

Получаем, если $x^3 = 0$, то $x^2 = \pm x^1$, т.е. пересечение $\tilde{\Gamma} \cap S_3^2$ состоит из двух точек: $T_1 = (x^1 = \lambda, x^2 = \lambda, x^3 = 0)$; $T_2 = (x^1 = \lambda, x^2 = -\lambda, x^3 = 0)$. В карте $A_1 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^1 \neq 0\}$ имеем $T_1 = (\alpha = 1, \beta = 0)$; $T_2 = (\alpha = -1, \beta = 0)$. Так как $x^1 \neq 0$, то можем перейти в карту A_1 с помощью замены: $\alpha = \frac{x^2}{x^1}$, $\beta = \frac{x^3}{x^1}$, что дает: $\alpha^2 - (1 - a_1\beta)(1 - \alpha_2\beta) = 0$;

$$\text{grad} [\alpha^2 - (1 - a_1\beta)(1 - \alpha_2\beta)]_{T_1 T_2} =$$

$$= (2\alpha, a_1(1 - \alpha_2\beta) + \alpha_2(1 - a_1\beta))_{T_1 T_2} = (\pm 2, a_1 + a_2) \neq 0$$

Лекция 15

в точках T_1, T_2 , а поэтому поверхность $\tilde{\Gamma}$ — гладкое подмногообразие около точек T_1 и T_2 . При $n = 1, 2$ мы доказали, что компактификация $\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$, возникающая при компактификации $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{CP}^2$, дает гладкое многообразие. Это верно и при $n = 3$, однако это доказательство мы опускаем.

Изучим точки ветвления функции $w = \sqrt{P_n(z)}$, определенной уже на всей сфере $S^2 = \mathbf{CP}^1$.

Предложение 2. Пусть $w^2 - P_n(z) = 0$, где $P_n(z)$ имеет только простые корни a_1, \dots, a_n . Тогда все эти точки — точки ветвления функции $w = \sqrt{P_n(z)}$, расположенные в конечной части плоскости; на сфере S^2 к этим точкам добавляется еще одна точка ветвления — бесконечность в том случае, когда степень P_n нечетна. Для P_n четной степени точка ∞ не есть точка ветвления. Других точек ветвления функция $w = \sqrt{P_n(z)}$ не имеет.

Доказательство. Рассмотрим случай: $w^2 - z = 0$. Функция $w = \pm\sqrt{z}$ имеет две ветви: $\varphi_1 = \sqrt{z}$ и $\varphi_2 = -\sqrt{z}$. Рассмотрим окружность конечного радиуса с центром в 0 и совершим обход вокруг 0. Ветви φ_1 и φ_2 меняются местами, что не позволяет сделать функцию однозначной и гладкой на сфере. Повторим эту процедуру, взяв в качестве центра окружности точку $\infty \in S^2$. На S^2 все точки равноправны относительно группы преобразований $\frac{az+b}{cz+d}$; в частности, ∞ может быть переведена в любую «конечную» точку. Окружность с центром в ∞ можно рассматривать и как окружность с центром в 0, а потому обход вокруг ∞ также меняет ветви (см. рис. 11).

Рассмотрим общий случай. Пусть a_k — произвольный корень $P_n(z)$. Рассмотрим малую окружность S^1 с центром в a_k , внутри которой нет других корней полинома и запишем точку $z \in S^1$ в виде: $z = a_k + re^{i\varphi}$,

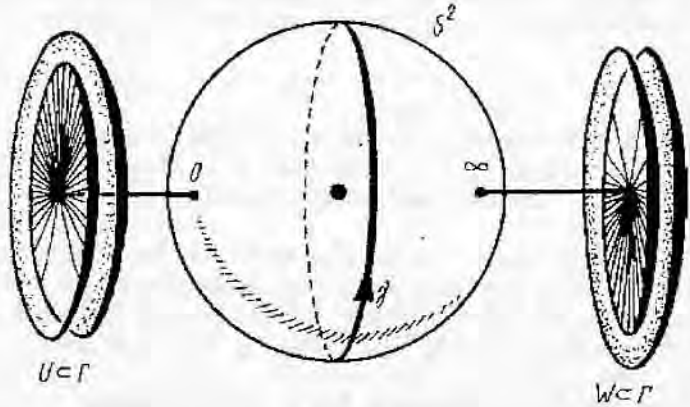


Рис. 11

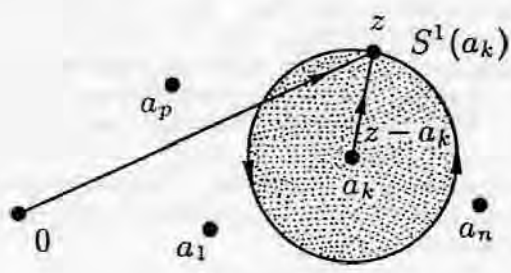


Рис. 12

где r — радиус окружности. Имеем:

$$\begin{aligned}
 w(z) &= \sqrt{\prod_{p=1}^n (z - a_p)} = \sqrt{\prod_{p \neq k} (z - a_p)} \sqrt{z - a_k} = \\
 &= \sqrt{\prod_{p \neq k} (z - a_p)} \cdot r^{1/2} \cdot e^{i\varphi/2}
 \end{aligned}$$

(см. рис. 12). Далее:

$$w(z_0) = r_0^{1/2} \cdot e^{i\varphi_0/2} \sqrt{\prod_{p \neq k} (z - a_p)} \rightarrow r_0^{1/2} \cdot e^{i(\varphi_0 + 2\pi)/2} \sqrt{\prod_{p \neq k} (z - a_p)}$$

при обходе вокруг a_k . Так как при обходе вокруг a_k аргумент $(z - a_k)$ меняется на 2π , то $\sqrt{z - a_k}$ меняет знак. В то же время при обходе вокруг a_k аргументы чисел $z - a_p$, $p \neq k$, не получают приращения на 2π и возвращаются к прежнему значению (см. рис. 13), т. е. все радикалы $\sqrt{z - a_p}$ возвращаются к прежнему значению, и переход с ветви на ветвь осуществляется только за счет радикала $\sqrt{z - a_k}$. Итак, точки $\{a_k\}$ —

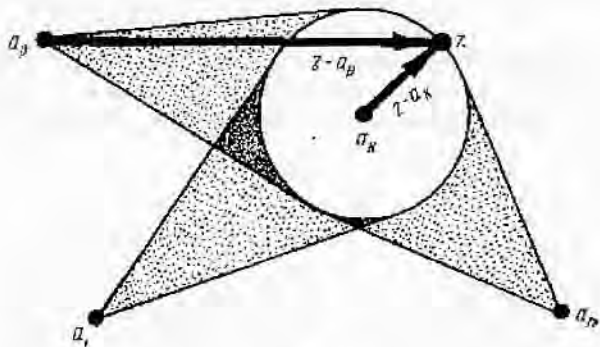


Рис. 13

точки ветвления. Рассмотрим ∞ и сделаем замену $u = 1/z$; тогда ∞ перейдет в 0 и $w = g(z)$ примет вид: $\frac{1}{\sqrt{u}^n} \prod_{k=1}^n \sqrt{1 - a_k u}$. Если n — четно, то при обходе вокруг точки функция возвращается к прежнему значению, а потому 0 не есть точка ветвления. Если $n = 2p + 1$ — нечетно, то $w = \frac{1}{u^p} \frac{1}{\sqrt{u}} \prod_{k=1}^n \sqrt{1 - a_k u}$ и в нуле имеется ветвление. Предположение доказано. \square

Как мы знаем, поверхность Γ — область однозначности алгебраической функции. Обозначим через Γ^* поверхность, получающуюся склейкой нескольких «листов», каждый из которых будет графиком однозначной алгебраической функции. Подробное построение Γ^* мы опишем ниже. При компактификации $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ можно считать, что многообразие Γ^* отображается на поверхность $\tilde{\Gamma}$, имеющую особенности при $n > 3$. При этом Γ^* рассматривается здесь «абстрактно», т. е. не вложенная в \mathbb{C}^2 или $\mathbb{C}P^2$. Начнем с примера.

Рассмотрим функцию $w = \pm\sqrt{z}$, определенную на S^2 и имеющую две точки ветвления: 0 и ∞ . Соединим 0 и ∞ гладкой кривой γ без пересечений и сделаем вдоль γ разрез от 0 до ∞ . Тогда на S^2 возникают два подмножества: Γ_1 и Γ_2 , где Γ_1 — график ветви $\varphi_1 = \sqrt{z}$, определенной на $S^2 \setminus \gamma$, а Γ_2 — график ветви $\varphi_2 = -\sqrt{z}$, определенной на $S^2 \setminus \gamma$. Так как γ соединяет точки ветвления и других точек ветвления нет, то запрещены обходы вокруг точек ветвления: т. е. оставаясь на $S^2 \setminus \gamma$, нельзя перейти с ветви φ_1 на ветвь φ_2 . Отсюда следует, что каждый из листов Γ_1 и Γ_2 гомеоморфен $S^2 \setminus \gamma$ и этот гомеоморфизм устанавливается функциями φ_1 и φ_2 (Γ_i — график φ_i) (см. рис. 14). При проекции $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1(z)$ вдоль $\mathbb{C}^1(w)$, каждый из листов Γ_1 и Γ_2 гомеоморфно проецируется на $S^2 \setminus \gamma$. Итак, Γ^* склеена из двух кусков — листов Γ_1 и Γ_2 . Каким образом осуществляется склейка? Зададим на S^2 ориентацию и отметим один берег

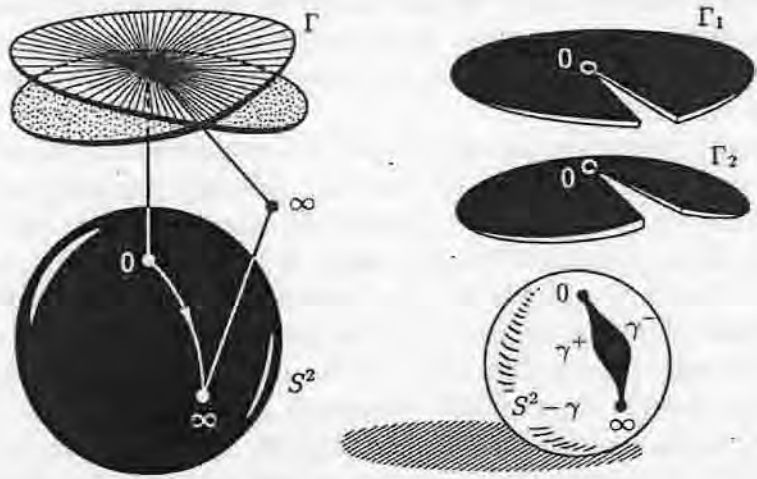


Рис. 14

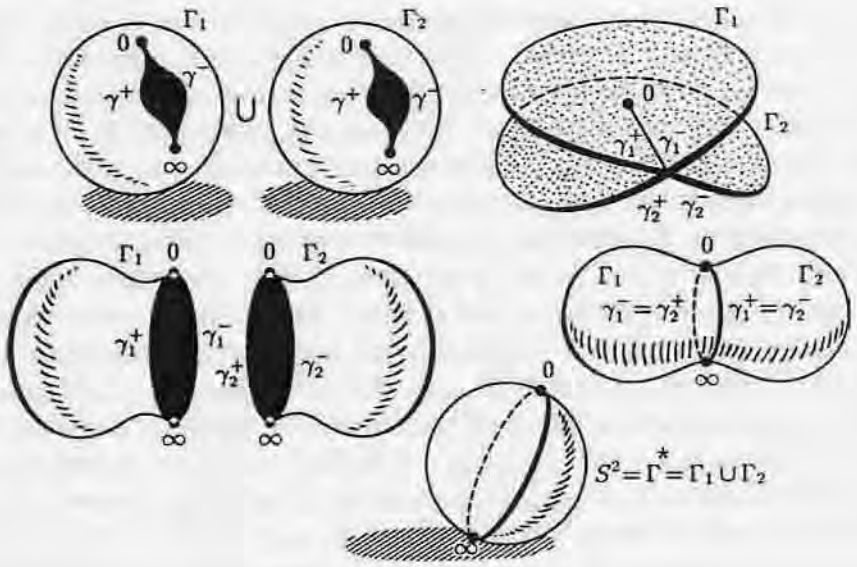


Рис. 15

разреза знаком «-», а другой — знаком «+». Эти метки возникают на берегах разрезов каждого листа: Γ_1 и Γ_2 . Так как они гомеоморфны $S^2 \setminus \gamma$, то мы должны для восстановления Γ^* склеить два экземпляра $S^2 \setminus \gamma$, учитывая расположение знаков «+» и «-». Так как при обходе вокруг точек ветвления ветви менялись местами, то берег γ_1^+ листа Γ_1 должен склеиться с берегом γ_2^- листа Γ_2 ; соответственно склеиваются и два экземпляра берега γ_1^- и γ_2^+ на листах Γ_1 и Γ_2 (см. рис. 15).

Ясно, что эта склейка дает сферу. Итак, нами доказана

Лемма 2. Компактифицированная риманова поверхность Γ^* алгебраической функции $w = \pm\sqrt{z}$ гомеоморфна сфере S^2 . Ее образ $\tilde{\Gamma}$ в $\mathbb{C}P^2$ также является сферой.

Рассмотрим теперь риманову поверхность функции $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$, где $a \neq b$. В силу Предложения 2 эта функция имеет две точки ветвления: $z = a$ и $z = b$; точка ∞ — не есть точка ветвления.

Лемма 3. Компактифицированная риманова поверхность Γ^* алгебраической функции $w = \pm\sqrt{(z-a)(z-b)}$ гомеоморфна двумерной сфере.

Доказательство. Точками ветвления являются a и b , поэтому следует сделать разрез γ от a до b и повторить рассуждения леммы 2, что и доказывает настоящую лемму. \square

Рассмотрим общий случай.

Теорема 2. Пусть $f(z, w) = w^2 - P_n(z)$, где полином P_n не имеет кратных корней. Тогда компактифицированная риманова поверхность Γ^* алгебраической функции $w = \pm\sqrt{P_n(z)} = \sqrt{\prod_{k=1}^n (z - a_k)}$ гомеоморфна сфере с $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ ручками (через $[]$ обозначена целая часть), т. е. многообразию типа M_g^2 рода $g = \left[\frac{n-1}{2} \right]$.

При отображении Γ^* в $\mathbb{C}P^2$ при $n > 3$ происходит следующее. Γ^* отображается на $\tilde{\Gamma}$, причем на $\tilde{\Gamma}$ есть ровно одна особая точка. В эту особую точку переходят две разные точки из Γ^* , если n четно, и одна, если n нечетно. Указанная особенность является точкой пересечения $\tilde{\Gamma}$ со сферой $S^2 = \mathbb{C}P^1$ в $\mathbb{C}P^2$, являющейся «бесконечно удаленной» комплексной прямой $\mathbb{C}P^1$ с $\mathbb{C}P^2$. То есть эта особая точка на $\tilde{\Gamma}$ (при $n > 3$) отвечает «бесконечности» на $\tilde{\Gamma}$. Структура этой особенности довольно сложна, и мы не будем здесь это обсуждать. Отметим лишь следующее.

Замечание. Если рассмотреть в $\mathbb{C}P^2$ трехмерную сферу S_ε^3 малого радиуса ε с центром в единственной особой точке на $\tilde{\Gamma}$, то пересечение $S_\varepsilon^3 \cap \tilde{\Gamma}$ является одномерной замкнутой кривой, заузленной в S_ε^3 . Кривая может быть несвязной. Она состоит из так называемых «кабельных узлов», получающихся итерированием торических узлов (т. е. узлов, лежащих на двумерном торе T^2

и обходящих его p раз вдоль меридиана и q раз вдоль параллели). Тип этого зацепления $S^3_\varepsilon \cap \tilde{\Gamma}$ зависит от вида числа n (от его разложения на простые множители). Таким образом, малая окрестность особой точки поверхности $\tilde{\Gamma}$ гомеоморфна конусу над замкнутой кривой $S^3_\varepsilon \cap \tilde{\Gamma}$.

Доказательство теоремы. Пусть $n = 2p + 1$; тогда в силу Предло-

жения 2 точками ветвления $w = \pm \sqrt{P_n(z)} = \sqrt{\prod_{k=1}^n (z - a_k)}$ являются все

корни a_1, \dots, a_n и точка ∞ ; это множество можно разбить на пары, например: $(a_1, a_2), \dots, (a_n, a_{n+1})$, где $a_{n+1} = \infty$. Соединяя внутри каждой пары точки a_{2k-1} и a_{2k} гладким отрезком $\gamma_k, 1 \leq k \leq p + 1$; получаем сферу S^2 с $p + 1$ разрезами: $\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1}$. Тогда на $S^2 \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{p+1})$ каждая ветвь: φ_1 и φ_2 являются однозначными функциями. В самом деле, мы запретили обходы вокруг нечетного числа точек ветвления — при нашей системе разрезов мы можем обойти только вокруг четного числа точек ветвления. Пусть мы обошли пары: $(a_{i_1}, a_{i_1+1}), \dots, (a_{i_\alpha}, a_{i_\alpha+1})$. Что происходит с ветвями φ_1 и φ_2 ? Так как приращение 2π получили аргументы только тех точек, вокруг которых совершен обход, то мы получаем четное число изменений знака перед радикалами. Впрочем, так как точек четное число, то можно не различать понятия «внутри контура» и «вне контура», так как вне контура тоже осталось четное число особенностей (кроме того, на сфере понятия «вне» и «внутри» контура — двойственны) (см. рис. 16). Имеем при обходе вдоль γ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \prod_{t=1}^{\alpha} \sqrt{(z - a_{i_t})(z - a_{i_t+1})} \cdot \prod_{k \neq (i_1, \dots, i_\alpha+1)} \sqrt{z - a_k} \rightarrow \\ &\rightarrow \prod_{t=1}^{\alpha} (-\sqrt{z - a_{i_t}}) (-\sqrt{z - a_{i_t+1}}) \cdot \prod_{k \neq (i_1, \dots, i_\alpha+1)} \sqrt{z - a_k} = \varphi. \end{aligned}$$

Если мы разобьем точки ветвления на пары другим способом, то область, полученная путем разрезов вдоль новых путей, будет гомеоморфна уже рассмотренной области. Итак, выполняемые нами операции не зависят от способа разбиения точек ветвления на пары и от способа соединения точек внутри каждой пары гладкой кривой. Отметим берега каждого разреза знаками «+» и «-»; тогда каждый лист: Γ_1 и Γ_2 гомеоморфен $S^2 \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{p+1})$; следовательно, для восстановления Γ^* следует склеить эти два листа, приклеив берег $\gamma_{i(1)}^+$ на Γ_1 к берегу $\gamma_{i(2)}^-$ на Γ_2 (рис. 17). Аналогично склеиваем и вторую пару берегов. Получаем M_g^2 , т. е. сферу S^2 с $g = p = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ручками.

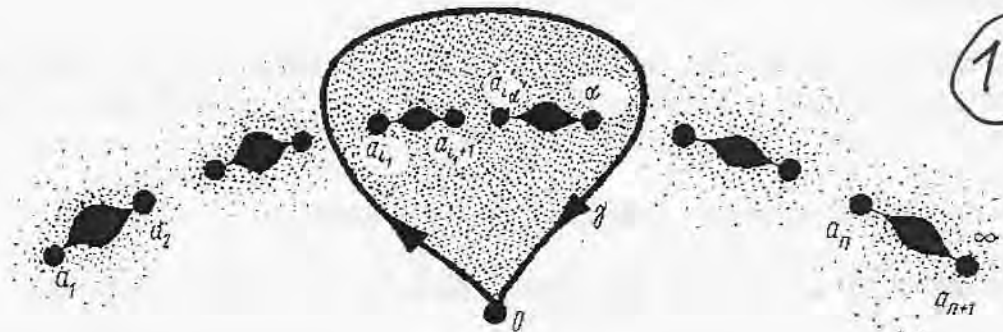


Рис. 16

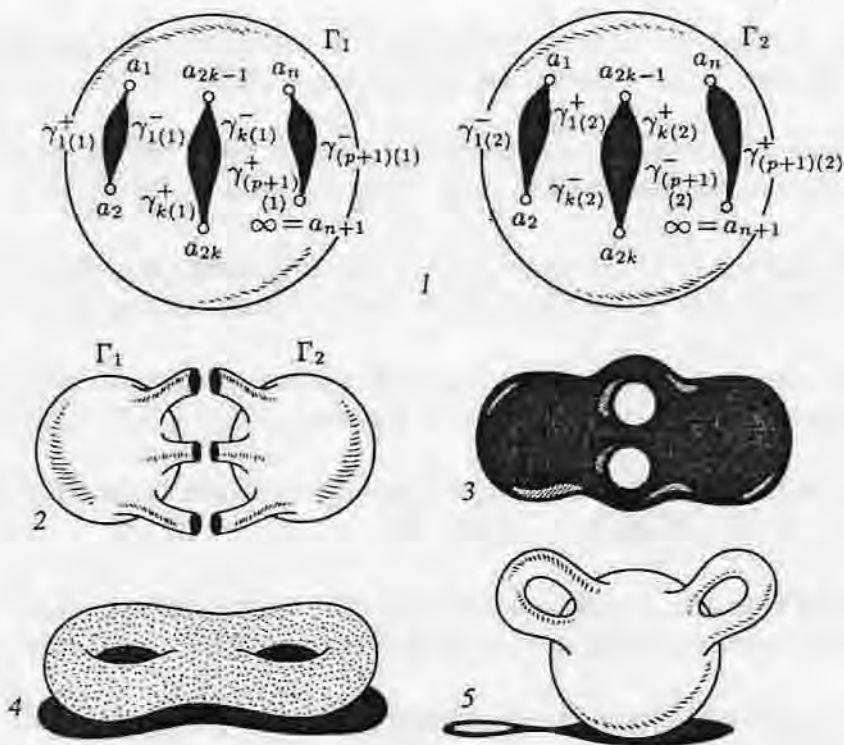


Рис. 17

Пусть $n = 2p$; в силу Предложения 2 точками ветвления являются все корни a_1, \dots, a_{2p} и только они. Разбиваем корни на пары, соединяем точки внутри пары гладким отрезком, нумеруем берега разрезов и, разрезая Γ^* вдоль прообразов этих путей, получаем два листа. Восстанавливаем Γ^* путем обратной склейки (см. рис. 18). Теорема доказана. \square

Итак, двумерные поверхности возникают естественным путем — как римановы поверхности некоторых алгебраических функций.

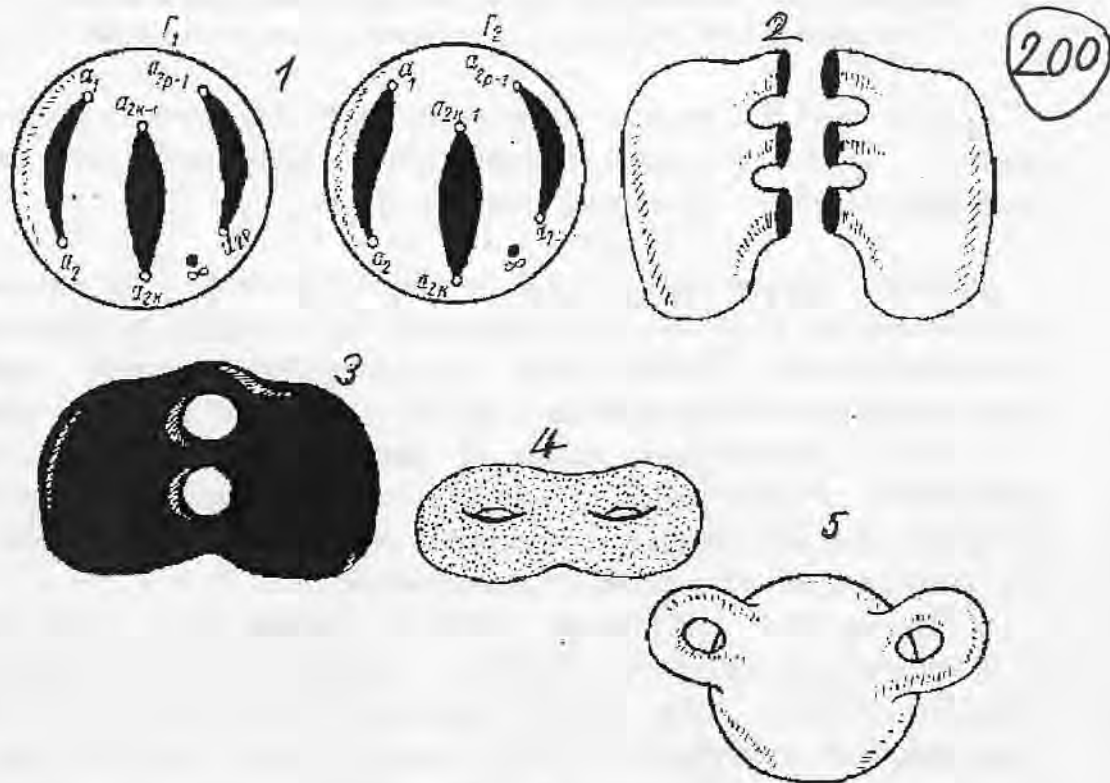


Рис. 18

Утверждение 1. Каждое двумерное гладкое компактное связное замкнутое ориентируемое многообразие рода g (т. е. типа M_g^2) может быть снабжено структурой комплексно-аналитического многообразия.

Доказательство. Рассмотрим Γ для функции $w = \pm\sqrt{P_n(z)}$, где P_n имеет простые корни. Так как $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$, где задается графиком $w = g(z)$ или графиком $z = \omega(w)$, то имеем две ортогональные проекции $\pi_1: (z, w) \rightarrow \mathbb{C}^1(z)$; $\pi_2: (z, w) \rightarrow \mathbb{C}^1(w)$. В каждой точке $(z, w) \in \Gamma$ определена по крайней мере одна из проекций, так как $\text{grad}(w^2 - P_n(z)) \neq 0$ в каждой точке $(z, w) \in \Gamma$ (см. теорему 1). Получаем покрытие Γ локальными дисками, осталось найти функции перехода. Они могут быть только двух типов: $w = g(z)$, или $z = \omega(w)$. Так как функции $g(z)$ или $\omega(w)$ — комплексно-аналитические (см. Предложение 1), то получаем искомое утверждение, ибо комплексная структура может быть теперь продолжена на всю риманову поверхность Γ^* . \square

Легко доказать, что неориентируемые многообразия M_μ^2 не могут быть снабжены структурой комплексно-аналитических многообразий (проверьте!).

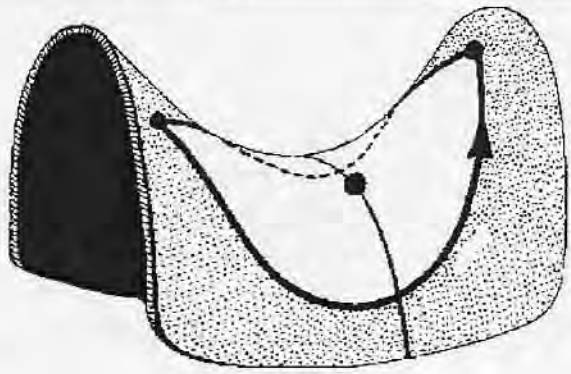
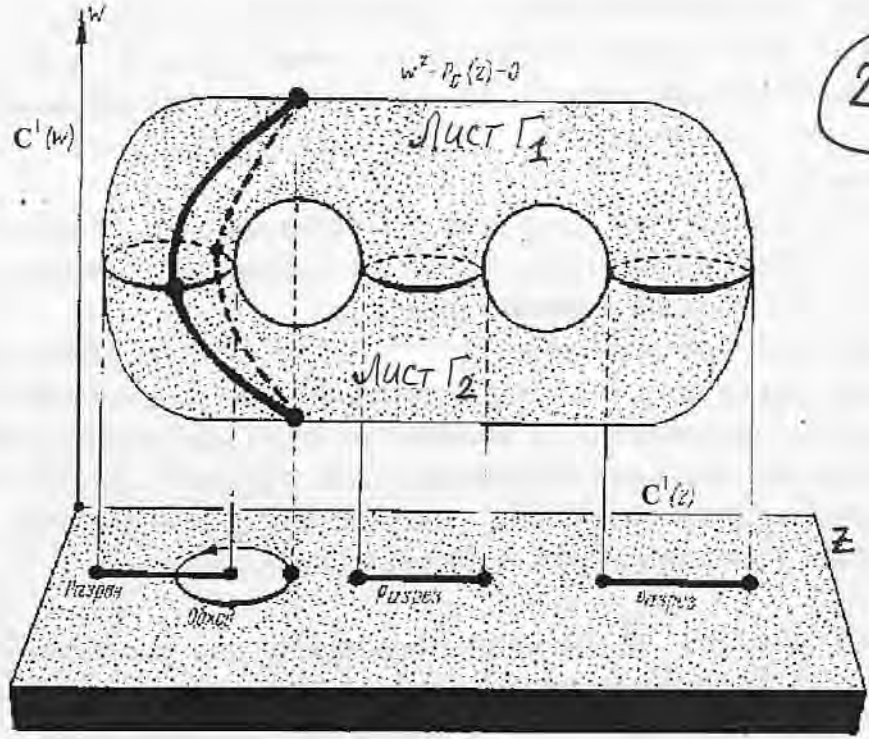


Рис. 19

Утверждение 2. Каждое двумерное гладкое компактное связное ориентируемое замкнутое многообразие рода g (т. е. типа M_g^2) может быть снабжено конформно-евклидовой римановой метрикой.

Доказательство. Метрика называется конформно-евклидовой, если существуют локальные координаты, в которых она имеет вид: $g_{ij} = \alpha \cdot \delta_{ij}$. Реализуем M_g^2 в \mathbb{C}^2 (пополненном) в виде римановой поверхности функции $w = \pm \sqrt{P_n(z)}$, т. е. $w = g(z)$. Комплексная координата z обслуживает

все M_g^2 , кроме точки 0, в окрестности которой нужно ввести координату w , связанную с z комплексно-аналитическим преобразованием $z = \omega(w)$. Введем в $\mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4$ метрику:

$$ds^2 = dz d\bar{z} + dw d\bar{w} = \sum_{k=1}^4 (dx^k)^2;$$

202

рассмотрим ее ограничение на $\Gamma \subset \mathbf{C}^2$. Имеем:

$$\begin{aligned} ds^2(M_g^2) &= dz d\bar{z} + dg(z) \overline{dg(z)} = \\ &= dz d\bar{z} + g'(z) \overline{g'(z)} dz d\bar{z} = (1 + |g'_z(z)|^2) dz d\bar{z}. \end{aligned}$$

Или: $ds^2(M_g^2) = (1 + u_x^2 + v_x^2)(dx^2 + dy^2)$, где $z = x + iy$, $g = u + iv$. Здесь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} g(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \\ &= \frac{1}{2} (u_x + iv_x - iu_y + v_y) = u_x + iv_x = v_y + iv_x, \end{aligned}$$

так как $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Утверждение доказано. \square

Если сделать комплексно-аналитическую замену $z = \eta(\xi)$, то полученная выше конформная метрика останется конформной, так как

$$ds^2 = \alpha(z) dz d\bar{z} = \alpha(\eta(\xi)) |\eta'(\xi)|^2 d\xi d\bar{\xi} = \rho(\xi) d\xi d\bar{\xi}.$$

Прокомментируем способ вложения Γ в \mathbf{C}^2 в окрестности точки ветвления. Хотя мы доказали, что в этих точках Γ является гладким многообразием, однако при попытке изобразить точку ветвления в \mathbf{R}^3 возникают трудности, связанные с «маломерностью» \mathbf{R}^3 по сравнению с $\mathbf{R}^4 = \mathbf{C}^2$. На рис. 19 мы попытались изобразить условную схему обхода вокруг точки ветвления.

конец весеннего семестра