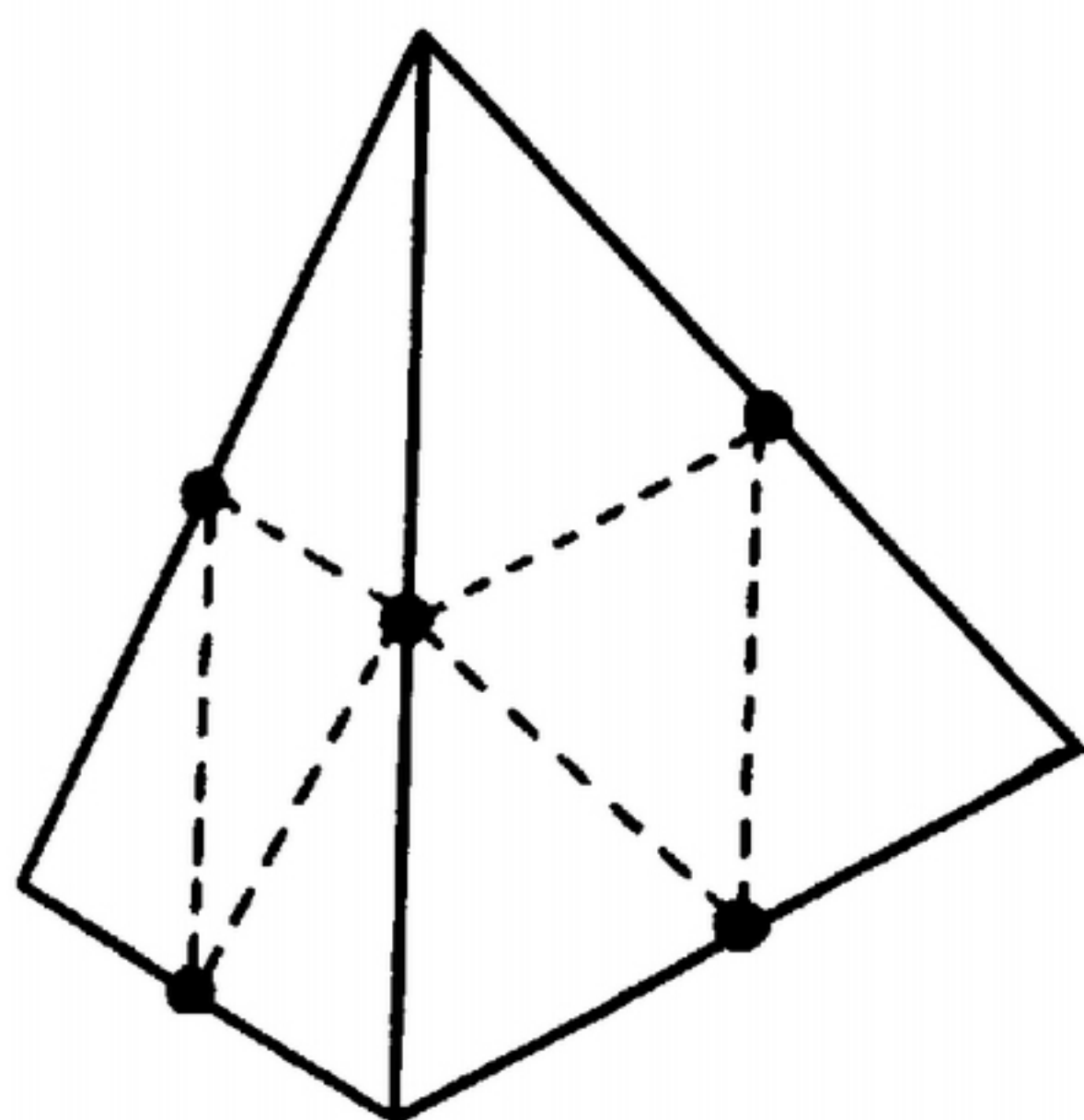
В частности, в настоящей работе доказаны следующие теоремы.

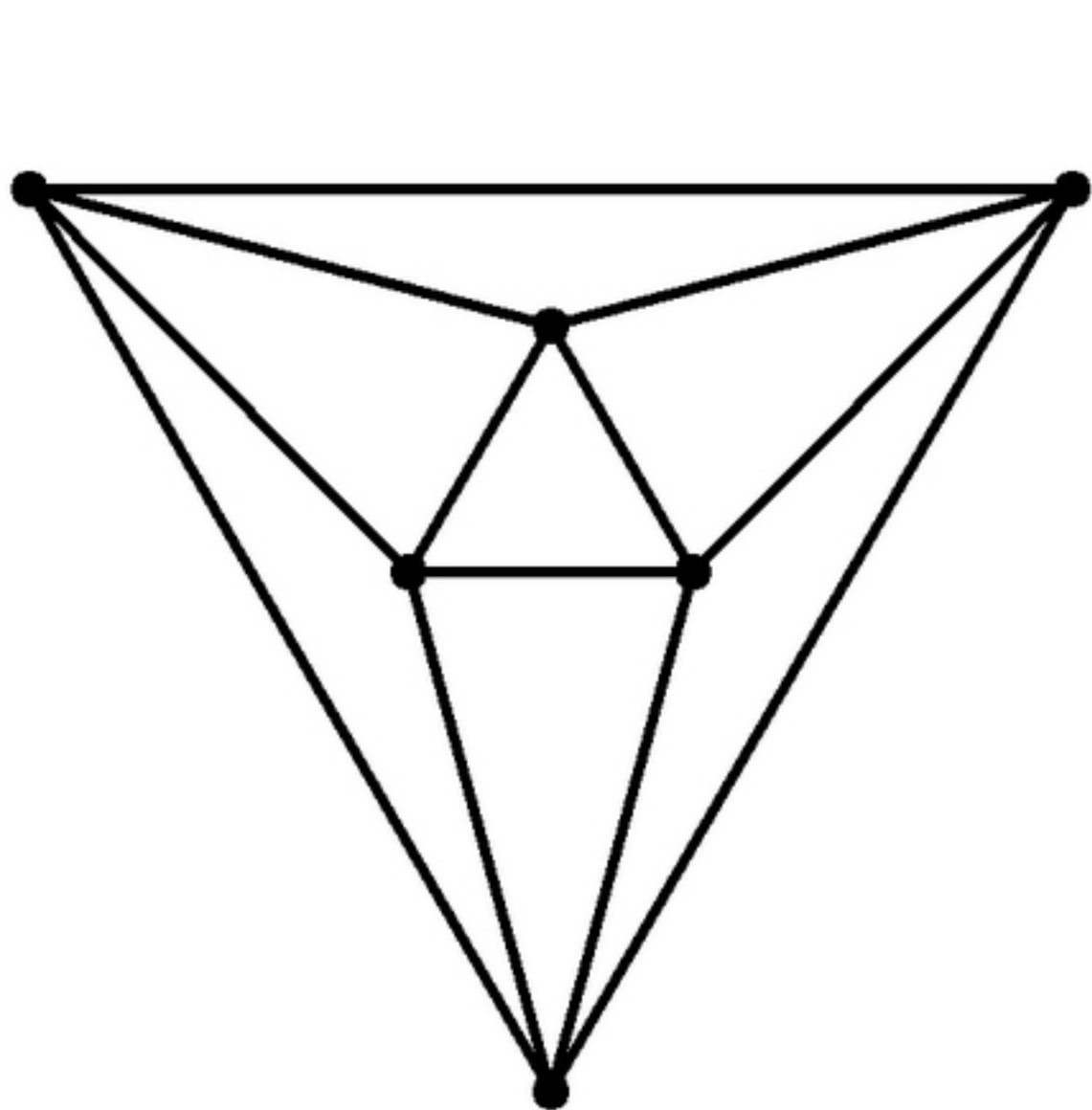
Теорема А (см. Теорему 4.15). Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом и H — конечная абелева группа. Тогда симметричные разветвлённые накрытия $f: X \rightarrow Y$ с группой монодромии H (см. Определение 4.10) классифицируются наборами

$$(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g}), \quad l, m \in \text{Aut}(H), \quad q, r, c_1, \dots, c_{2g} \in H,$$

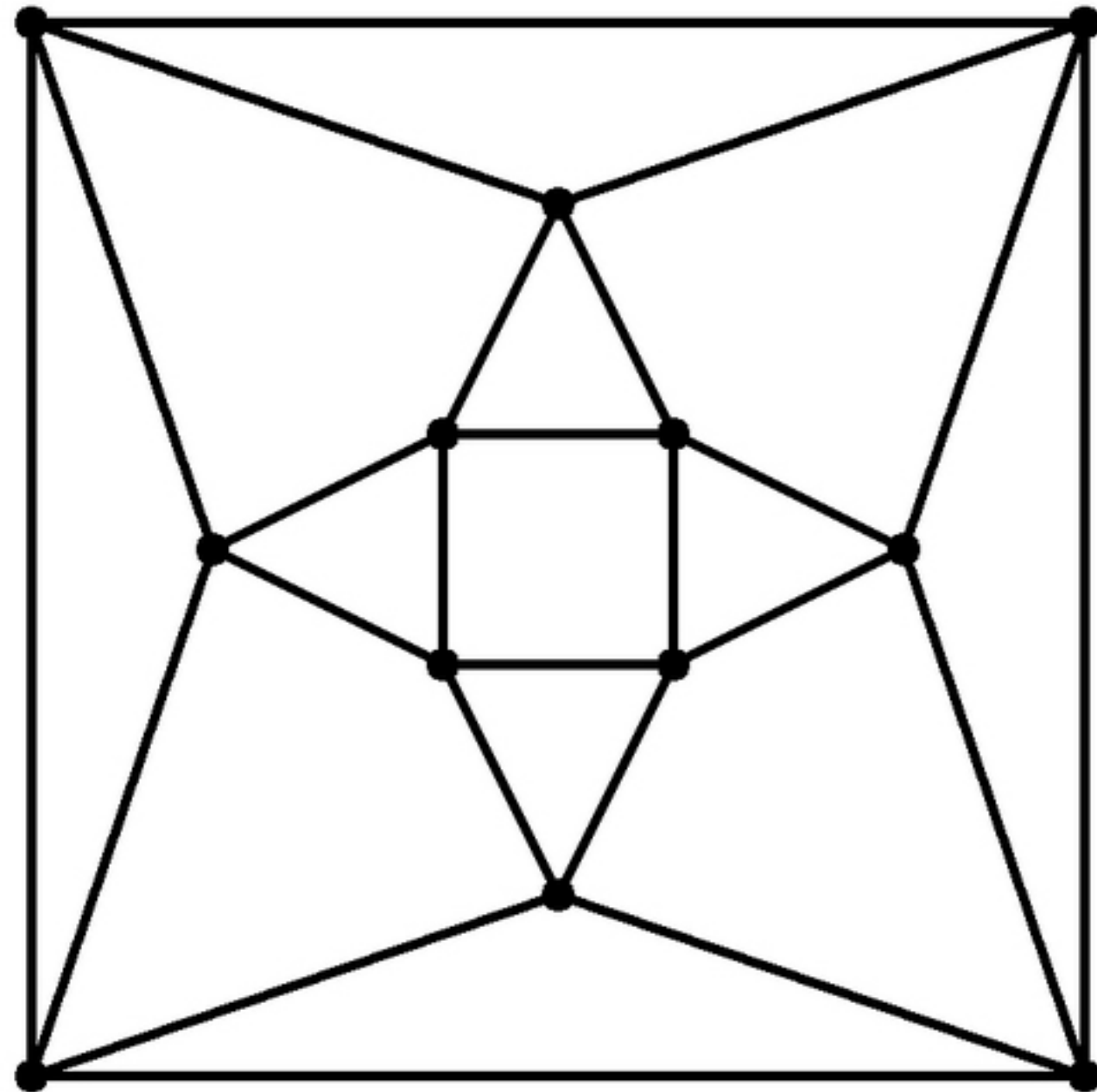
удовлетворяющими условиям 4–6 в Теореме 4.15 ниже, где g — род атома Y , и наборы рассматриваются с точностью до преобразований $(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g}) \mapsto (\lambda l \lambda^{-1}, \lambda m \lambda^{-1}, \lambda(q), \lambda(r), \lambda(c_1), \dots, \lambda(c_{2g})), \lambda \in \text{Aut}(H)$.

Теорема Б (см. Теорему 9.2). Пусть n — простое число или $n \in \{1, 4, 2p\}$, где p — простое число, $p \equiv 3 \pmod{4}$ и $p \neq 3$. Тогда A_n, B_n, C_n, D_n (см. 1.4) исчерпывают собой список всех классов изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов сложности n (т.е. любой максимально симметричный ориентированный атом сложности n принадлежит одному из перечисленных классов изоморфности ориентированных атомов).

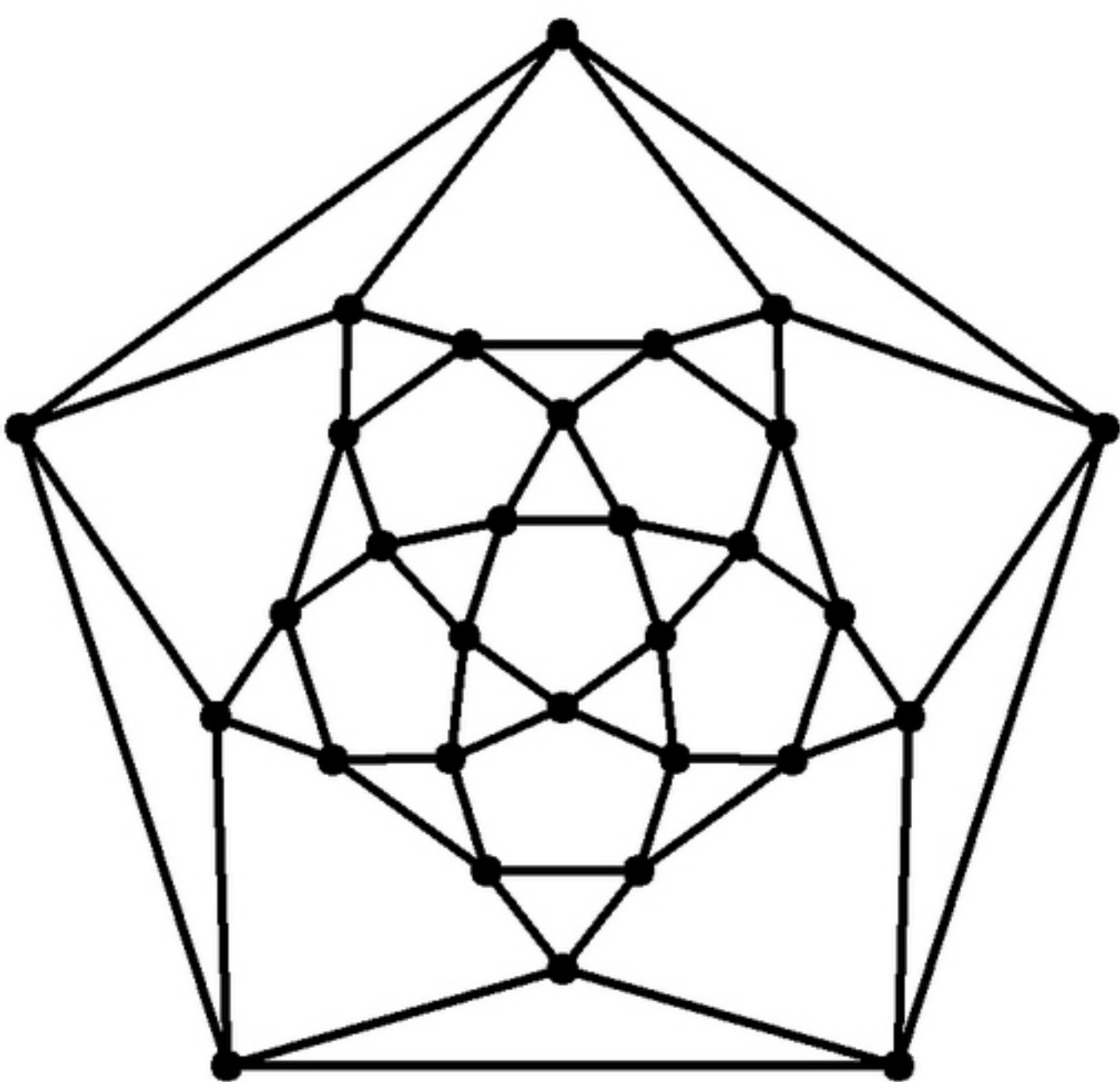




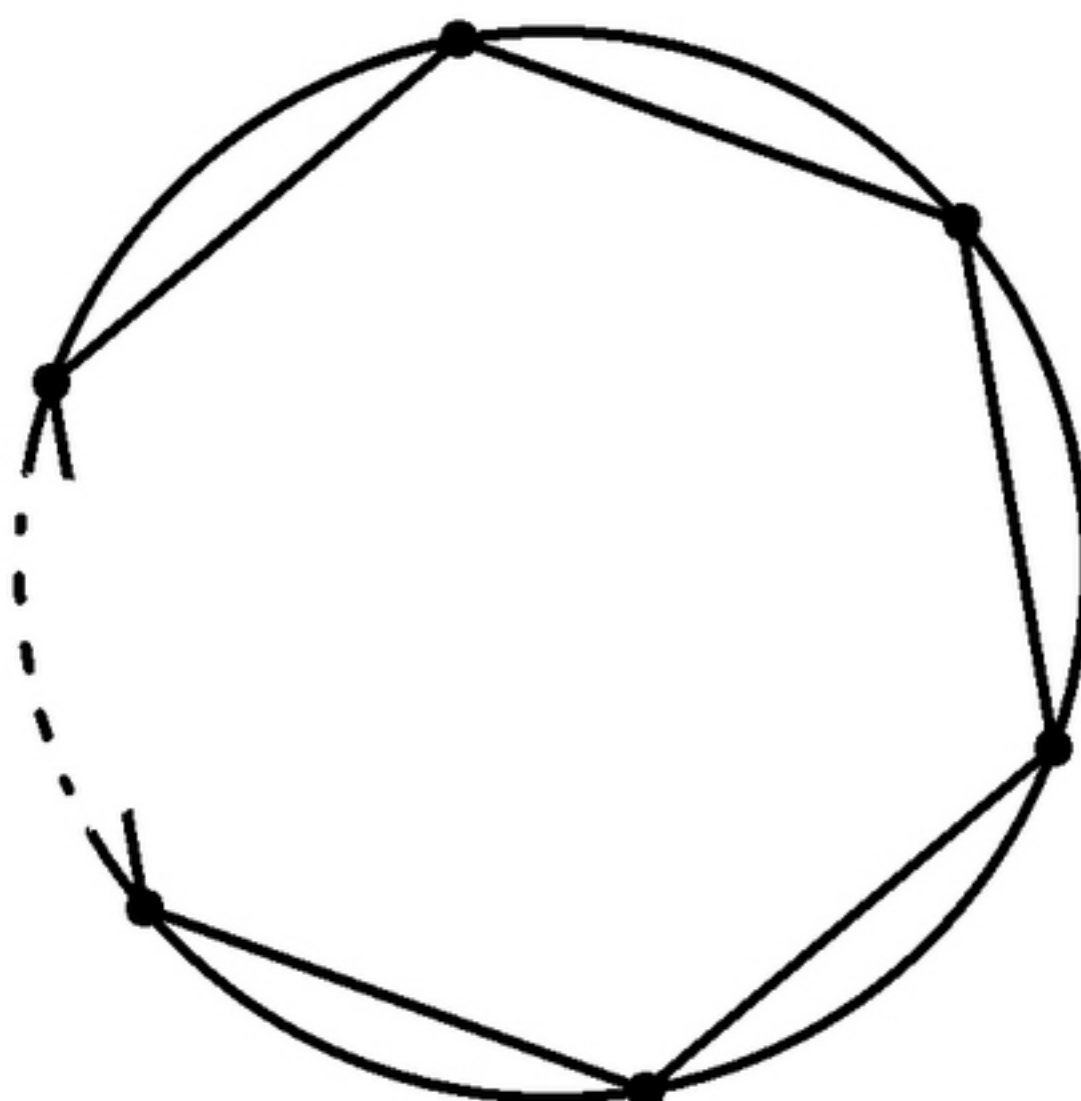
(a)



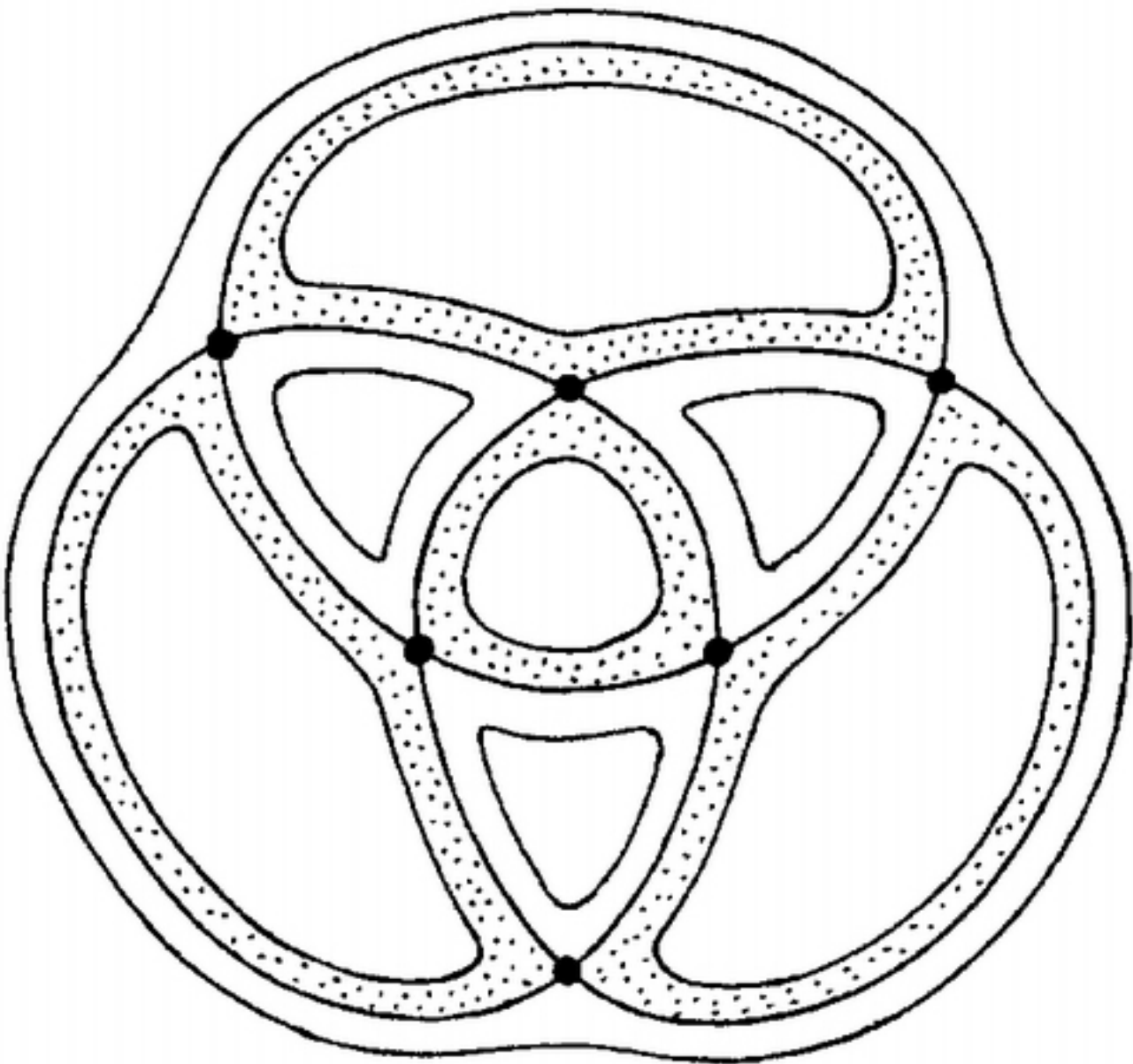
(b)



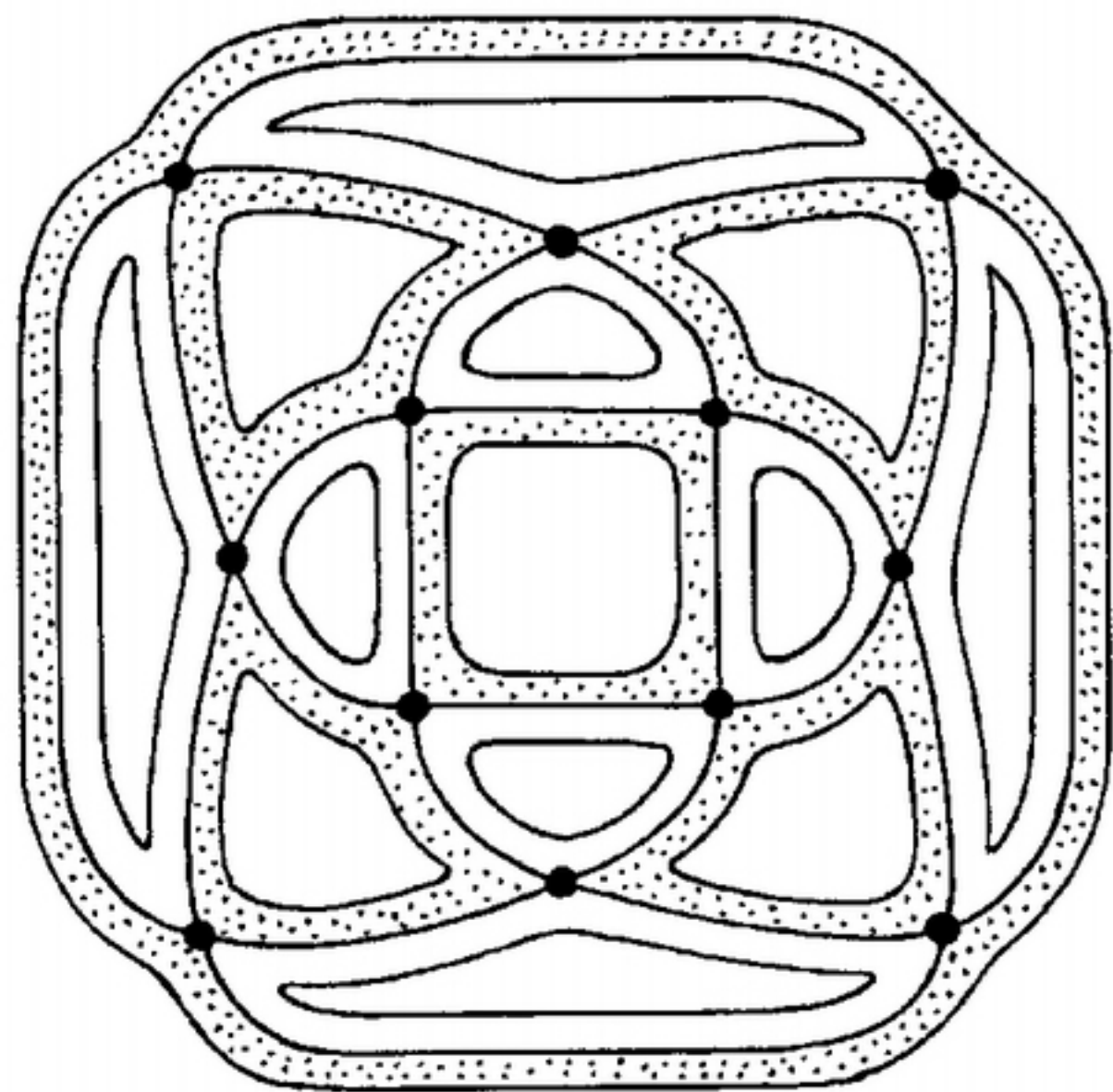
(c)



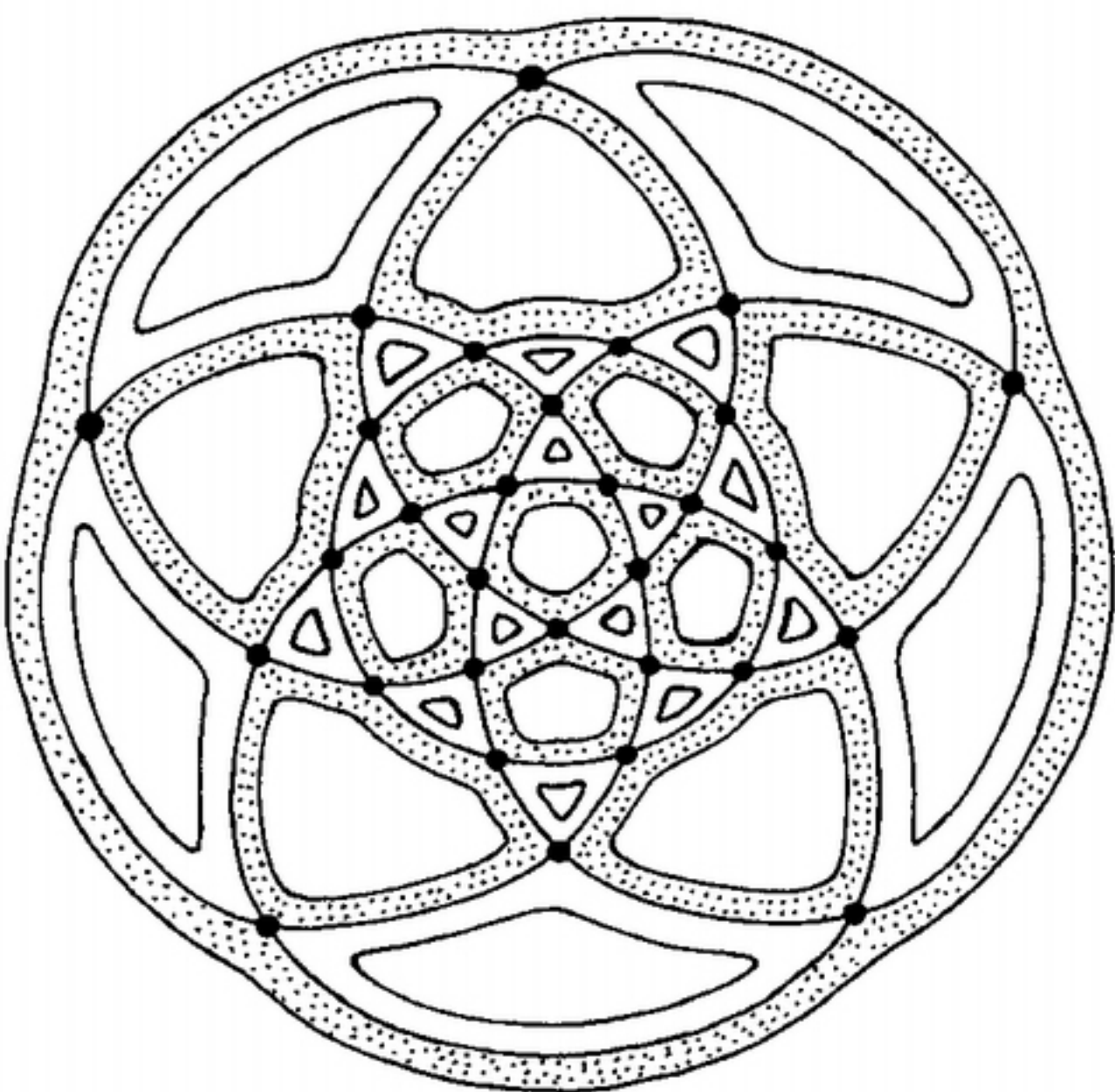
(d)



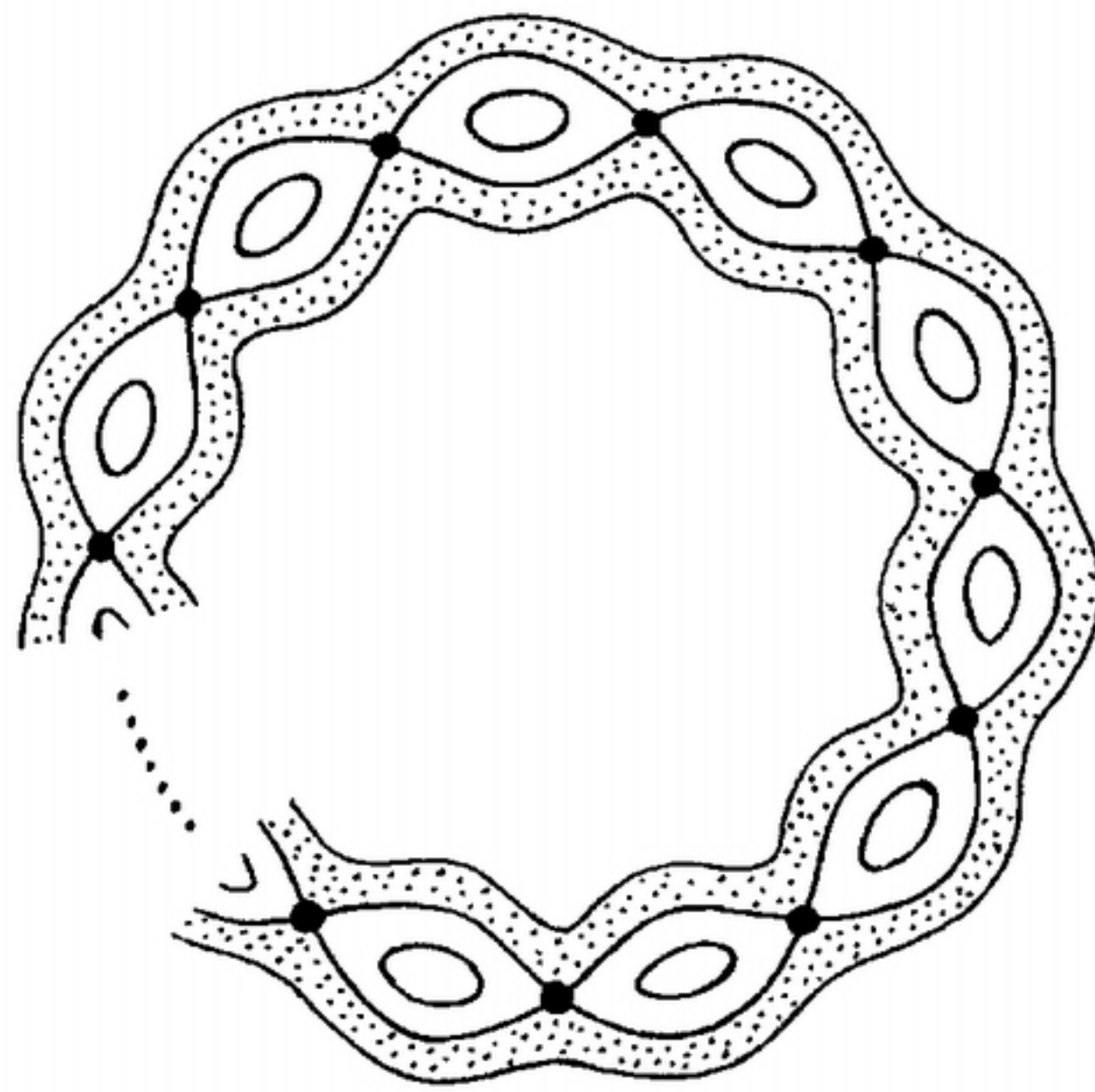
(a)



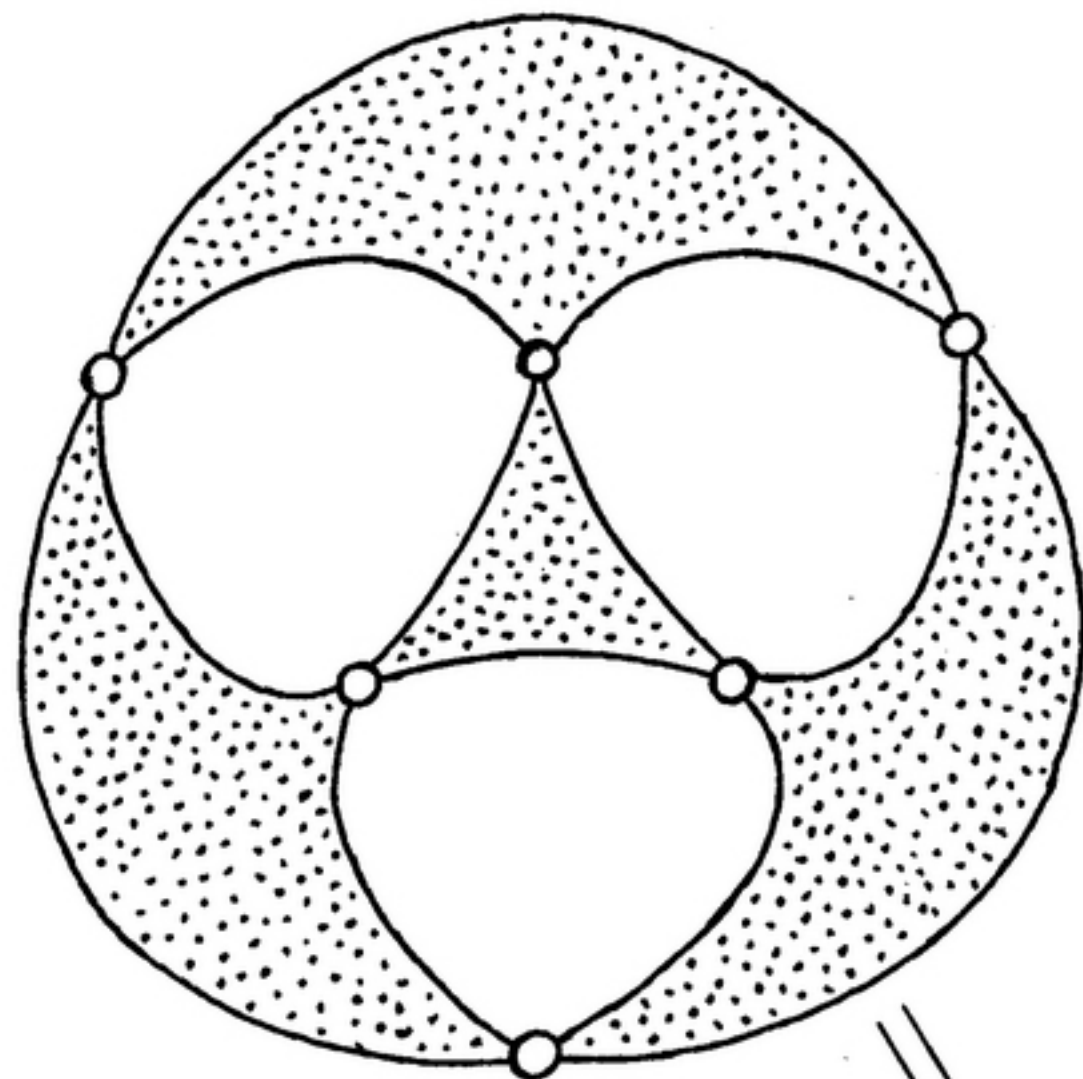
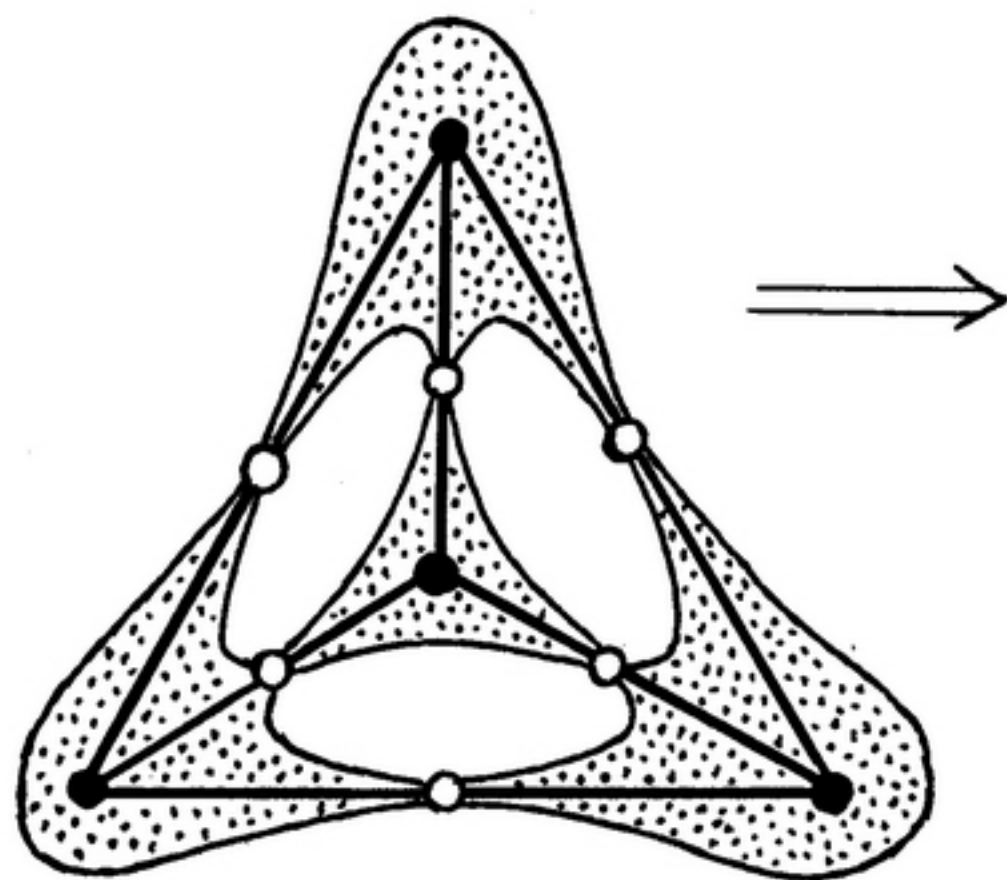
(b)



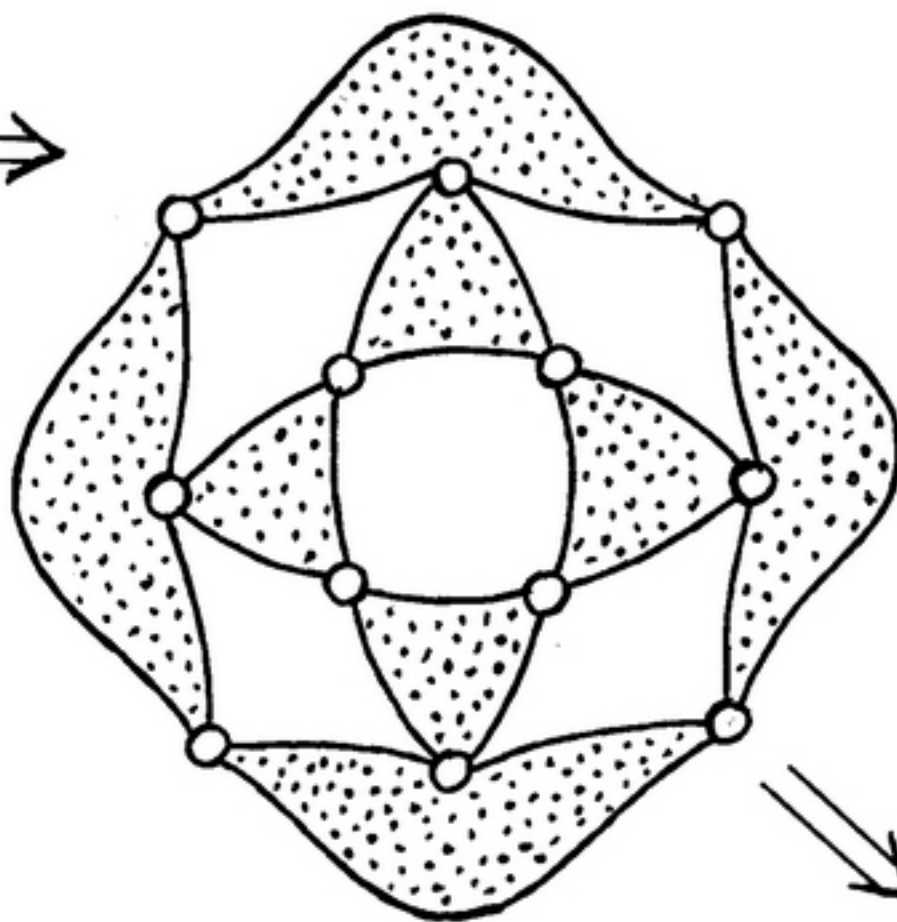
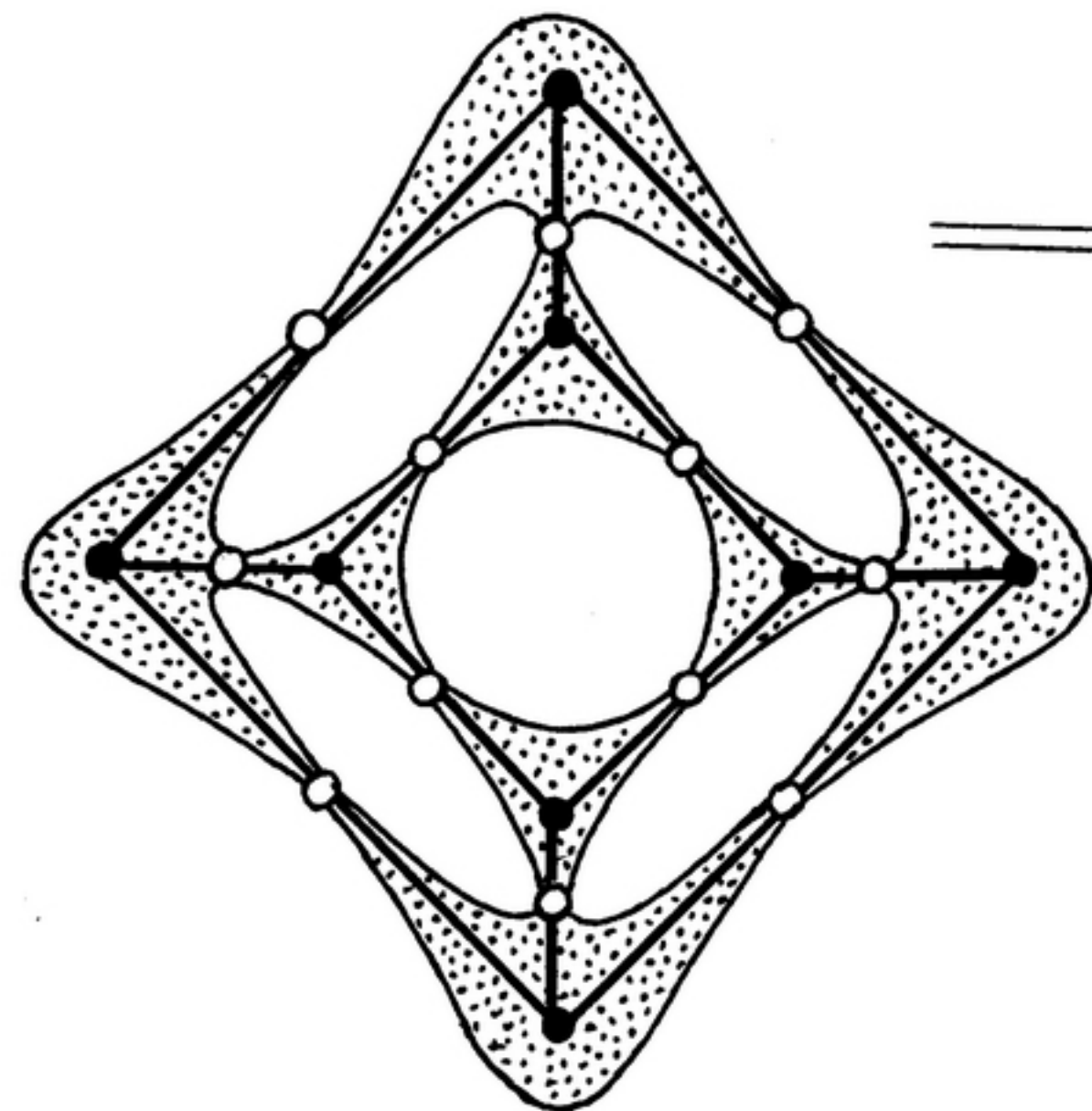
(c)



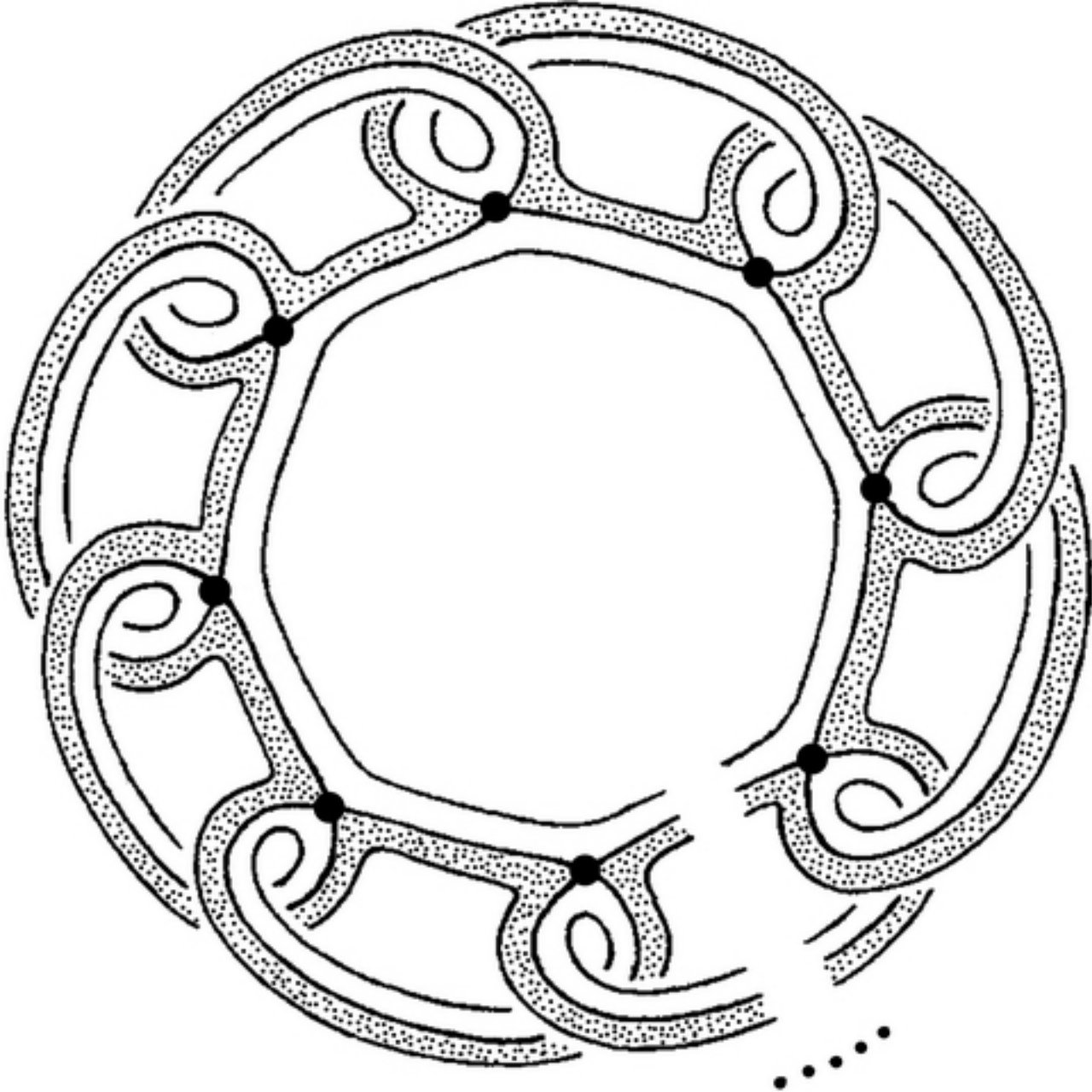
(d)



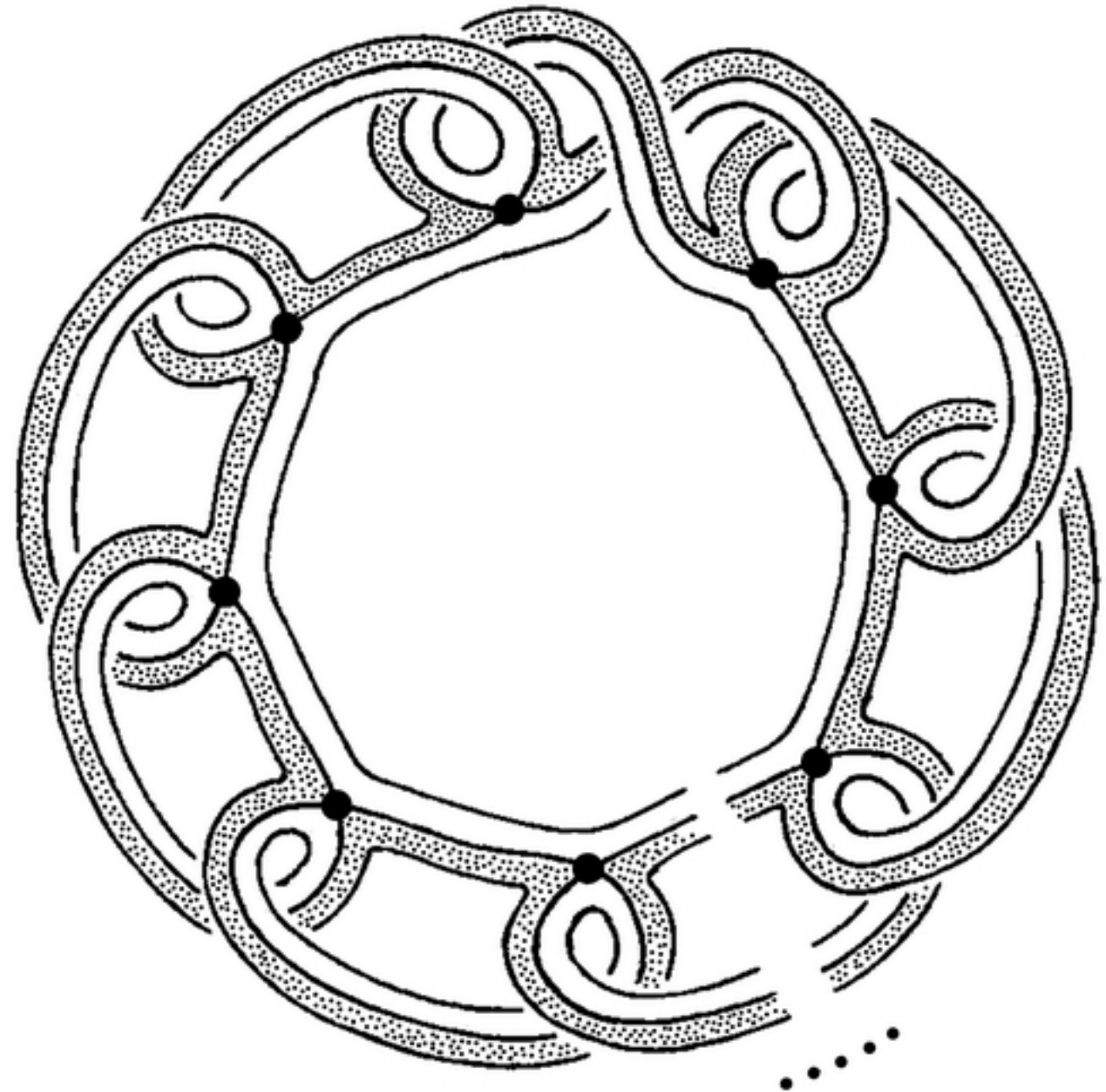
P_1



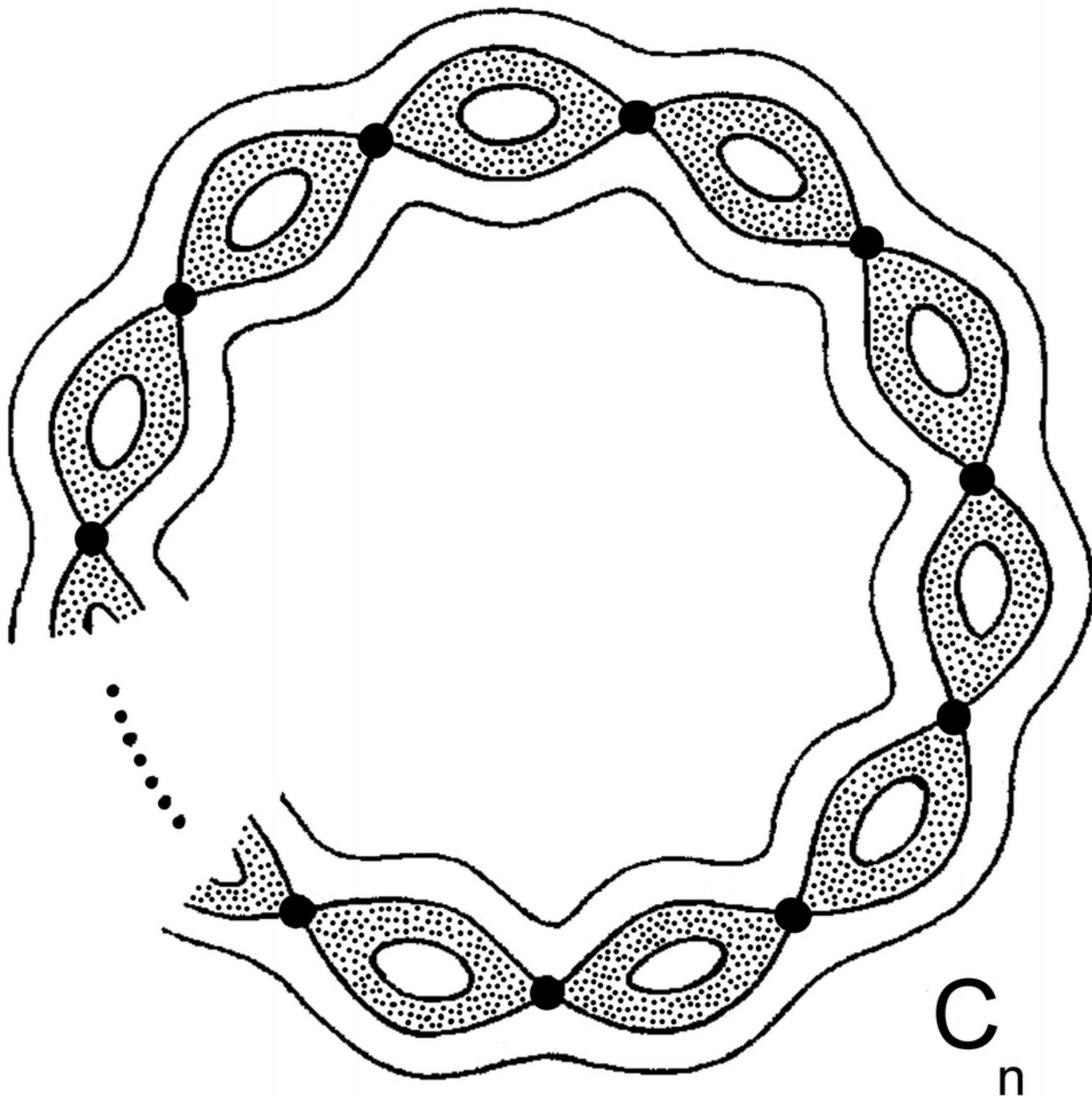
P_2

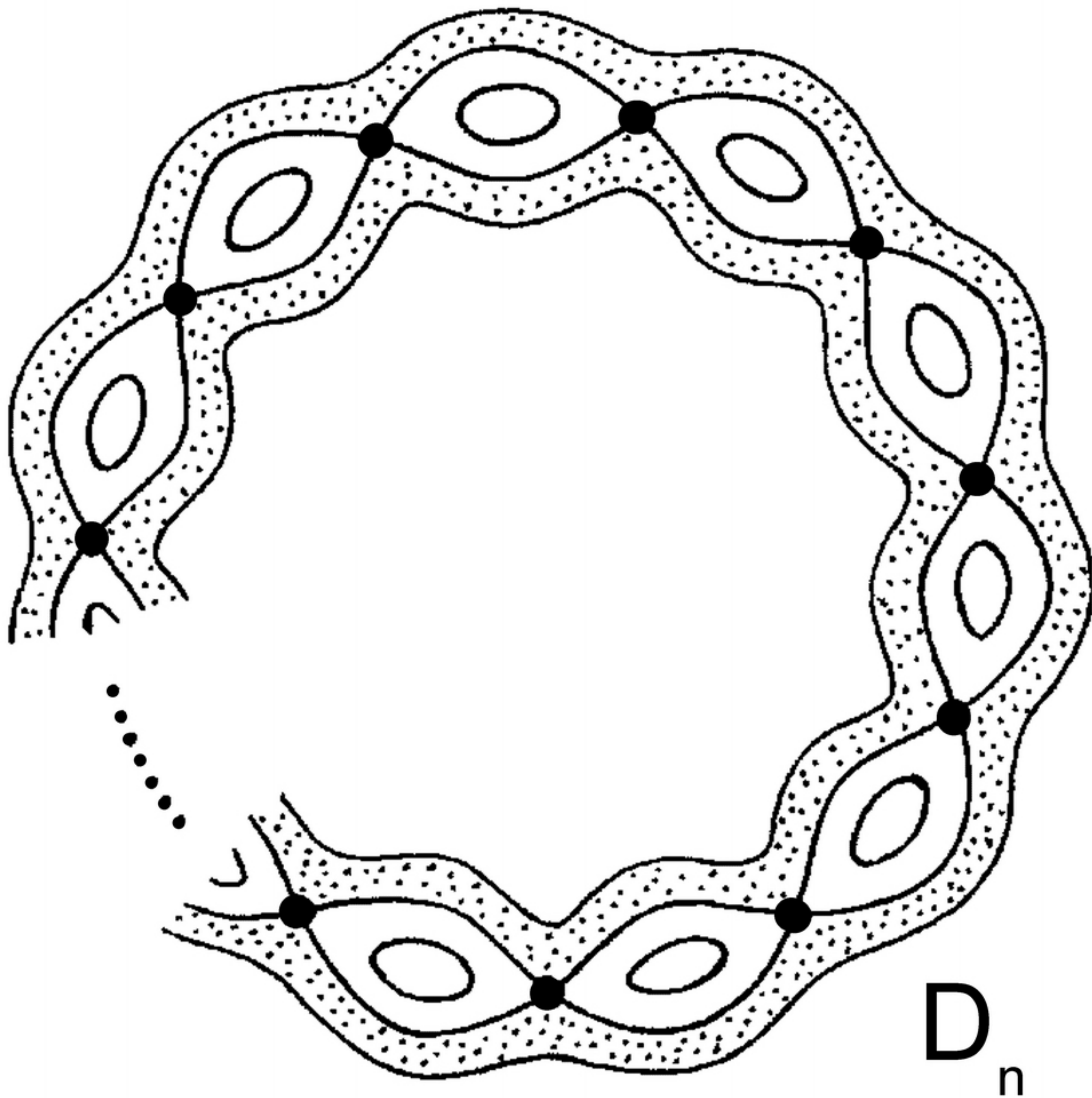


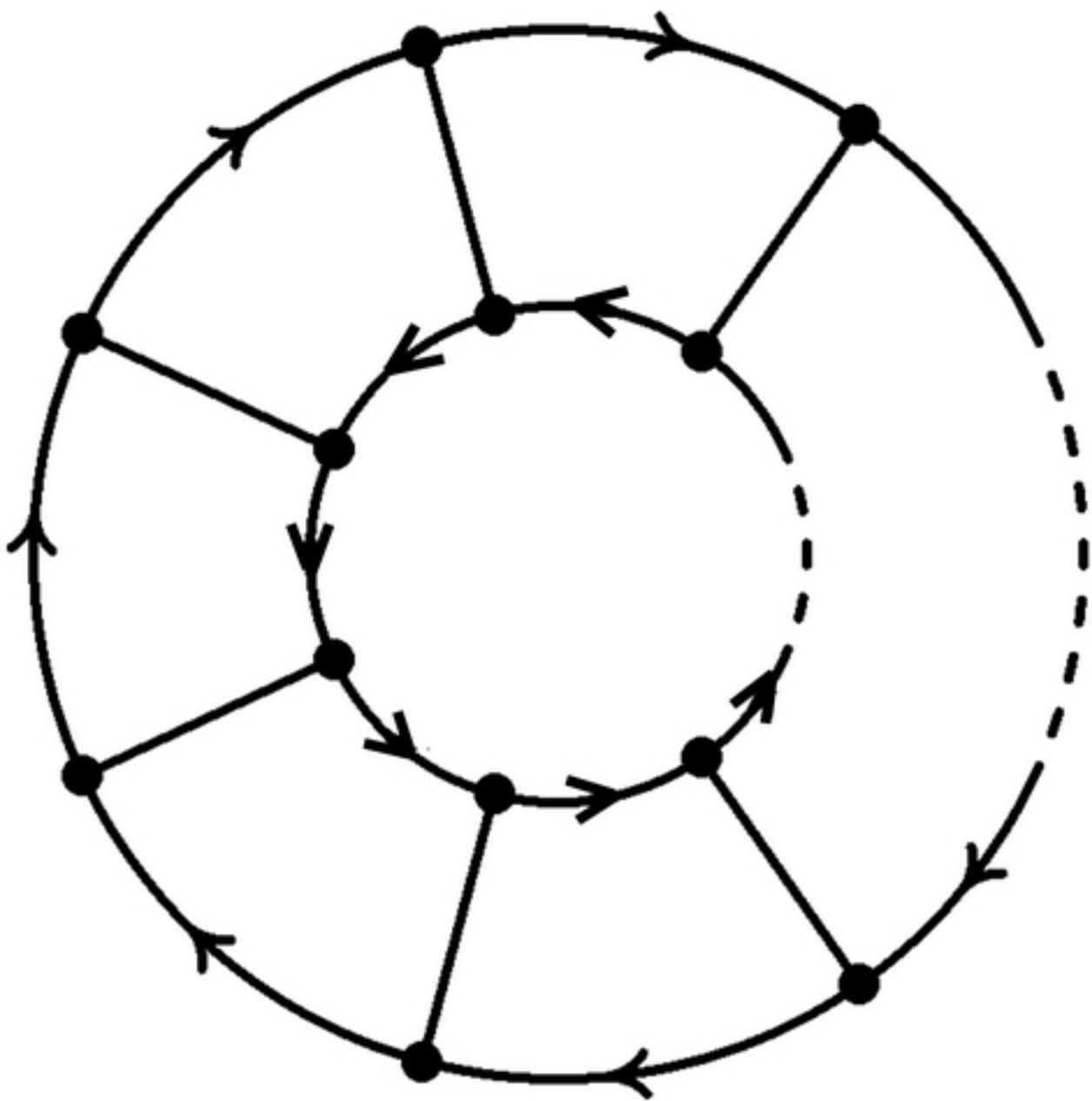
B_n



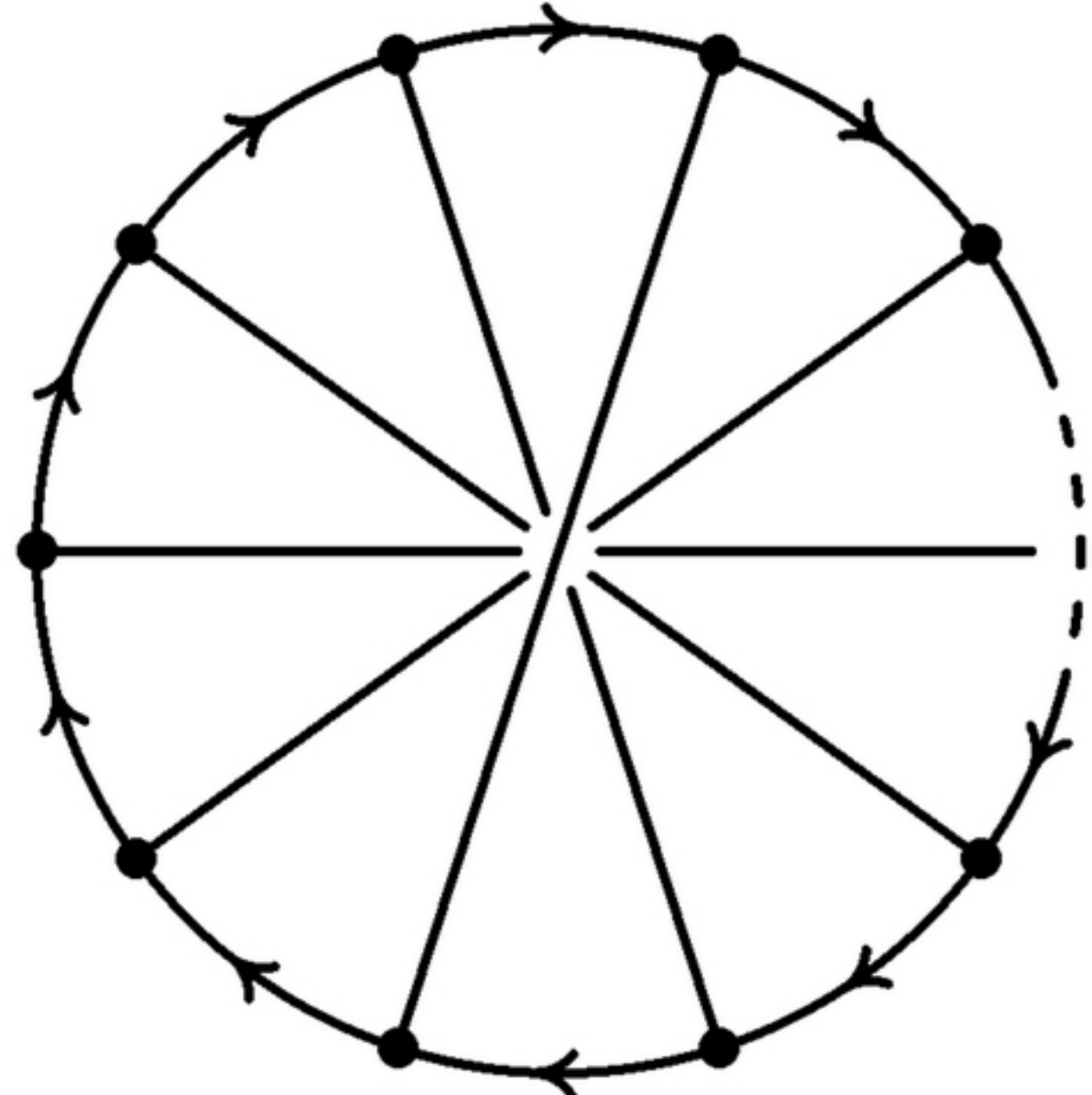
A_n



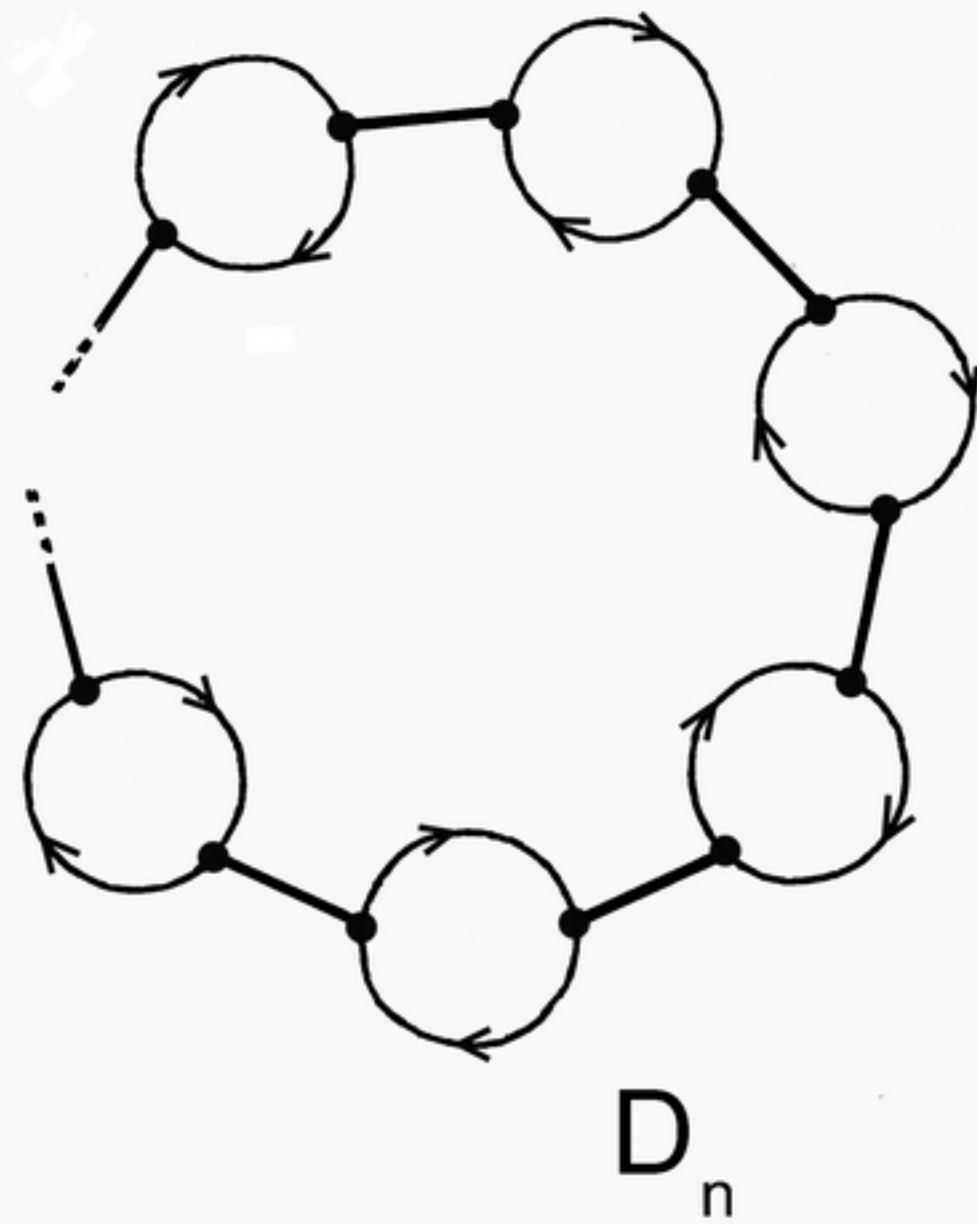
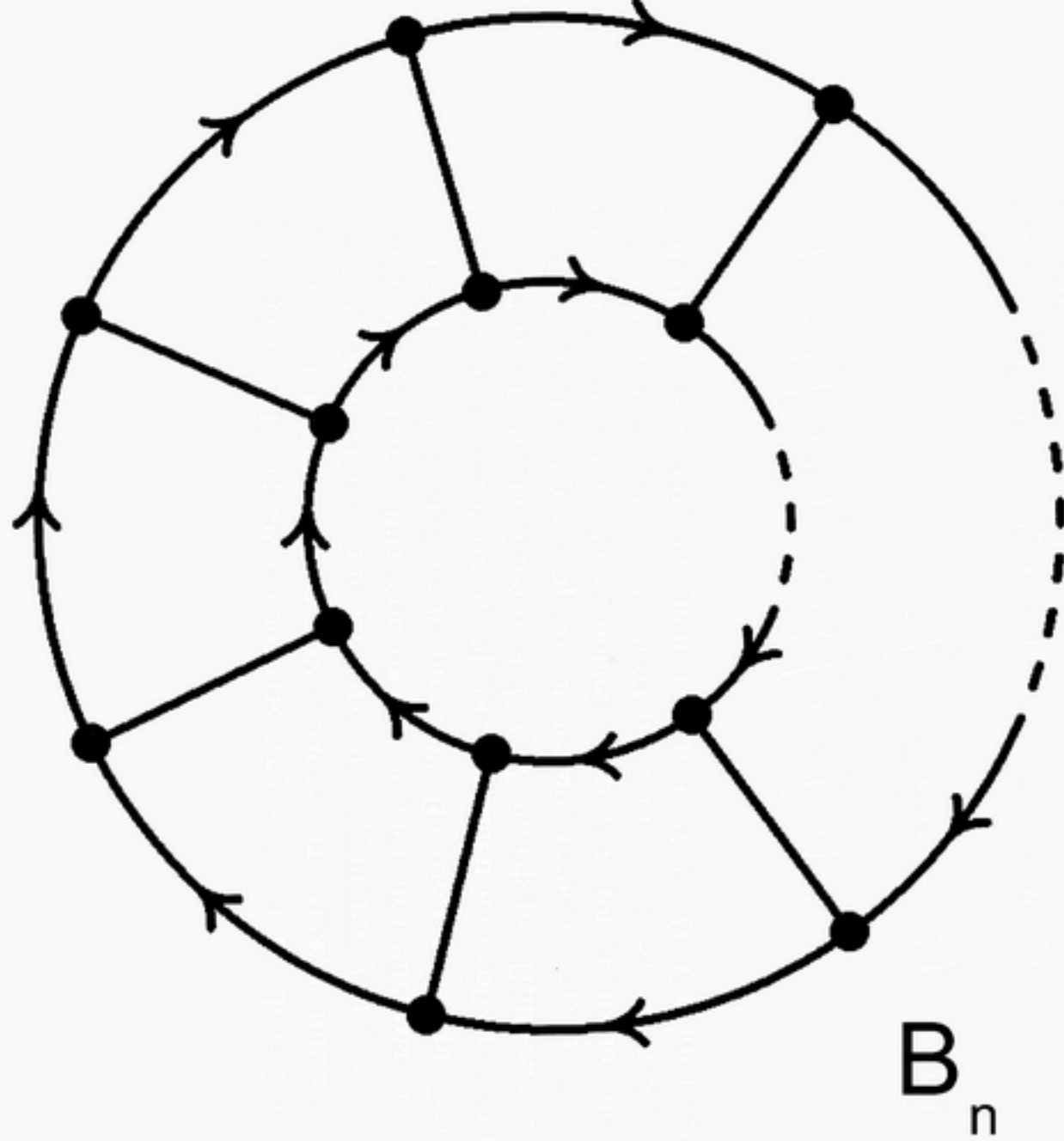


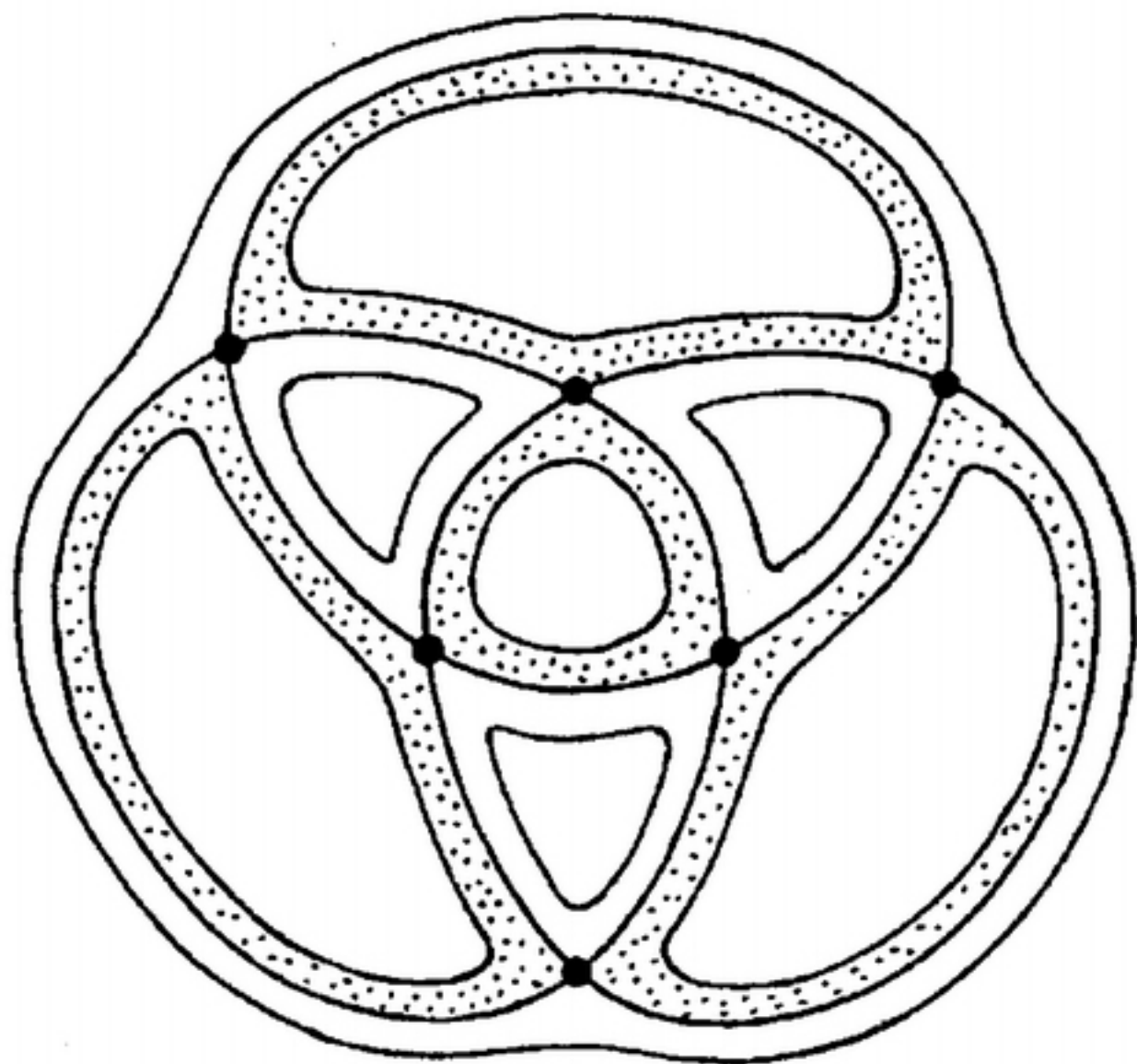


C_n



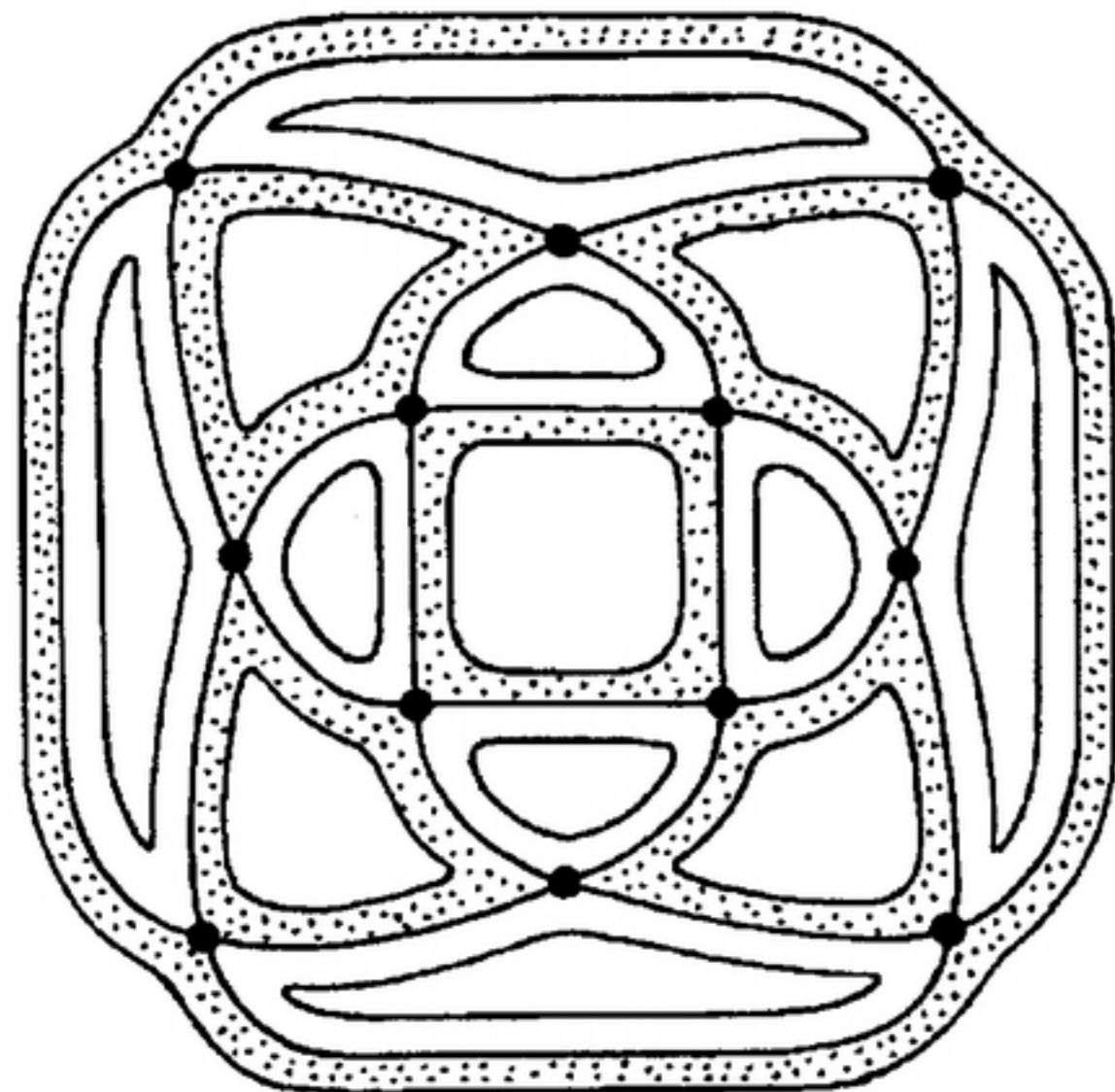
A_n





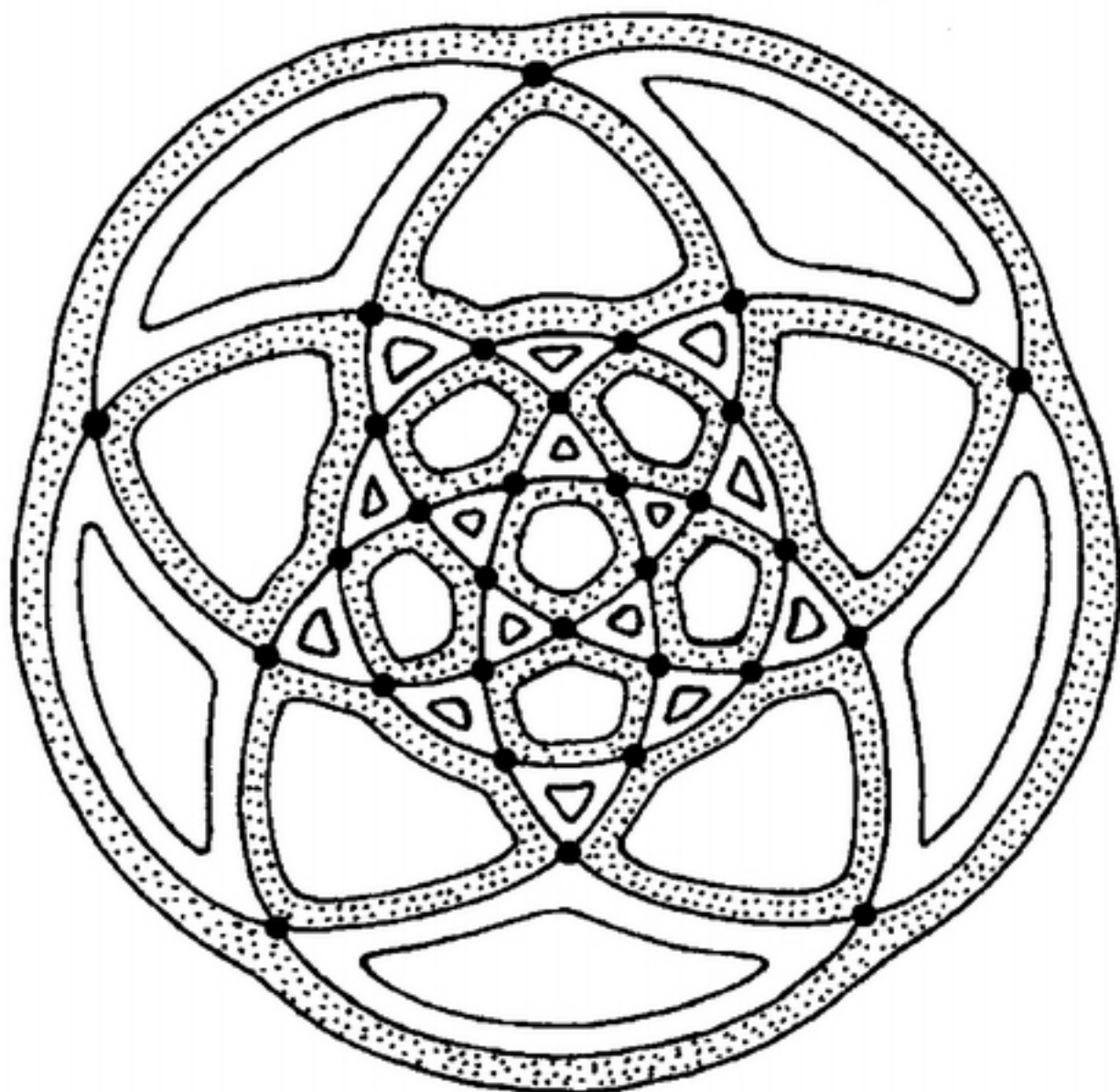
P_1

усеченный
тетраэдр



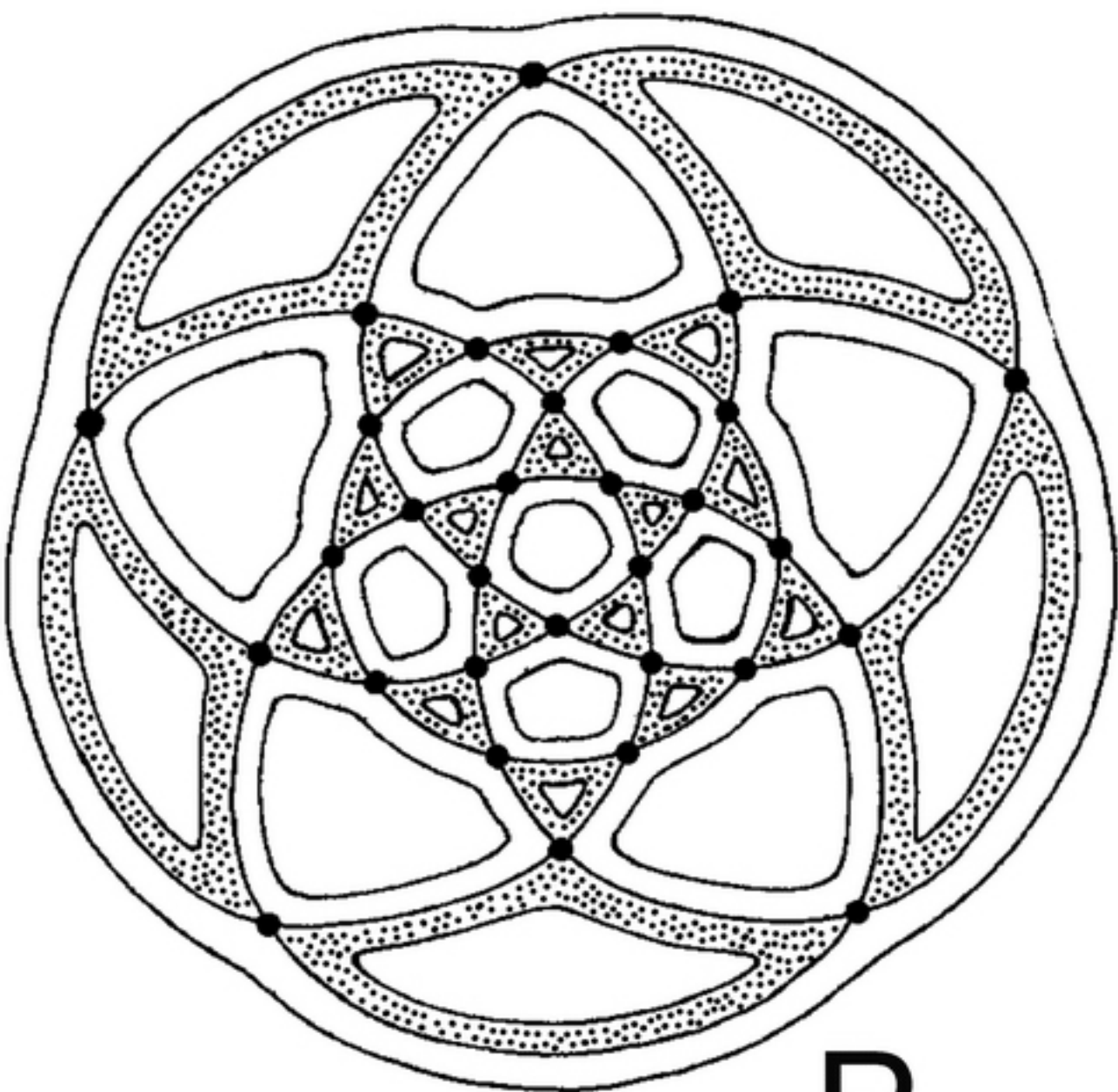
P_3

усеченный октаэдр



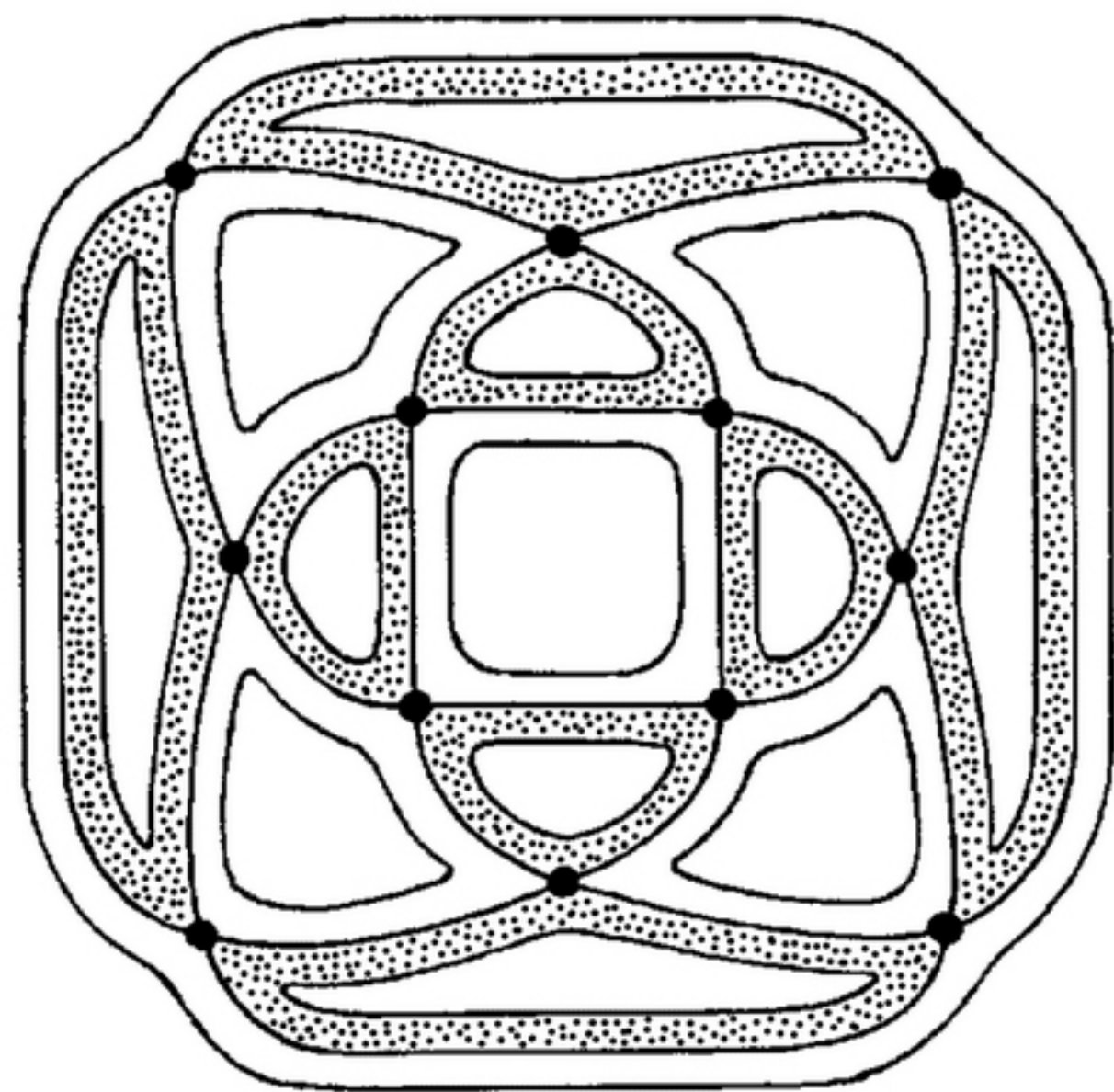
P_5

усеченный
икосаэдр



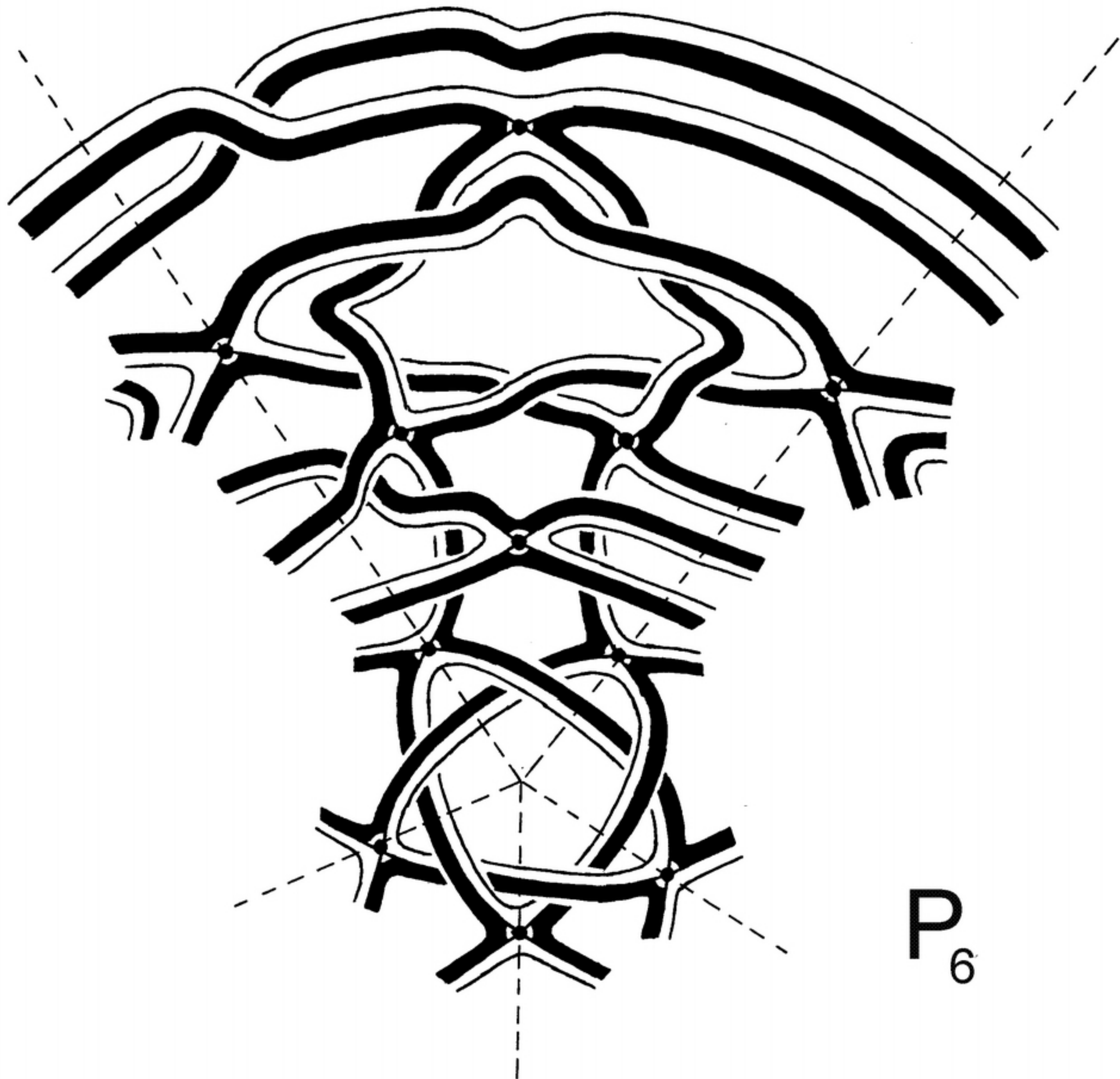
усеченный
додекаэдр

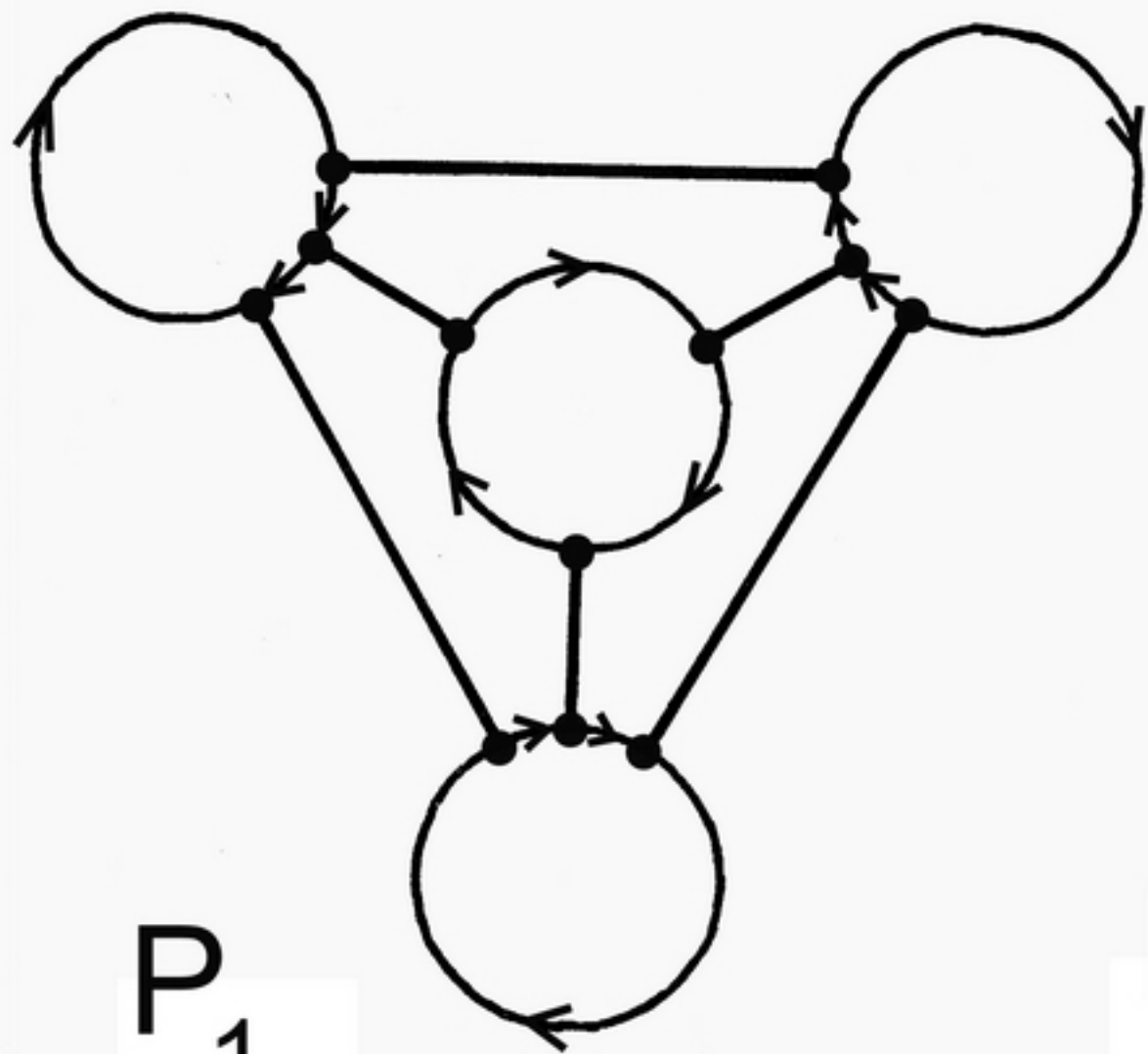
P_4



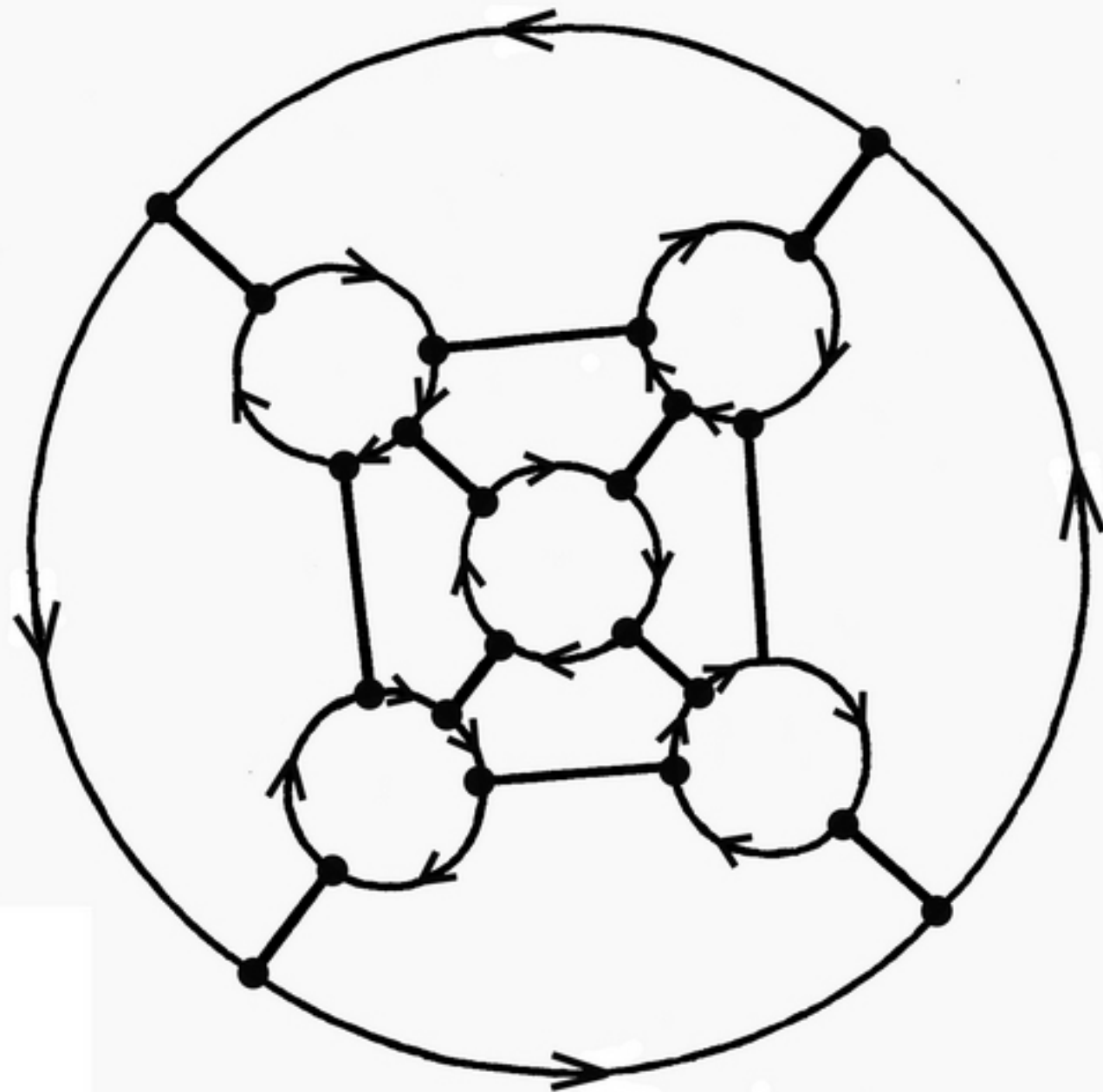
усеченный куб

P_2

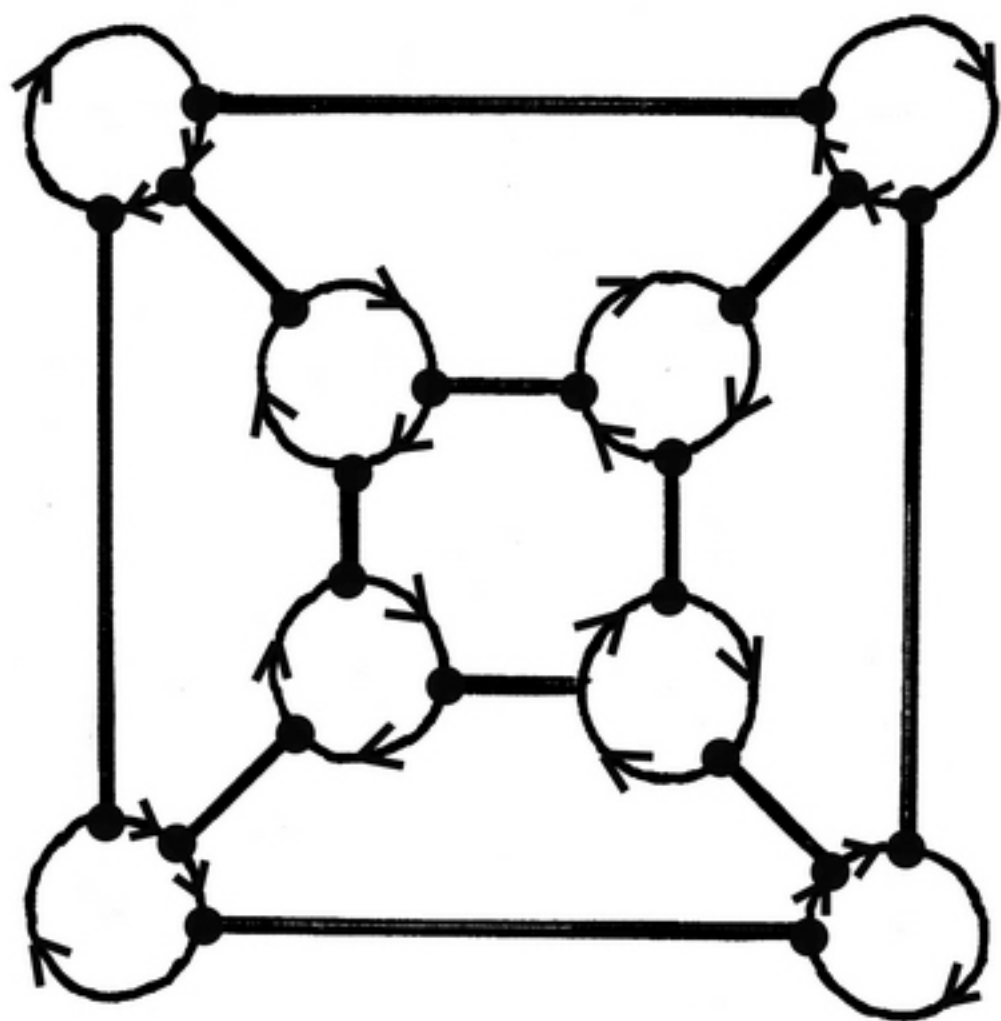




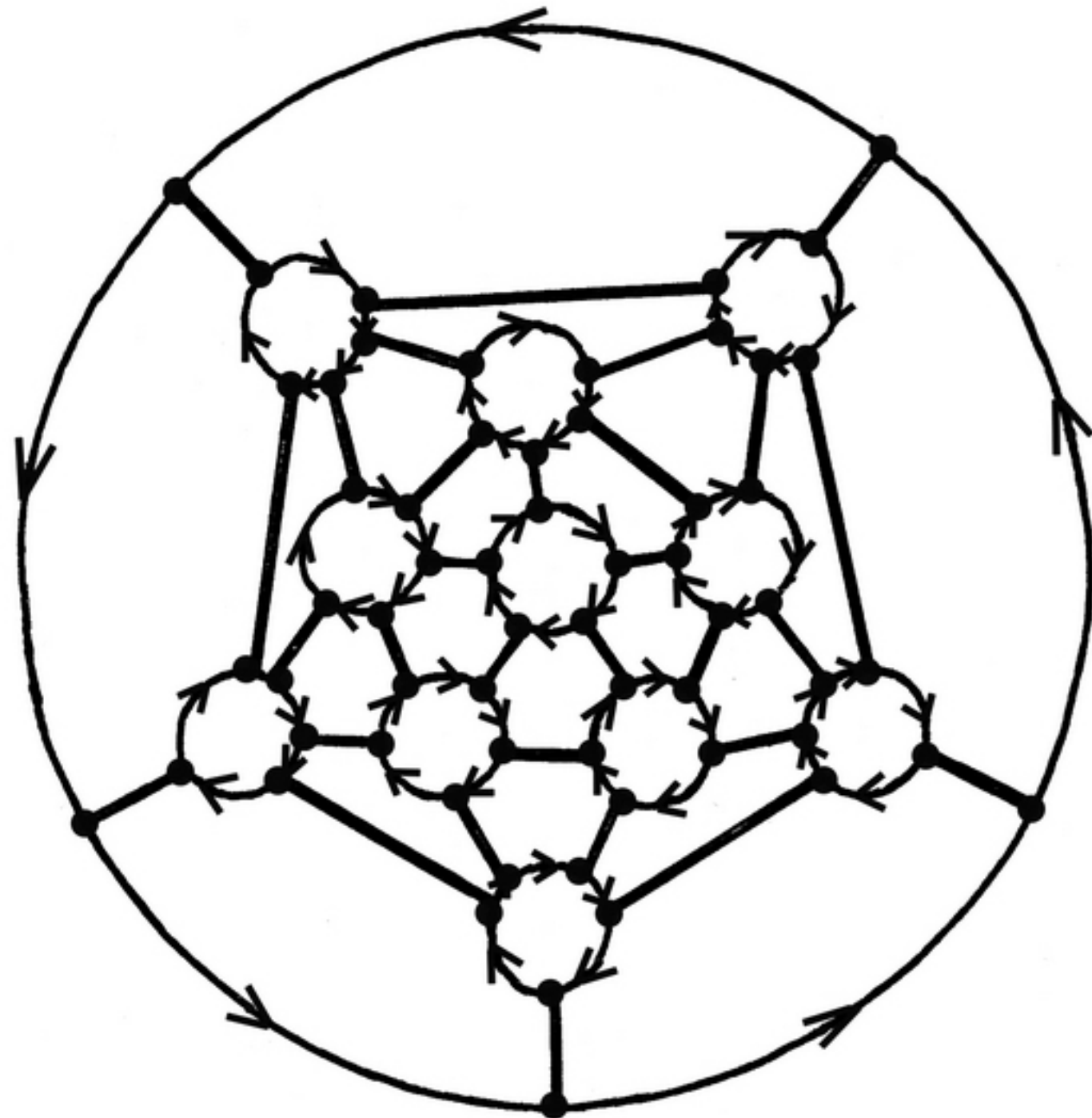
P_1



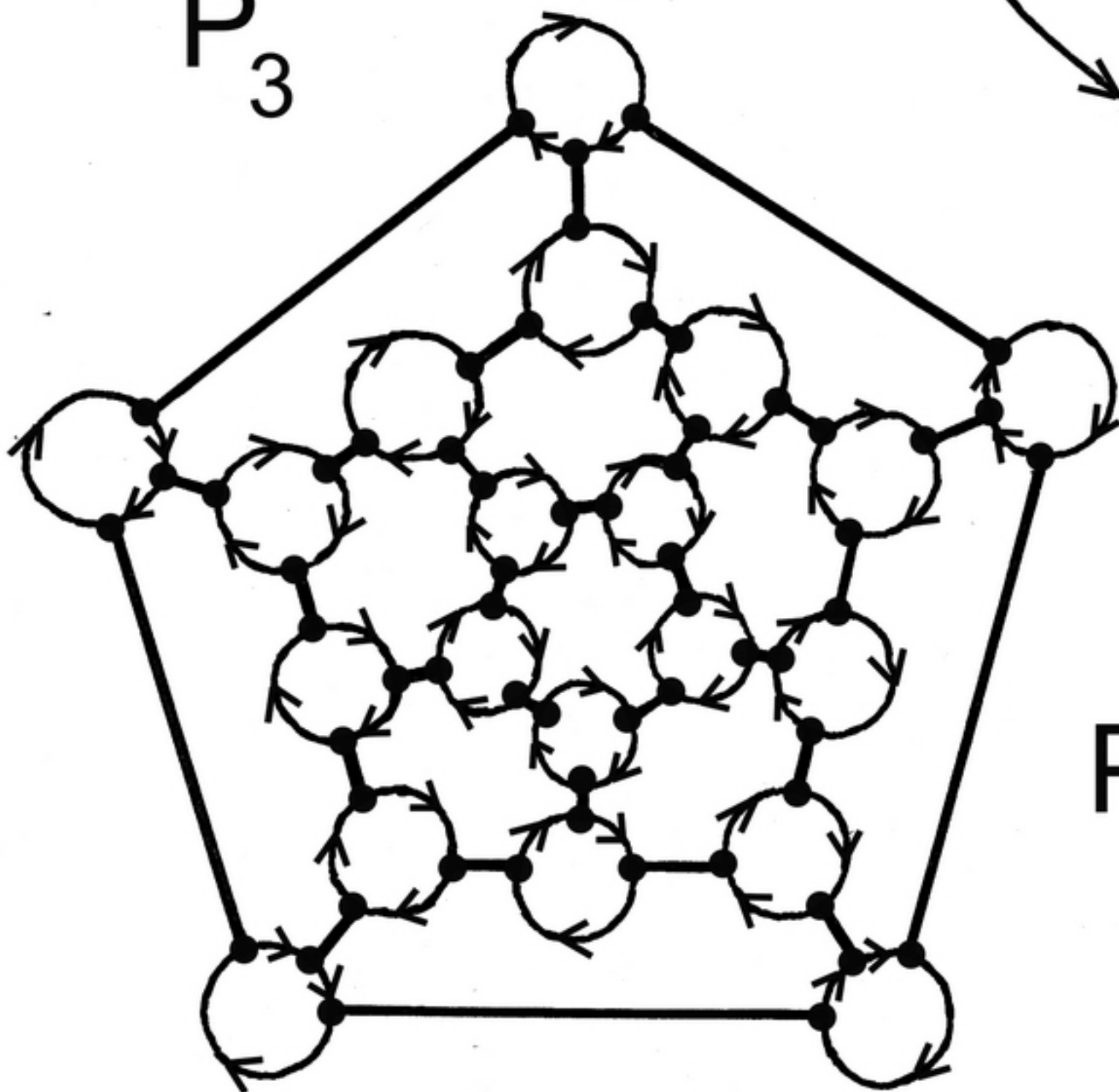
P_2



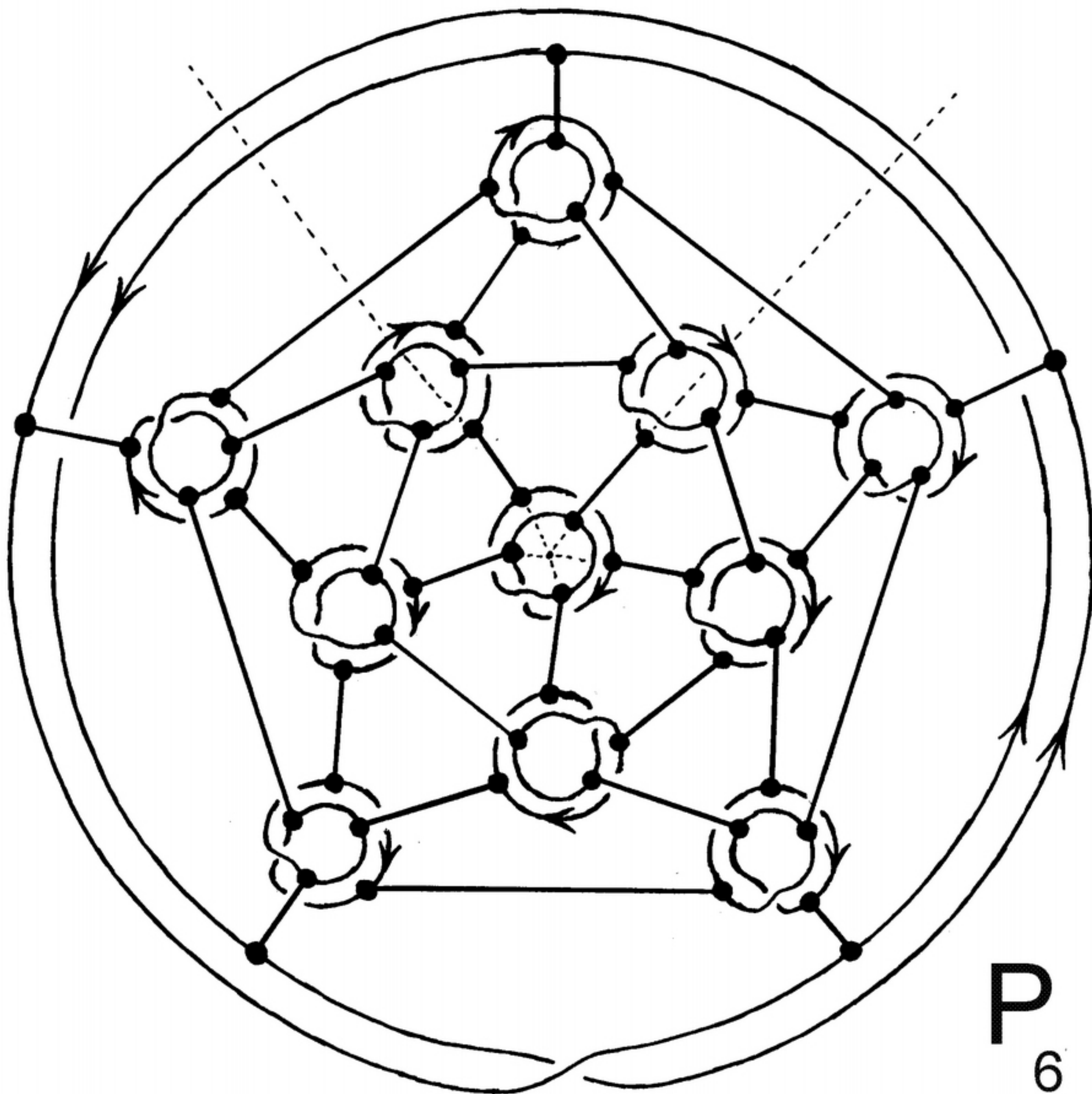
P_3



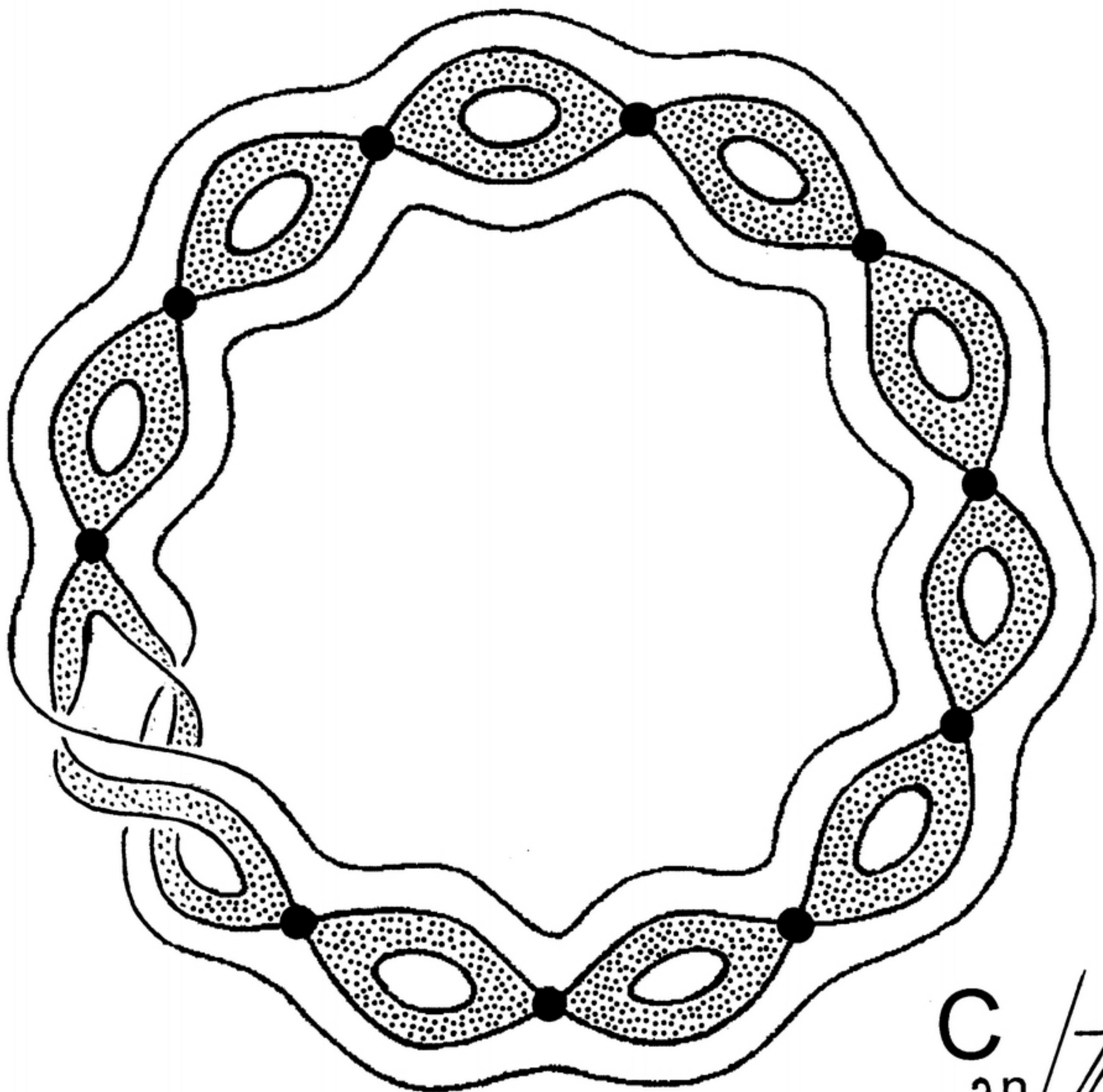
P_4



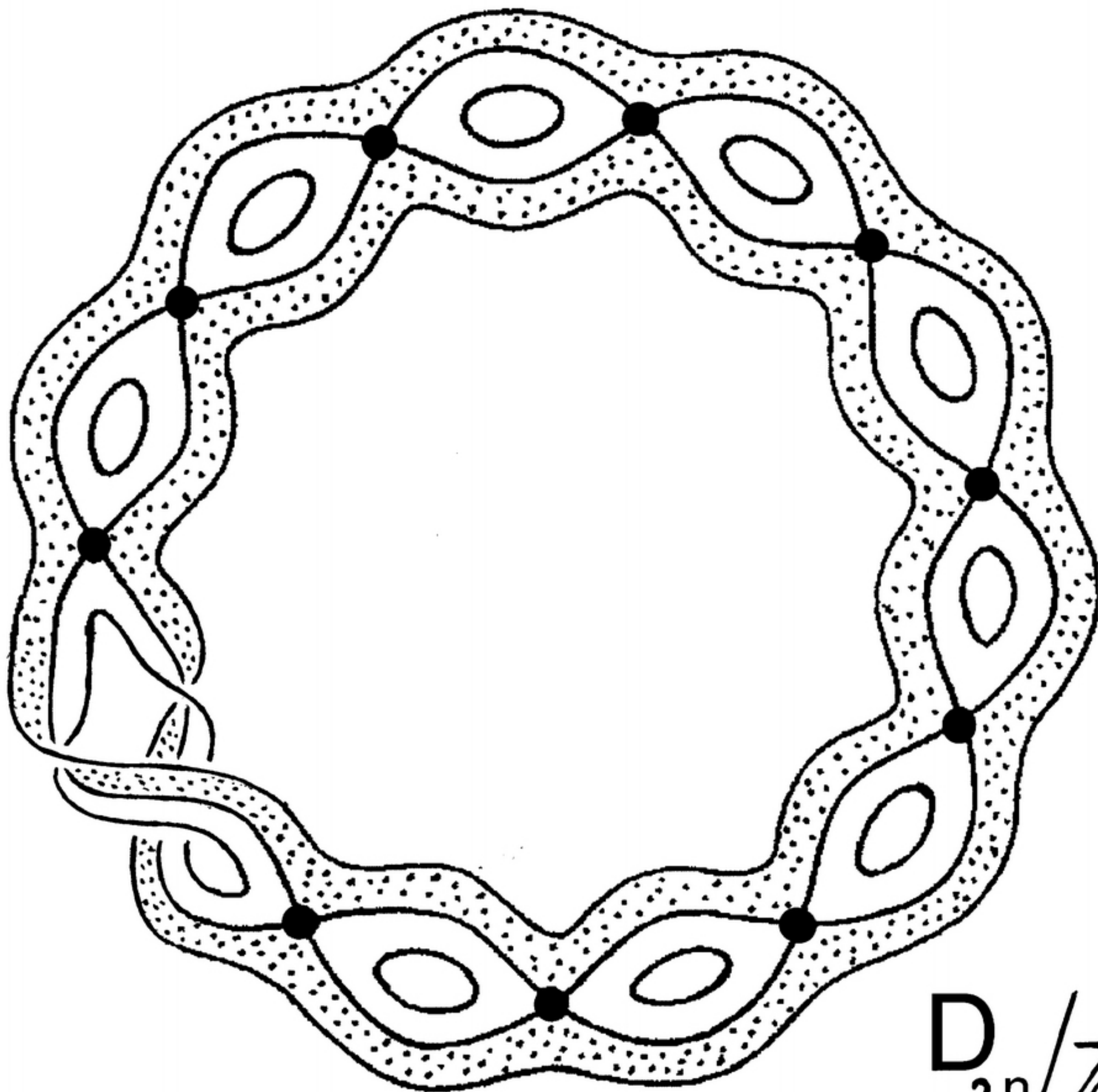
P_5



P_6



$$C_{2n}/Z_2$$



$$D_{2n}/\mathbb{Z}_2$$

- Второй сюжет.
- Алгебра Ли: V^n , билин. кососимм. операция (коммутатор), тождество Якоби:

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

- Давно известно: на любой конечномерной алгебре Ли есть скобка Пуассона, т. е. билин. кососимм. операция на $C^\infty(G^*)$, где G^* — пр-во, сопряженное к алгебре Ли G :

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [df(x), dg(x)] \rangle$$

$\cap$
 G^*

$\cap$
 G^*

$\cap$
 G

$\cap$
 G

- Итак, на G^* могут существовать гамильтоновы системы. Поиск таких интегрируемых систем — одна из наиболее актуальных задач в теории алг. Ли.
- Факт существования скобки Пуассона весьма фундаментален (св-во тожд. Якоби, и только).

- Других подобных св-в алгебр Ли, общих, не было известно ($\dim G < \infty$).
 - В 1977 г. А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко сформулировали гипотезу:
 На любой конечномерной алгебре Ли всегда есть интерпретируемая гамильтонова система с полиномиальными интегралами.
 - Мы доказали ее для всех компактных алгебр Ли (т.е. алгебр Ли компактной группы Ли).
 - Затем, на протяжении ≈ 30 лет многие математики строили отдельные серии таких систем на некомпактных алгебрах Ли.
 - В 2004 г. С.Т. Садэтов, наконец доказал нашу гипотезу в полном объеме. Тем самым, доказан удивительный факт: на любой алгебре Ли есть эффективно конструируемый набор полиномов, в инволюции, максимальный.
- Второй факт после $\exists$ скобки Пуассона

- В 2006 г. аспирант А.А. Короткевич в явном⁶⁰ виде нашел все эти удивительные полиномы на всех алгебрах Ли малой размерности (до $\dim = 5$ и для nilпотентных алгебр до $\dim = 6$). Скоро выйдет в журнале "Математический Сборник".

Благодарю за внимание!