Римановы поверхности алгебраических функций

Лекция 14

183

Напомним простые свойства комплексно-значных функций, которые нам потребуются. Отнесем $\mathbf{C}^n$ к координатам $z^1, \ldots, z^n$; если $\gamma(t) = (z^1(t), \ldots, z^n(t))$ — гладкая кривая, то

$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{dz^k}{dt}\frac{d\bar{z}^k}{dt}}\, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{dx^k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^k}{dt}\right)^2}\, dt,$$

где $dz^\alpha = dx^\alpha + i dy^\alpha$. Для $n = 1$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0.$$

Отождествим $\mathbf{C}^n\{z^k\}$ и $\mathbf{R}^{2n}\{x^k, y^k\}$; тогда, как уже отмечалось, любой полином $f(z^1, \ldots, z^n)$ можно записать в переменных $\{x^k, y^k\}$: $g(x^1, y^1; \ldots, x^n, y^n)$. Обратно, любой полином $g(x^1, y^1; \ldots, x^n, y^n)$ можно записать в переменных $\{z^k, \bar{z}^k\} : f(z^1, \bar{z}^1; \ldots, z^n, \bar{z}^n)$.

Лемма 1. *Полином $f(z^1, \bar{z}^1; \ldots, z^n, \bar{z}^n)$ не зависит от $\bar{z}^\alpha$ тогда и только тогда, когда $\partial f / \partial \bar{z}^\alpha \equiv 0$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Проверим, что если $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha} \equiv 0$, то $f(z^1, \bar{z}^1; \ldots, z^n, \bar{z}^n)$ не содержит переменной $\bar{z}^\alpha$. Допустим противное и представим f в виде полинома по степеням переменной $\bar{z}^\alpha$: $f = \omega \cdot (\bar{z}^\alpha)^p + \ldots$, где коэффициенты $\omega, \ldots$ не зависят от $\bar{z}^\alpha$. Пусть p — максимальная степень $\bar{z}^\alpha$; тогда $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha} = p \cdot \omega(\bar{z}^\alpha)^{p-1} \ldots$, что противоречит условию. Лемма доказана. □

Напомним, что $f(z^1, \bar{z}^1; \ldots, z^n, \bar{z}^n)$ называется *аналитической*, если $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha} \equiv 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. При $n = 1$ имеем: $\mathbf{R}^2(x, y) = \mathbf{C}^1(z) = \mathbf{R}^2(z; \bar{z})$; $f(x, y) = g(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$. Если $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u + iv) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0;\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$u_{xx} = v_{xy} = -u_{yy};\ u_{xx} + v_{yy} = 0;\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Нам потребуется комплексный аналог теоремы о неявной функции. Доказательство содержится в курсе теории функций комплексного переменного.

Предложение 1. *Пусть $f(z, w)$ — комплексно-аналитическая функция на $\mathbf{C}^2(z, w)$; рассмотрим уравнение $f(z, w) = 0$ относительно переменной w, и пусть в некоторой точке $P_0 \in \{f = 0\}$ выполнено соотношение: $\dfrac{\partial f}{\partial w} \neq 0$. Тогда существует открытая окрестность точки P_0 в $\mathbf{C}^2$: $U(P_0)$, такая, что в ней существует функция $w = g(z)$ со свойствами: 1) $g(z)$ — комплексно-аналитическая, 2) функция $w = g(z)$ — решение уравнения $f(z, w) = 0$ в окрестности $U(P_0)$, т. е. $f(z, g(z)) = 0$ в $U(P_0)$, и это решение единственно в $U(P_0)$.*

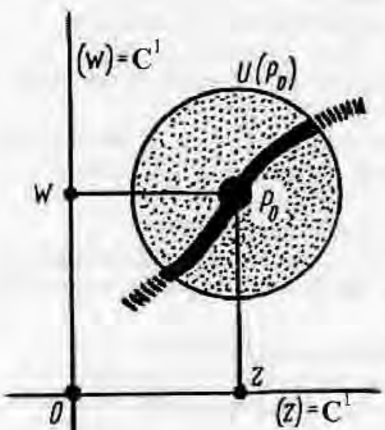


Рис. 1

Геометрически удобно рассматривать решение $w = g(z)$ в виде «графика» (см. рис. 1).

184

Определение 1. Пусть $f(z, w)$ — полином по переменным z, w в $\mathbf{C}^2$, и пусть уравнение $f(z, w) = 0$ разрешимо относительно w в некоторой открытой окрестности $U(P_0)$ (например, пусть $\dfrac{\partial f}{\partial w} \neq 0$). Тогда функция $w = g(z)$, являющаяся решением этого уравнения, называется *алгебраической*, а совокупность точек (z, w) таких, что $f(z, w) = 0$ (т. е. нулевая поверхность уровня функции $f(z, w)$) называется *римановой поверхностью для алгебраической функции* $w = g(z)$, в тех точках, где определена $w = g(z)$.

Отметим, что если в точке $P_0 = (z_0, w_0)$ имеем: $\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, то в $U(P_0)$ существует решение: $z = \varphi(w)$, т. е. уравнение $f = 0$ можно разрешить относительно z. При этом $\varphi(w)$ удовлетворяет условиям 1), 2) Предложения 1. Итак, условие локальной разрешимости уравнения $f(z, w) = 0$ имеет вид: $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}, \dfrac{\partial f}{\partial w}\right) \neq 0$, где $\operatorname{grad} f$ — «комплексный градиент» функции f.

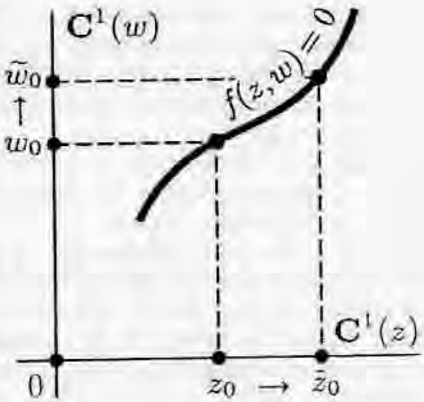


Рис. 2

Запишем полином $f(z, w)$ в общем виде, разложив его, например, по степеням z : $f = a_0(w)z^n + a_1(w)z^{n-1} + \ldots$ Здесь коэффициенты $a_k(w), 0 \leqslant k \leqslant n$, — полиномы от w. Сразу отметим свойство римановых поверхностей алгебраических функций: поверхности некомпактны и «уходят на бесконечность» в $\mathbf{C}^2$. (Мы считаем, что f отличен от тождественного нуля.) В самом деле, фиксируем точку $w_0 \in C^1(w)$; возникает уравнение $a_0(w_0)z^n + a_1(w_0)z^{n-1} \ldots = 0$ относительно z; по известной теореме алгебры, оно всегда имеет комплексный корень, т. е. существует точка z_0 такая, что $f(z_0, w_0) = 0$. Поскольку w_0 можно устремить к бесконечности по $\mathbf{C}^1(w)$, то поверхность $f(z, w) = 0$ также уходит на бесконечность (см. рис. 2). Так как имеем дело с полиномом, то, конечно, можно было бы перейти от неоднородных координат в $\mathbb{C}^2$ к однородным координатам x^1, x^2, x^3, положив: $z = \dfrac{x^1}{x^3}$, $w = \dfrac{x^2}{x^3}$. в $\mathbb{C}P^2$
Тогда уравнение $0 = f(z, w) = \sum a_{pq} w^p z^q$ превратится в уравнение на однородный полином $\sum a_{pq}(x^1)^q (x^2)^p (x^3)^{s-(p+q)} = 0$, где s — наибольшая степень мономов $w^p z^q$; $\deg(w^p z^q) = p + q$. Так можно «компактифициро-

вать» риманову поверхность, перенеся ее из $\mathbf{C}^2$ в $\mathbf{CP}^2$. Поскольку уравнение $g(x^1, x^2, x^3) = 0$ на $\mathbf{CP}^2$ полиномиально, то эта поверхность уровня в $\mathbf{CP}^2$ компактна. Мы не будем пока вдаваться в детали этой компактификации. 186

Изучим, как устроены с топологической точки зрения римановы поверхности? С вещественной точки зрения, уравнение $f(z, w) = 0$ распадается на два: $\mathrm{Re}\,(f) = 0$ и $\mathrm{Im}\,(f) = 0$ в $\mathbf{R}^4$, т. е. в точках «общего положения» множество $f = 0$ — двумерная (вещественная) поверхность.

Теорема 1. *Пусть полином $f(z, w)$ имеет вид: $f = w^q - P_n(z)$; пусть полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. Тогда уравнение $f(z, w) = 0$ определяет гладкое двумерное (над $\mathbf{R}$) подмногообразие в $\mathbf{C}^2(z, w)$.*

Доказательство. Пусть точка P_0 принадлежит к $\{f = 0\}$ и имеет координаты (z_0, w_0), где $w_0 \neq 0$; тогда $\dfrac{\partial f}{\partial w}\Big|_{P_0} = qw_0^{q-1} \neq 0$ в P_0, т. е. по теореме о неявной функции (см. Предложение 1) поверхность $\{f = 0\}$ является в некоторой окрестности P_0 гладким двумерным подмногообразием — графиком алгебраической функции $w = g(z)$. Решение $w = g(z)$ в нашем случае имеет вид: $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$. Осталось рассмотреть точки $P_0 = (z_0, 0)$.

Утверждение: $\mathrm{grad}\, f(P_0) = \left(-\dfrac{dP_n(z_0)}{dz}; 0\right) \neq 0$. Если бы $\dfrac{d}{dz}P_n(z_0) = 0$, то в точке $(z_0, 0)$ имели бы: $P_n(z_0) = 0$ и $\dfrac{d}{dz}P_n(z_0) = 0$. Отсюда: z_0 — кратный корень $P_n(z)$, что противоречит условию. Итак, $\mathrm{grad}\, f(P_0) \neq 0$ и в некоторой открытой окрестности U точки $(z_0, 0)$ поверхность $\{f = 0\}$ задается гладким графиком $w = g(z)$, где $g(z)$ — аналитическая функция. Теорема доказана. □

Познакомимся с основными свойствами алгебраических функций.

1) Алгебраические функции обычно являются многозначными, т. е. некоторым значениям аргумента z отвечает несколько значений функции $w = g(z)$. Пример: $w = \sqrt[q]{z^n}$, где q и n взаимно просты. Простейший случай: $w = \sqrt{z}$, когда каждому z_0 отвечает ровно два значения $w = \pm\sqrt{z_0}$, если $z_0 \neq 0$. Аналогично многозначной может быть и функция $z = \alpha(w)$. Линейная функция $w = az + b$ однозначна. Многозначность $w = g(z)$ можно прокомментировать так. Рассмотрим ортогональную проекцию $\pi\colon\ \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^1(z)$, $\pi(z, w) = (z, 0)$; при этом прообразом любой точки $z_0 \in \mathbf{C}^1(z)$ является комплексная прямая $H(z_0)$, параллельная $\mathbf{C}^1(w)$; риманова поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$, рассматриваемая как график $w = g(z)$, также проектируется на $\mathbf{C}^1(z)$; при этом прообразом

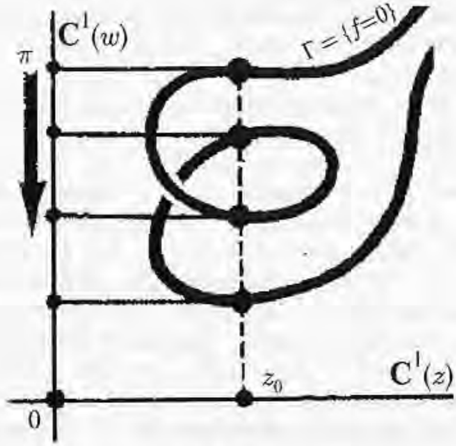


Рис. 3

любой точки $z_0 \in C^1(z)$ при проекции $\pi: \Gamma \to C^1(z)$ являются в точности все значения функции $w = g(z)$ в точке z_0 (рис. 3).

Поскольку функция $w = g(z)$ — алгебраическая (т. е. f — полином), то образом поверхности Γ при проекции $\pi: \Gamma \to C^1(z)$ является вся плоскость $C^1(z)$: для любого $z_0 \in C^1(z)$ существует по крайней мере одно решение полиномиального уравнения $f(z_0, w) = 0$.

Сделаем замену переменной: запишем $w = g(z)$ в виде $w = \rho(P)$, где $P \in \Gamma$ — переменная точка на поверхности Γ (см. рис. 4). Ясно, что $w = \rho(P)$ — однозначная функция, так как каждому значению аргумента $P \in \Gamma$ отвечает в точности одно значение функции $w = \rho(P)$. Мы добились того, что алгебраическая функция (в новых переменных) стала однозначной, но за это пришлось заплатить усложнением области изменения аргумента функции — вместо $C^1(z)$, где менялся z, мы вынуждены теперь менять аргумент P на поверхности Γ — двумерном многообразии. Итак, риманова поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$ алгебраической функции $w = g(z)$ является областью однозначности этой функции. Это свойство иногда кладется в основу другого определения римановой поверхности, эквивалентного нашему.

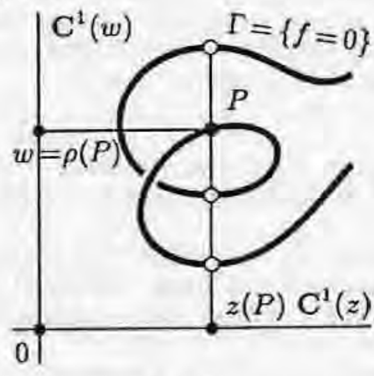


Рис. 4

2) Так как для каждого $z_0 \in C^1(z)$ существует, вообще говоря, много значений $w_i = g(z_0)$ (их число равно числу разных корней полиномиального уравнения $f(z_0, w) = 0$), то в открытой окрестности каждого $z_0 \in C^1(z)$ можно определить набор непрерывных (даже гладких) функ-

ций: $w = \{\varphi_i(z)\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, где k — степень полинома $a_0(z)w^k + a_1(z)w^{k-1} + \ldots + a_k(z) = f(z, w)$ по переменной w. Каждая из них описывает изменение какого-то одного корня уравнения $f(z, w) = 0$ при изменении z. Функции $\varphi_i(z)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, можно продолжать по переменной z; при этом в некоторых точках эти продолженные функции могут совпадать, и более того — меняться местами. Функции $\varphi_i(z)$ называются *ветвями алгебраической функции* $w = g(z)$.

Каждая ветвь описывает поведение какого-то корня уравнения $f(z,w) = 0$; мы считаем z параметром в уравнении $f(z, w) = 0$, а w — искомой величиной.

Над каждым $z_0 \in \mathbf{C}^1(z)$ «висят» значения функции $w = g(z)$, являющиеся корнями уравнения $f(z_0, w) = a_0(z_0)w^k + a_1(z_0)w^{k-1} + \ldots + a_k(z_0) = 0$. Из теоремы о неявной функции следует, что каждая ветвь определяет (почти во всех точках) гладкое, даже комплексно-аналитическое подмногообразие в $\mathbf{C}^2$, так как $\varphi_i(z)$ — (локально) комплексно-аналитическая функция.

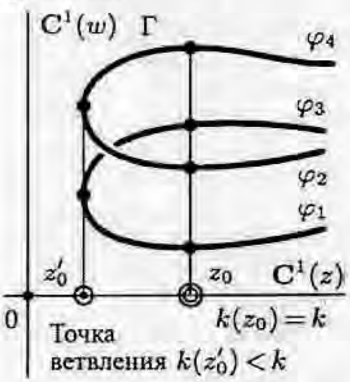


Рис. 5

3) Сопоставим каждой точке $z_0 \in \mathbf{C}^1(z)$ число $k(z_0)$, равное числу различных корней уравнения $f(z_0, w) = 0$. Ясно, что $k(z_0) \leqslant k$. Если все корни уравнения $f(z_0, w) = 0$ простые, то $k(z_0) = k$; если же есть кратные корни, то $k(z_0) < k$. Число $k(z_0)$ равно числу различных значений $w = g(z)$ в точке z_0. Точки z_0, где $k(z_0) < k$, характеризуются также тем, что в них некоторые ветви $\varphi_i(z)$ функции $w = g(z)$ сливаются вместе, уменьшая число различных значений $\{\varphi_i(z)\}$ над z_0 (см. рис. 5). Будем считать, что $f(z, w) = w^q - P_n(z)$, и полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. В силу теоремы 1 поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$ — комплексно-аналитическое подмногообразие в $\mathbf{C}^2$. Точки $z_0 \in \mathbf{C}^1(z)$, для которых $k(z_0) < k$, назовем *точками ветвления алгебраической функции* $w = g(z)$ (об этом термине см. ниже). В примере: $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$, точками ветвления (в конечной части $\mathbf{C}^1(z)$, т. е. в плоскости $\mathbf{C}^1(z)$, не пополненной «бесконечностью») являются корни полинома $P_n(z)$; причем если $z_1, \ldots, z_n$ — корни $P_n(z)$ (все они простые), то $k(z_\alpha) < k = q = \deg_w(w^q - P_n(z))$, так как $k(z_\alpha) = 1$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Точку «бесконечность» пока не рассматриваем. Итак, все точки ветвления функции $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$ изолированы.

4) Точки ветвления (в конечной части $\mathbf{C}^1(z)$) обладают таким свойством: в них сливаются несколько ветвей функции $w = g(z)$. Так как точка ветвления изолирована, то можно считать ее центром достаточно малого

диска D^2, в котором нет других точек ветвления, а потому $k(z) = k$ при $z \in D^2, z \neq z_0$. Рассмотрим окружность с центром в z_0, расположенную в D^2; совершим обход по ней вокруг z_0. Тогда ветви функции $g(z)$, вообще говоря, меняются местами и, обходя нужное число раз вокруг z_0, можно перейти с ветви на ветвь.

Разберем пример. Пусть $f = w^2 - P_n(z)$, где $P_n(z)$ не имеет кратных корней; пусть $n = 1$, т. е. $f = w^2 - z$. Тогда $w = g(z) = \sqrt{z}$. Ясно, что $k = 2$, $w = \{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$, где $\varphi_1(z_0) = +\sqrt{z_0}$; $\varphi_2(z_0) = -\sqrt{z_0}$; если $z = re^{i\varphi}$, то $\varphi_1(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$; $\varphi_2(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$; $\varphi_1(z) \neq \varphi_2(z)$ при $z \neq 0$; $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. Точка $0 \in \mathbf{C}^1(z)$ — единственная точка ветвления в конечной части плоскости. Обе ветви — гладкие функции. При обходе вокруг 0 (r — постоянно, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$), ветви $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ меняются местами:

$$\varphi_1(z) = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}} \to \sqrt{r}e^{\frac{i(\varphi+2\pi)}{2}} = -\sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}} = \varphi_2(z).$$

Условно эту схему перестановки см. на рис. 6 . На самой римановой поверхности особых точек нет, так как Γ — гладкое подмногообразие в $\mathbf{C}^2$.

Ветвление второго порядка можно условно изобразить в трехмерном евклидовом пространстве, если допустить самопересечение поверхности (см. рис. 7).

Изучим глобальные топологические свойства римановых поверхностей. Ограничимся случаем: $f(z, w) = w^2 - P_n(z)$, где $P_n(z)$ не имеет кратных корней. Поверхность Γ задается в $\mathbf{C}^2$ как график $w = g(z) = \sqrt{P_n(z)}$. Изучим поведение Γ на бесконечности. Следует пояснить, что мы будем понимать под «бесконечностью». Имеется несколько разных способов придать этому содержательный смысл. Эта задача называется «задачей компактификации» и связана с более общим вопросом: как можно делать из некомпактных открытых многообразий компактные многооб-

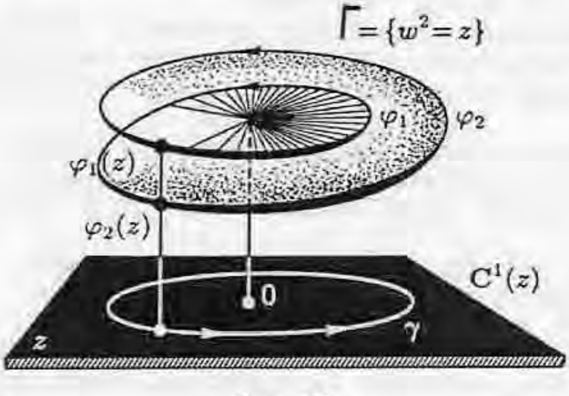


Рис. 6

190

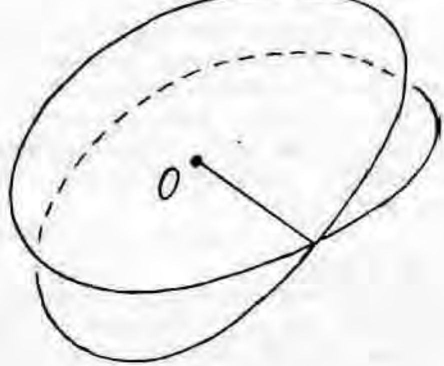


Рис. 7

разия, «присоединяя край». В общем случае, эта задача не имеет универсального решения, так как понятие компактификации зависит от нужд данной задачи — одно и то же открытое многообразие можно компактифицировать различными способами (если оно вообще допускает компактификацию).

Рассмотрим прямую $\mathbf{C}^1(z)$ и пополним ее бесконечно удаленной точкой, т. е. присоединим к плоскости $\mathbf{R}^2(x, y)$ бесконечность; при этом, $\mathbf{C}^1 \cup \infty$ превращается в S^2, которую будем называть «пополненной комплексной прямой». Имеется канонический способ отождествить пополненную комплексную прямую с одномерным пространством $\mathbf{CP}^1$. Выберем для $\mathbf{CP}^1$ модель: $(\lambda z^1, \lambda z^2)$, где $\lambda \neq 0$; рассмотрим отображение $h\colon (\lambda z^1, \lambda z^2) \to \dfrac{\lambda z^1}{\lambda z^2} = \dfrac{z^1}{z^2} \in S^2 = \mathbf{C}^1(z) \cup \infty$. Если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \rho$, то можно считать, что $a = 1, c = 1$, т. е. $b = d = \rho^{-1}$ и $(1, \rho^{-1}) = (1, \rho^{-1})$, т. е. в «конечных» точках расширенной плоскости $\mathbf{R}^2 \cup \infty = S^2$, отображение h — гомеоморфизм; добавление точки ∞ сохраняет это свойство h. Итак, иногда можно считать, что $\mathbf{CP}^1 \cong S^2$.

Есть канонический способ компактифицировать $\mathbf{C}^2$ и превратить его в компактное многообразие. Этот способ частично нам известен и заключается во введении проективных координат. Рассмотрим $\mathbf{CP}^2$, отнесенное к однородным координатам (x^1, x^2, x^3); тогда $\mathbf{CP}^2$ покрывается тремя картами, гомеоморфными $\mathbf{C}^2$:

$$A_1 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^1 \neq 0\};$$
$$A_2 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^2 \neq 0\}; \quad A_3 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^3 \neq 0\}.$$

Пусть

$$\alpha_3\colon A_3 \to \mathbf{C}^2(z, w), \alpha_3(\lambda(x^1, x^2, x^3)) = \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right); z = \frac{x^1}{x^3}, w = \frac{x^2}{x^3},$$

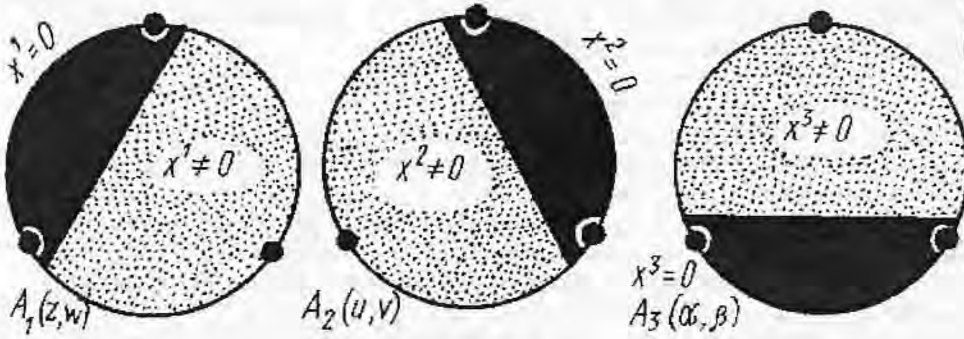


Рис. 8

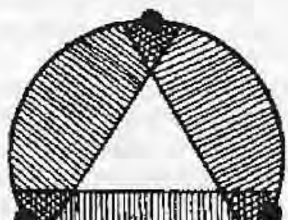
тогда α_3 — гомеоморфизм между картой A_3 и $\mathbf{C}^2$. Аналогично строятся гомеоморфизмы $\alpha_2\colon\ A_2 \to \mathbf{C}^2(u,v)$; $\alpha_1\colon\ A_1 \to \mathbf{C}^2(\alpha,\beta)$;

$$u = \frac{x^1}{x^2},\ v = \frac{x^3}{x^2};\ \alpha = \frac{x^2}{x^1},\ \beta = \frac{x^3}{x^1},$$

(см. рис. 8 и рис. 9). Положим

$$\mathbf{CP}^1_1 = S^2_1 = \{\lambda(0,x^2,x^3)\};\ \mathbf{CP}^1_2 = S^2_2 = \{\lambda(x^1,0,x^3)\};$$
$$\mathbf{CP}^1_3 = S^2_3 = \{\lambda(x^1,x^2,0)\};$$

тогда $\mathbf{CP}^2 = A_1 \cup S^2_1$; $\mathbf{CP}^2 = A_2 \cup S^2_2$; $\mathbf{CP}^2 = A_3 \cup S^2_3$, где компактные двумерные многообразия S^2_1, S^2_2, S^2_3 гомеоморфны S^2. Итак, $\mathbf{C}^2$ можно компактифицировать добавлением сферы S^2, что превращает $\mathbf{C}^2$ в $\mathbf{CP}^2$. Рассмотрим описанную компактификацию $\mathbf{C}^2$ и проследим за тем, что происходит при этом с римановой поверхностью Γ, вложенной в $\mathbf{C}^2$. Так как Γ — некомпактна и уходит на бесконечность, то Γ также подвергается компактификации, превращаясь в компактное топологическое пространство $\widetilde{\Gamma}$. Оно вложено в $\mathbf{CP}^2$ и не всегда является гладким подмногообразием — у него может быть особая точка на бесконечности. В некоторых случаях, например, когда степень n полинома равна 1, 2 или 3, эта пополненная риманова поверхность является гладким подмногообразием. Ниже мы докажем это для частного случая и для $n = 1, 2$.

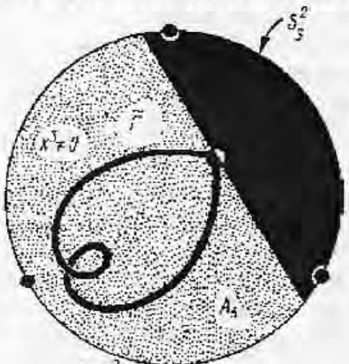


$\mathbf{CP}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

Рис. 9

Так как $\Gamma \subset A_3 = \{\lambda(x^1,x^2,x^3), x^3 \neq 0\}$, то при компактификации $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{CP}^2$ следует найти пересечение $\widetilde{\Gamma}$ с добавленной сферой $S^2 = \mathbf{CP}^1 = S^2_3$. Пусть $n > 2$. При замене $z = \dfrac{x^1}{x^3}$, $w = \dfrac{x^2}{x^3}$ уравнение $\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k) = w^2$

переходит в: $(x^2)^2(x^3)^{n-2} - \prod\limits_{k=1}^{n}(x^1 - a_k x^3) = 0$ (проверьте!). Так как S_3^2 определяется в $\mathbf{CP}^2$ уравнением: $x^3 = 0$, то для нахождения пересечения $\widetilde{\Gamma} \cap S_3^2$ следует положить в этом уравнении $x^3 = 0$, что дает решение: ($x^1 = 0$, x^2 — любое, $x^3 = 0$). Это значит, что $\widetilde{\Gamma} \cap S_3^2$ состоит из одной точки, имеющей в карте $A_2 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^2 \neq 0\}$ координаты: $u = \dfrac{x^1}{x^2} = 0$, $v = \dfrac{x^3}{x^2} = 0$ (см.рис. 10). Для изучения локальной структуры множества решений уравнения $(x^2)^2(x^3)^{n-2} - \prod\limits_{k=1}^{n}(x^1 - a_k x^3) = 0$ в окрестности точки $(x^1 = x^3 = 0, x^2 = \lambda)$, следует сделать замену: $u = \dfrac{x^1}{x^2}$, $v = \dfrac{x^3}{x^2}$, что дает уравнение: $q = v^{n-2} - \prod\limits_{k=1}^{n}(u - a_k v) = 0$. При $n > 3$ полином q имеет нулевой градиент в точке $(0,0)$, это не позволяет непосредственно усмотреть, что поверхность $\widetilde{\Gamma}$ — гладкое подмногообразие в этой точке. И действительно, пополненная риманова поверхность имеет здесь особенность при $n > 3$. При $n = 1, 2, 3$ особенности нет. Здесь мы рассмотрим, для простоты, только случаи $n = 1$ и $n = 2$.



$\mathbf{CP}^2$

Рис. 10

При $n = 1$ имеем: $w^2 - z = 0$; $\left(\dfrac{x^2}{x^3}\right)^2 - \dfrac{x^1}{x^3} = 0$; $(x^2)^2 - x^1 x^3 = 0$. Так как $\Gamma \subset A_3$, то нужно найти $\widetilde{\Gamma} \cap S_3^2$, т. е. положить $x^3 = 0$, что дает: (x^1 — любое, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$). Итак, пересечение $\widetilde{\Gamma}$ с бесконечно удаленной сферой S_3^2 — одна точка, имеющая в карте $A_1 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^1 \neq 0\}$ координаты $\alpha = \dfrac{x^2}{x^1} = 0$, $\beta = \dfrac{x^3}{x^1} = 0$. Для изучения окрестности этой точки следует сделать замену: $\alpha = \dfrac{x^2}{x^1}$, $\beta = \dfrac{x^3}{x^1}$, что дает: $[(x^2)^2 - x^1 x^3 = 0] \to \left[\left(\dfrac{x^2}{x^1}\right)^2 - \dfrac{x^3}{x^1} = 0\right] = [\alpha^2 - \beta = 0]$. Ясно, что это уравнение определяет гладкое подмногообразие в окрестности точки $\alpha = \beta = 0$, что и доказывает гладкость компактифицированной поверхности $\widetilde{\Gamma}$ в бесконечно удаленной точке. При $n = 2$ имеем: $w^2 - (z - a_1)(z - a_2) = 0$, где $a_1 \neq a_2$,

$$\left(\frac{x^2}{x^3}\right)^2 - \left(\frac{x^1}{x^3} - a_1\right)\left(\frac{x^1}{x^3} - a_2\right) = 0; \ (x^2)^2 - (x^1 - a_1 x^3)(x^1 - a_2 x^3) = 0.$$