

#### 4. Гауссова и средняя кривизны двумерных поверхностей

Найдем явный вид гауссовой и средней кривизн для явного задания двумерной поверхности. Пусть  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$  задана в виде графика  $z = f(x, y)$ , где  $(x, y, z)$  — декартовы координаты в  $\mathbf{R}^3$ . Пусть  $f(0, 0) = 0$ ; тогда координатная плоскость  $(x, y)$  — касательная к  $V^2$  в точке  $(0, 0)$ . Так как

$$G|_{(0,0)} = (\delta_{ij}) = E, \quad Q|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

то  $K = \det Q = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ ;  $H = \text{Spur } Q = f_{xx} + f_{yy} = \lambda_1 + \lambda_2$ . (Здесь через Spur обозначен след матрицы). Нахождение  $H$  и  $K$  в точках, отличных от  $(0, 0)$ , требует вычислений. Пусть  $G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ ;  $Q = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ ; тогда

$$G^{-1} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}; \text{ где } g = \det G;$$

$$G^{-1}Q = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -MF + EN \end{pmatrix};$$

$$H = \text{Spur } (G^{-1}Q) = \frac{1}{g}(GL - 2MF + EN);$$

$$K = \det (G^{-1}Q) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Лекция  
13

**Замечание.** В этом параграфе одной и той же латинской буквой  $G$  обозначена как матрица первой квадратичной формы, так и (традиционно) один из элементов этой матрицы.

Если  $z = f(x, y)$ , то  $ds^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2)dy^2$ .

Так как радиус-вектор  $V^2$ , заданной графиком  $z = f(x, y)$ , имеет вид:  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , то:

$$\mathbf{r}_{xx} = (0, 0, f_{xx}); \quad \mathbf{r}_{xy} = (0, 0, f_{xy}); \quad \mathbf{r}_{yy} = (0, 0, f_{yy});$$

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } (z - f)}{|\text{grad } (z - f)|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}};$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}; \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}; \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Отсюда:

$$H = \frac{GL - 2MF + EN}{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}};$$

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

Гауссова и средняя кривизны являются скалярными функциями, определенными в каждой точке поверхности, и инвариантами поверхности; в частности, они не зависят от выбора локальных координат.

Вычислим гауссову и среднюю кривизны стандартно вложенной сферы  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Так как любое нормальное сечение  $S^2$  в произвольной точке  $P$  является экватором, то  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{R}$ , где  $R$  — радиус сферы. Следовательно, кривизна любого нормального сечения равна  $\lambda = \frac{1}{R}$ , а потому  $K = \frac{1}{R^2}$ ,  $H = \frac{2}{R}$ , в частности, гауссова и средняя кривизны постоянны.

Гауссова и средняя кривизны двумерной плоскости равны нулю.

**Определение 8.** Двумерная поверхность  $V^2 \subset \mathbb{R}^3$  называется *поверхностью постоянной кривизны*, если ее гауссова кривизна  $K$  постоянна.

Так например, стандартная сфера  $S^2$  и евклидова плоскость являются многообразиями постоянной кривизны.

**Определение 9.** Двумерная поверхность  $V^2 \subset \mathbb{R}^3$  называется *поверхностью положительной, нулевой, отрицательной кривизны*, если, соответственно, гауссова кривизна поверхности во всех ее точках положительна, равна нулю, отрицательна.

Стандартная двумерная сфера является многообразием положительной (постоянной) кривизны.

**Задача 1.** Докажите, что поверхность  $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ , задаваемая уравнением:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (эллипсоид), является поверхностью строго положительной кривизны, если полуоси  $a, b, c$  отличны от 0 и  $\infty$ . Эллипсоид можно записать параметрически так

$$x = a \cos \theta \cos \varphi; \quad y = b \cos \theta \sin \varphi; \quad z = c \sin \theta.$$

Евклидова двумерная плоскость является многообразием нулевой постоянной кривизны. Пример многообразия отрицательной кривизны дает график:  $z = x^2 - y^2$ . Ясно, что  $K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} = \frac{-4}{(1 + 4(x^2 + y^2))^2} < 0$ . В этом примере гауссова кривизна является переменной функцией. Хотелось бы, по аналогии с поверхностями постоянной положительной и нулевой кривизны, построить многообразие постоянной отрицательной

кривизны  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ . Сейчас мы укажем одну из таких поверхностей. Тем самым мы докажем утверждение:

**Утверждение 1.** В трехмерном евклидовом пространстве существуют (локально) поверхности постоянной положительной, нулевой и отрицательной кривизны.

Рассмотрим на плоскости  $(x, y)$  гладкую кривую  $\gamma$ , расположенную в первом квадранте, со следующим свойством: длина отрезка касательной от точки касания с кривой до точки пересечения касательной с осью  $Ox$  постоянна и равна  $a$  (рис. 16). При перемещении точки  $A$  по кривой  $\gamma$  точка  $B$  скользит по оси  $Ox$  и отрезок  $AB$  имеет постоянную длину, равную  $a$ . Кривая  $\gamma$  может быть получена чисто механическим путем, если связать две точки:  $A$  и  $B$  нерастяжимой нитью длины  $a$  и, поместив  $A$  и  $B$  в положения  $A_0, B_0$  соответственно (см. рис. 16), начать перемещать точку  $B$  по оси  $Ox$ . При этом точка  $A$  будет прочерчивать кривую  $\gamma$ , касающуюся оси  $Oy$  в точке  $A_0$  и имеющую асимптоту — ось  $Ox$ . При этом мы считаем, что точки  $A$  и  $B$  скользят по плоскости без трения; тогда вектор скорости будет все время направлен вдоль нити, соединяющей точки  $A$  и  $B$ , т. е. движение точки  $A$  будет однозначно определено. Найдем дифференциальное уравнение кривой  $\gamma$ . Из треугольника  $ABx$  (см. рис. 16) имеем:  $\operatorname{tg} \varphi = -y'_x$ , где  $y = y(x)$  — график  $\gamma$ ;  $a \sin \varphi = y$ . Отсюда:

$$\sin \varphi = \frac{y'_x}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{ay'_x}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}} = -y; \quad x'_y = -\frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{y},$$

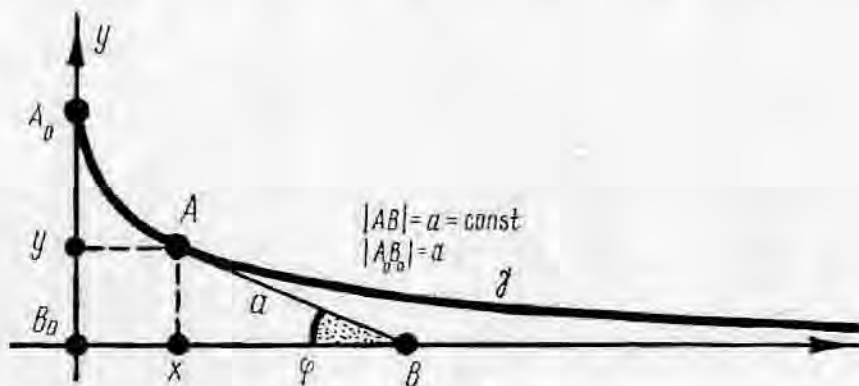


Рис. 16

где  $x = x(y)$  — график  $\gamma$ . Итак:

$$\begin{aligned}
 x(y) &= - \int_y^a \frac{1}{y} \sqrt{a^2 - y^2} dy = -a^2 \int_y^a \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} + \int_y^a \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \\
 &= -a^2 \int_y^a \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - y^2} = \\
 &= -\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Итак, мы получили явную формулу графика  $x = x(y)$ . Рассмотрим поверхность вращения, получающуюся при вращении кривой  $\gamma$  вокруг оси  $Ox$  (см. рис. 17). Получающаяся поверхность  $V^2$  называется поверхностью Бельтрами, или псевдосферой; это последнее название мы прокомментируем позже. Найдем гауссову кривизну поверхности Бельтрами. Для этого нужно уметь вычислять гауссову кривизну поверхности вращения. Решим эту задачу в общем виде.

Рассмотрим в  $\mathbf{R}^3(x, y, z)$  поверхность вращения  $V^2$ , образованную вращением вокруг оси  $Ox$  гладкой кривой  $x = x(y)$  (т. е. образующей), расположенной в плоскости  $Oxy$ . На  $V^2$  возникает координатная сеть: параллели и меридианы; эта сеть ортогональна в том смысле, что в каждой точке координатные линии пересекаются под прямым углом (см. рис. 18).

**Лемма 4.** В каждой точке поверхности вращения главные направления, т. е. направления, отвечающие главным кривизнам  $\lambda_1, \lambda_2$ , всегда можно считать совпадающими с направлениями меридиана и параллели, проходящих через эту точку.

**Замечание.** В формулировке леммы, употребляя термин «можно считать», мы имели ввиду следующее: если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то главные направления определены

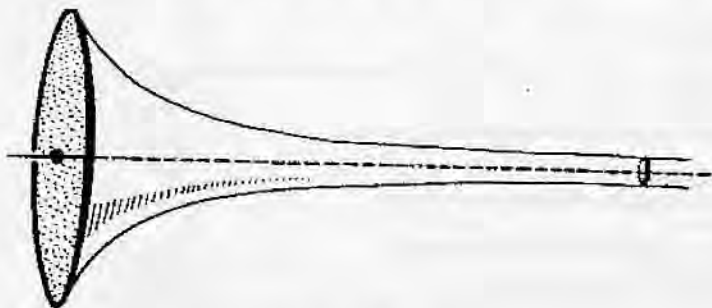
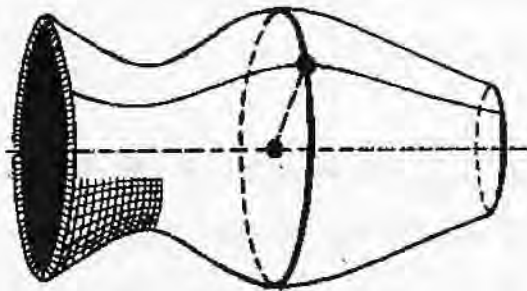


Рис. 17



170

Рис. 78

однозначно и совпадают с направлениями меридиана и параллели; если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то тогда любое направление — главное, в частности и взаимно-ортогональные направления меридиана и параллели.

*Доказательство.* Как мы знаем, главными направлениями в  $T_P V^2$  являются те и только те ортобазисы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , в которых обе формы  $G$  и  $Q$  — диагональны. Ясно, что первая форма  $G$  диагональна в системе координат, порожденной меридианами и параллелями (см., например, вычисление формы  $G$  для поверхности вращения). Осталось доказать, что в этой же системе координат диагональна и вторая форма  $Q$ . Пусть  $(u, v)$  — координаты на  $V^2$ , порождающие координатную сеть: меридианы — параллели. Надо доказать, что  $M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle \equiv 0$ , где  $\mathbf{r}(u, v)$  — радиус-вектор  $V^2$ ,  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $V^2$ ;  $Q = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$  — вторая форма. Рассмотрим цилиндрические координаты  $(r, \varphi, x)$  в  $\mathbf{R}^3$ ; пусть  $V^2$  задается образующей:  $r = r(x)$ ; тогда радиус-вектор  $\mathbf{r}(x, \varphi)$  поверхности  $V^2$  имеет вид:  $\mathbf{r}(x, \varphi) = (x, r(x) \cos \varphi, r(x) \sin \varphi)$  (см. рис. 79). Отсюда  $\mathbf{r}_{x\varphi} = (0, -r' \sin \varphi, r' \cos \varphi)$ . Нормаль к  $V^2$  имеет вид:  $\mathbf{n} = (r', -\cos \varphi, -\sin \varphi) / \sqrt{1 + (r')^2}$ . Ясно, что  $\langle \mathbf{r}_{x\varphi}, \mathbf{n} \rangle = 0$ , что и требовалось. Итак,  $Q = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ , что и доказывает лемму.  $\square$

**Лемма 5.** Гауссова кривизна  $K(P)$  в точке  $P \in V^2$ , где  $V^2$  — поверхность вращения, имеет вид:  $|K| = \frac{|r''|}{r(1 + (r')^2)^2}$ , где  $r = r(x)$  — уравнение образующей поверхности вращения  $V^2$  в цилиндрических координатах.

**Замечание.** Иными словами,  $K = \lambda_1 \lambda_2$ , где  $\frac{1}{r\sqrt{1 + (r')^2}} = \lambda_1$  — кривизна нормального сечения, вдоль направления параллели в точке  $P$ . Вообще го-

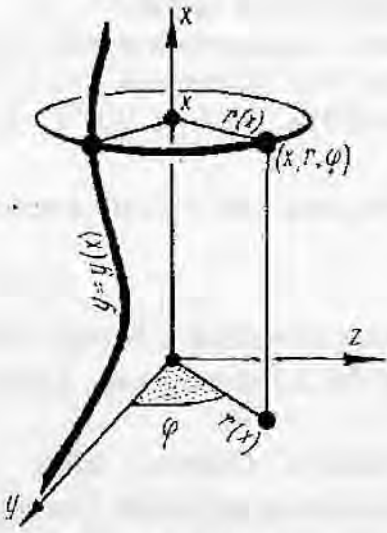


Рис. 19

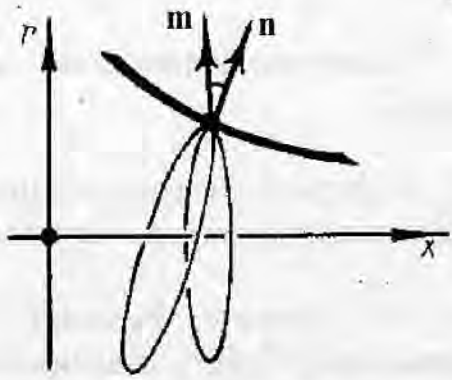


Рис. 20

вора, нормальное сечение в направлении параллели не совпадает с самой параллелью (эта формула для кривизны  $\lambda_1$  будет доказана ниже). Далее:  $\lambda_2 = k(x)$  — кривизна плоской кривой  $y = y(x)$  в точке  $x$ , т. е. кривизна меридиана.

*Доказательство.* В силу леммы 4 главные направления совпадают с направлениями меридиана и параллели, проходящих через точку  $P$ , а потому  $K(P) = \lambda_1 \lambda_2$ , где  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  — кривизны плоских кривых: меридиана и нормального сечения вдоль направления параллели, соответственно. Поскольку параллель является окружностью, то ее кривизну мы ниже используем для нахождения кривизны нормального сечения. Так как меридиан совпадает с образующей  $r = r(x)$ , то  $\lambda_2(x) = \frac{r''}{(1 + (r')^2)^{3/2}}$ , что следует из формул Френе для плоских кривых. Найдем  $\lambda_1(x)$  для нормального сечения вдоль направления параллели в точке  $P = (x, r(x))$ . Рассмотрим параллель как плоское сечение  $V^2$ ; тогда кривизна  $k(\theta, \alpha)$  этого сечения (вдоль  $\alpha$ , определяемого параллелью) равна  $1/r(x)$ , так как радиус окружности-параллели равен  $r(x)$ . Здесь угол  $\theta$  равен углу между нормалью к  $V^2$  и вектором  $\mathbf{m}$ , расположенным в плоскости параллели (рис. 20). Напомним, что  $k(\theta, \alpha) = \frac{1}{\cos \theta} k(0, \alpha)$  (см. выше). Здесь  $k(0, \alpha) \frac{\cos \theta}{r} = \cos \theta k(\theta, \alpha)$  — интересующая нас кривизна  $\lambda_1$ . Осталось найти  $\cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между единичными векторами  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ . Так как в плоскости  $xOr$  вектор  $\mathbf{m}$  имеет координаты  $(0, 1)$ , а вектор  $\mathbf{n}$  — координаты  $\frac{1}{\sqrt{1 + (r')^2}}(-r', 1)$ , то  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (r')^2}}$ . Следовательно,

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{r\sqrt{1+(r')^2}}. \text{ Отсюда}$$

$$|K| = \frac{1}{r\sqrt{1+(r')^2}} \frac{|r''|}{1+(r')^2} = \frac{|r''|}{r(1+(r')^2)^2}.$$

172

Лемма доказана. □

**Лемма 6.** Поверхность Бельтрами является многообразием постоянной отрицательной кривизны.

*Доказательство.* Поскольку поверхность Бельтрами является поверхностью вращения, то для подсчета гауссовой кривизны можно воспользоваться формулой, полученной в лемме 5. Функция  $y = y(x)$  является обратной функцией к функции

$$x = x(y) = -\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} \right),$$

найденной нами ранее. Как было уже подсчитано,  $x'_y = \frac{-\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ ; отсюда  $x'' = \frac{a^2}{r^2 \sqrt{a^2 - y^2}}$ ; следовательно,

$$K = \frac{r''}{r(1+(r')^2)^2} = \frac{-x''}{(x')^5 r \left(1 + \frac{1}{(x')^2}\right)^2} = \frac{-x'' x'}{r(1+(x')^2)^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

Знак «минус» возник вследствие того, то кривая  $y = y(x)$  выпукла вниз а потому, по отношению к любому выбору нормали  $\mathbf{n}(P)$ , собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют различные знаки. Итак,  $K = -\frac{1}{a^2}$ , что и доказывает лемму. □

Итак, мы указали в  $\mathbf{R}^3$ , по крайней мере локально, поверхности постоянной положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Многообразие постоянной положительной кривизны (сфера) является компактным и замкнутым (без края) многообразием; многообразие нулевой кривизны (плоскость или конус, образованный семейством прямых, исходящих из одной точки, конечной или бесконечной, и скользящих по произвольной гладкой кривой  $\gamma$  в  $\mathbf{R}^3$ ) является некомпактным (без края) открытым многообразием. Предъявленное нами многообразие отрицательной постоянной кривизны отличается от предыдущих двух

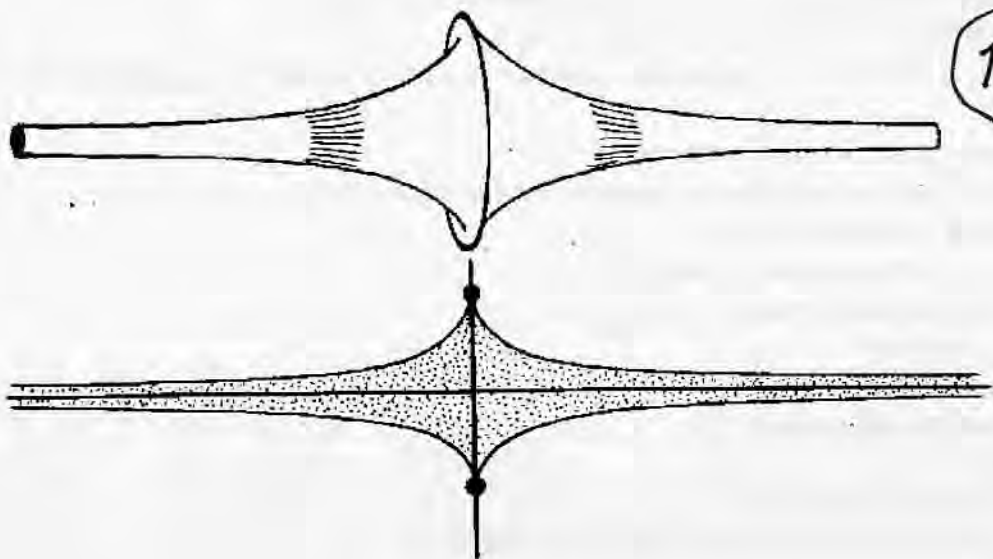


Рис. 21

примеров тем, что эта поверхность не является замкнутым многообразием и не может быть продолжена на бесконечность. Эта поверхность (см. рис. 17) имеет границу — окружность радиуса  $a$  с центром в начале координат  $O$ , причем можно показать (мы здесь не будем изучать этот вопрос детально), что поверхность не может быть продолжена за эту окружность с сохранением условия:  $K(P) = -\frac{1}{a^2} < 0$ .

Обычно эту поверхность «доставляют», добавляя поверхность, симметричную исходной относительно плоскости  $yOz$  (рис. 21). Эта поверхность имеет «окружность излома», в точках которой поверхность не является гладким подмногообразием в  $\mathbf{R}^3$ . Оказывается, что появление этой окружности, составленной из особых точек, не случайно. На первый взгляд, этих особенностей можно было бы избежать, продолжив построенную выше «воронку» за окружность радиуса  $a$ ; например, так, как это показано на рис. 22. (Напомним, что в точке  $A_0$  на оси  $Oy$  график образующей касается оси  $Oy$ .) Однако сделав такое продолжение, мы обнаруживаем, что получающаяся поверхность вращения уже не является поверхностью отрицательной кривизны: часть поверхности, заметае-

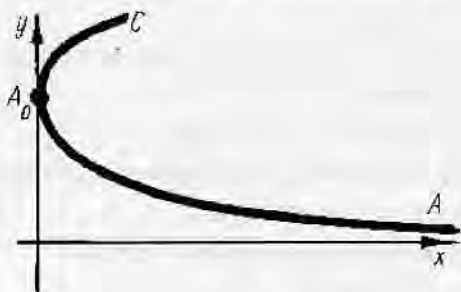


Рис. 22



мая дугой  $A_0C$  (см. рис. 22), является поверхностью положительной кривизны, так как дуга  $A_0C$  выпукла вверх (в отличие от дуги  $A_0A$ ).

Следовательно, возникает подозрение, что мы не можем продолжить гладким образом поверхность Бельтрами за окружность, прочерчиваемую точкой  $A_0$  при вращении вокруг оси  $Ox$ , с сохранением условия отрицательности кривизны. Таким образом, наши попытки построить в  $\mathbf{R}^3$  замкнутое, компактное или некомпактное, но уходящее по всем направлениям на бесконечность многообразие постоянной отрицательной кривизны, наталкиваются на трудности. Здесь легко увидеть существенное отличие поверхностей постоянной отрицательной кривизны от поверхностей постоянной положительной кривизны. Поверхности переменной отрицательной кривизны, уходящие в  $\mathbf{R}^3$  на бесконечность по всем направлениям, существуют: например, указанная нами ранее поверхность гиперболического параболоида  $z = x^2 - y^2$ ; здесь гауссова кривизна отрицательна и стремится к нулю на бесконечности, например, если  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ .

Чтобы продвинуться немного дальше, найдем индуцированную риманову метрику на «воронке» Бельтрами, вложенной в  $\mathbf{R}^3$ . Введем в  $\mathbf{R}^3$  цилиндрические координаты  $(x, r, \varphi)$ , где  $x = x$ ,  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$  (т. е. ось  $Ox$  — ось вращения); тогда индуцированная метрика на поверхности вращения с образующей, задаваемой функцией  $x = x(r)$ , имеет вид:

$$ds^2 = (dx(r))^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (1 + (x'_r)^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

В нашем примере:  $x'_r = -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}$  (см. выше), т. е.  $ds^2 = \frac{dr^2}{r^2} + r^2 d\varphi^2$ .

**Утверждение 2.** Риманова метрика, индуцированная на поверхности Бельтрами объемлющей евклидовой метрикой, является метрикой Лобачевского.

*Доказательство.* Рассмотрим замену:  $u = \varphi$ ,  $v = \frac{1}{r}$ ; тогда  $ds^2 = \frac{v^2}{v^4} dv^2 + \frac{du^2}{v^2} = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ , что, очевидно, и доказывает утверждение.  $\square$

Итак, локально поверхность Бельтрами изометрична плоскости Лобачевского, т. е. мы построили изометричное вложение некоторой области плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство. Какая именно часть плоскости Лобачевского допускает изометричное вложение в  $\mathbf{R}^3$  (в виде поверхности Бельтрами)? С самого начала отметим, что вся поверхность Бельтрами не изометрична никакому куску плоскости Лобачевского.

Оказывается, в трехмерном евклидовом пространстве нет полных двумерных поверхностей с отрицательной постоянной или даже переменной гауссовой кривизной, отделенной от нуля некоторой постоянной. Доказательство этого общего факта весьма нетривиально и принадлежит Н. В. Ефимову.

Рассмотрим теперь среднюю кривизну поверхностей  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ . Как было отмечено, средняя кривизна зависит от способа вложения  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ , т. е. определяется как первой, так и второй формами. При изучении свойств гауссовой кривизны мы решали, в частности, такую задачу: найти двумерные поверхности, имеющие заданную постоянную кривизну. Мы довольно легко предъявили примеры поверхностей постоянной положительной, нулевой и отрицательной кривизны. Например, двумерное гладкое замкнутое риманово многообразие постоянной положительной кривизны гомеоморфно либо сфере, либо проективной плоскости.

Соответствующая задача о поверхностях постоянной средней кривизны, т. е. проблема описания поверхностей постоянной средней кривизны, значительно сложнее. Рассмотрим, например, поверхности нулевой средней кривизны — так называемые минимальные поверхности. Они, кстати, характеризуются тем свойством, что площадь их локально ми-

175

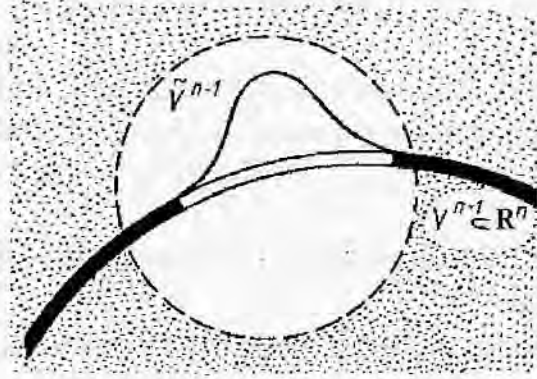


Рис. 23

нимальна по сравнению с площадью других гиперповерхностей, отличающихся от исходной только внутри (любого) шара достаточно малого радиуса (см. рис.23). Физической моделью минимальных поверхностей  $V^2 \subset \mathbb{R}^3$  являются «мыльные пленки», возникающие на замкнутых контурах, изготовленных из проволоки, после извлечения их из сосуда, наполненного мыльной водой. При этом на один и тот же контур можно натянуть, вообще говоря, несколько минимальных пленок. Рассмотрим  $V^2 \subset \mathbb{R}^3$  и выведем уравнение двумерных минимальных поверхностей. Так как  $H = \frac{GL - 2MF + EN}{EG - F^2}$ , то уравнение  $H = 0$  принимает вид:  $GL - 2MF + EN = 0$ . Если поверхность задана с помощью графика  $z = f(x, y)$ , то:

$$ds^2 = (1 + f_x^2) dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2) dy^2;$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}; \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}; \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}};$$

следовательно,

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_{xy} f_x f_y + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0.$$

Уже сам вид этого уравнения в частных производных (решениями которого и являются минимальные поверхности) показывает, что решения его довольно сложны. Примеры: евклидова плоскость  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  является минимальной поверхностью, так как  $Q \equiv 0$  (проверьте!).

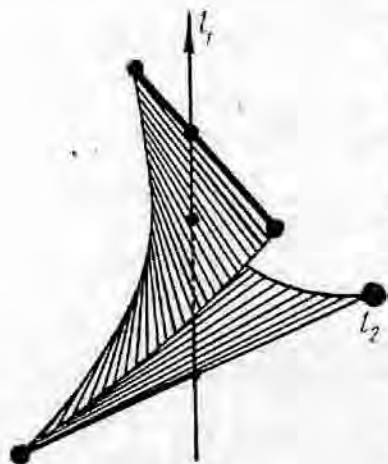


Рис. 24

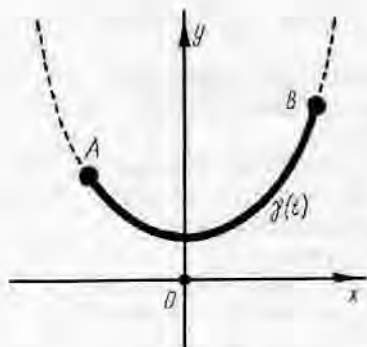


Рис. 25

Более сложный пример некомпактной минимальной поверхности получается так: рассмотрим в  $\mathbf{R}^3$  две ортогональные, пересекающиеся в точке  $O$ , прямые  $l_1$  и  $l_2$ . Фиксируем прямую  $l_1$  и будем перемещать вдоль нее с постоянной скоростью  $a$  прямую  $l_2$ , одновременно вращая  $l_2$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $l_1$  (возникает винтовое движение). Прямая  $l_2$  будет заметать некоторое двумерное гладкое подмногообразие  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ , которое называется *прямым геликоидом* (см. рис. 24).

*Упражнение:* доказать, что прямая геликоид — минимальная поверхность. Для удобства вычислений нужно ввести на нем координаты, индуцированные цилиндрическими координатами в  $\mathbf{R}^3$  с осью  $l_1 = Oz$ .

Отметим, что любая минимальная поверхность  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$  имеет неположительную гауссову кривизну, так как  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ .

Следующий пример будет связан с контуром  $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ , где под  $\Gamma$  понимается гладкое вложение набора окружностей в  $\mathbf{R}^3$ , которые не пересекаются. Рассмотрим некомпактную минимальную поверхность вращения, образованную вращением вокруг оси  $Ox$  гладкой кривой  $\gamma(t)$ , задаваемой уравнением  $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ . Как известно из курса

анализа, эта кривая определяет форму провисания тяжелой цепи, закрепленной в двух точках:  $A$  и  $B$  (рис. 25). При этом мы предполагаем, что тяжелая цепь подвешена достаточно высоко, так что кривая  $y(x)$  не пересекает оси  $Ox$ . Сила тяжести направлена вниз, вдоль оси  $Oy$ . Соответствующая поверхность называется *катеноидом* (рис. 26). Найдем  $H$ . Из доказательства леммы 5 видно, что

$$H = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} =$$

$$= \left(a \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right)^{-1} \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{-1/2} - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{-3/2} = 0.$$

Итак, катеноид — минимальная поверхность. Если рассмотреть только ту часть катеноида, которая заключена между двумя окружностями, образованными вращением точек  $A$  и  $B$  вокруг оси  $Ox$ , то получим пример

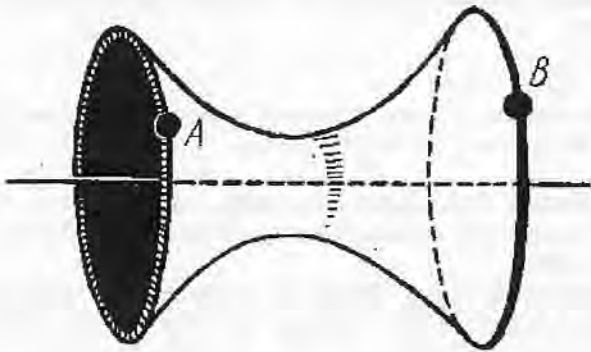


Рис. 26

минимальной поверхности, натянутой на контур  $\Gamma$ , состоящий из этих двух граничных окружностей. Здесь нам предоставляется случай продемонстрировать, что решение задачи на отыскание минимальной пленки с заданным контуром в качестве границы неединственно. В самом деле, кроме уже предъявленного нами решения (рис.26), существуют еще минимальные пленки с тем же граничным контуром — это два диска, затягивающие граничные окружности (рис.27), а также еще один катеноид. Дело в том, что, вообще говоря, через фиксированные точки  $A$  и  $B$  проходят две цепные линии:  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{b}$  и  $y = b \operatorname{ch} \frac{x}{b}$  при подходящих  $a$  и  $b$  (рис.28) (докажите!).

Отметим, что один из этих катеноидов устойчив, а второй — неустойчив (т.е. мыльная пленка при малом возмущении «лопается»).

Отметим, что два плоских диска, ограниченные двумя окружностями, существуют для любой пары точек  $A$  и  $B$ , в то время как катеноид далеко не всегда натягивается на граничные окружности. Ясно, что если точки  $A$  и  $B$  расположены достаточно далеко друг от друга, то катеноид построить нельзя (см. рис.28). Препятствие к его построению наглядно проявляется,

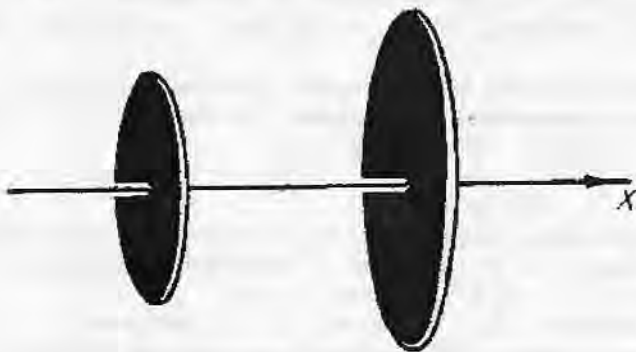


Рис. 27

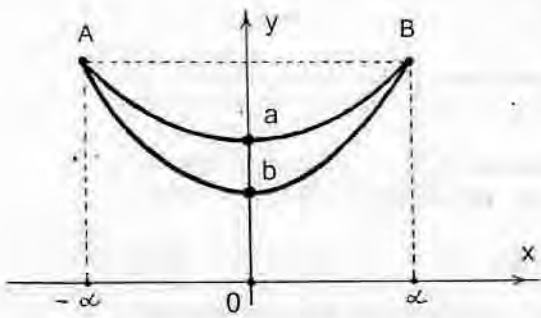


Рис. 28

когда мы начинаем раздвигать граничные окружности, растягивая катеноид, первоначально построенный для достаточно близко расположенных точек  $A$  и  $B$ . Процесс растяжения показан на рис. 29. Две цепные линии начинают сближаться, и в некоторый момент они сливаются (совпадают).

В этот момент «мыльная» (минимальная) пленка «лопается», исчезает, и при дальнейшем удалении точек  $A$  и  $B$  друг от друга из трех минимальных поверхностей остается только одна — пара плоских дисков.

Еще один пример контура, для которого существуют два решения уравнения  $H = 0$ , показан на рис. 30. Здесь обе минимальные пленки гомеоморфны друг другу.

В зависимости от способа вложения окружности  $S^1$  в  $R^3$  меняется и вид затягивающих ее минимальных пленок. При стандартном вложении  $S^1$  в плоскость  $(x, y) : x^2 + y^2 = 1$  минимальная пленка, затягивающая этот контур, только одна и совпадает с диском  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Если же  $S^1$  два раза оборачивается вокруг оси  $Oz$ , то решение уравнения  $H = 0$  является листом Мебиуса (см. рис. 31). Если  $S^1$  оборачивается вокруг оси  $Oz$

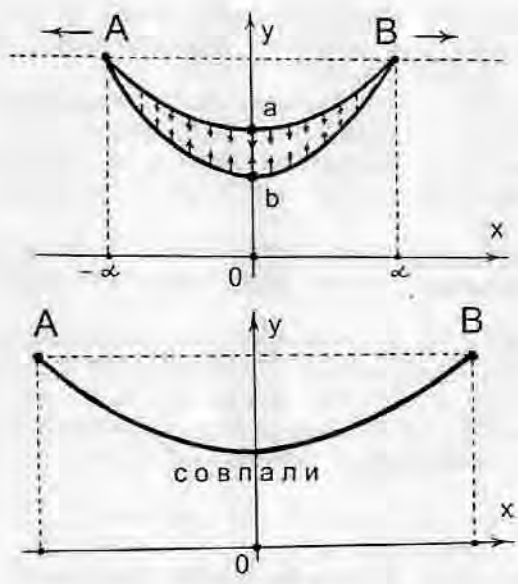


Рис. 29

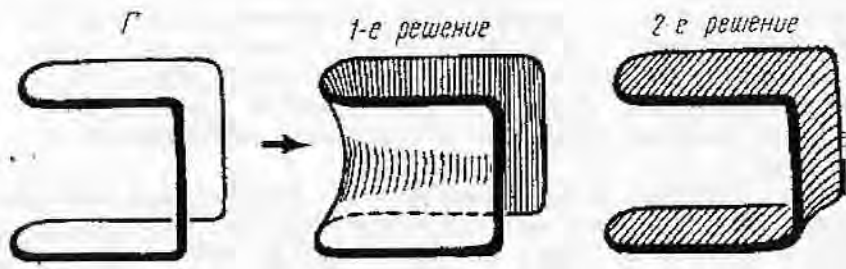


Рис. 30

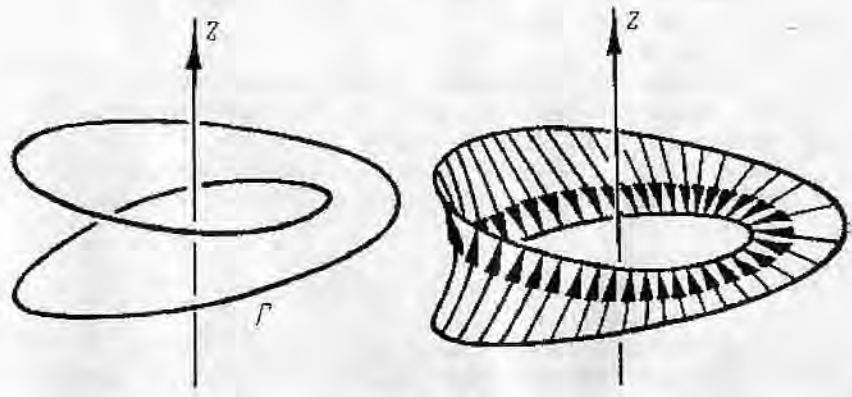


Рис. 31

С минимальными поверхностями тесно связаны так называемые гармонические поверхности  $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Пусть  $V^2$  задано так:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , где  $u, v$  — криволинейные координаты на  $V^2$ .

**Определение 10.** Радиус-вектор  $\mathbf{r}(u, v)$  называется *гармоническим* относительно координат  $u, v$ , если  $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} = 0$ , т.е.  $\Delta \mathbf{r} = 0$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа в координатах  $u, v$ .

Радиус-вектор  $\mathbf{r}(u, v)$ , гармонический в координатах  $(u, v)$ , не обязан быть гармоническим в других координатах  $(u', v')$ .

**Определение 11.** Поверхность  $V^2 \subset \mathbb{R}^3$  называется *гармонической*, если она может быть задана с помощью некоторого гармонического радиус-вектора  $\mathbf{r}(u, v)$  в некоторых криволинейных координатах  $(u, v)$ .

Будем говорить, что радиус-вектор  $\mathbf{r}(u, v)$  *минимален*, если средняя кривизна заметаемой им поверхности тождественно равна нулю. Так как

функция  $H = \lambda_1 + \lambda_2$  — скаляр и, в частности, не меняется при регулярных заменах координат на поверхности, то если радиус-вектор является минимальным относительно одной системы координат, он будет минимальным и относительно любой другой регулярной системы координат. Итак, понятие минимальной пленки не зависит от введенных на ней координат. Для гармонических поверхностей это уже не так, а потому говорят о гармонических отображениях  $\mathbf{r}: D(u, v) \rightarrow \mathbf{R}^3(x, y, z)$ , где  $D(u, v)$  — область на плоскости  $(u, v)$ , а  $\mathbf{r}(u, v)$  — отображение, определяющее поверхность  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ . Отображение  $\mathbf{r}$ , гармоническое в одних координатах, уже не будет, вообще говоря, гармоническим в других координатах (приведите пример!). Пример гармонической поверхности: зададим  $\mathbf{r}(x, y)$  формулой:  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ , где  $x, y, z$  — декартовы координаты в  $\mathbf{R}^3$ , т. е. поверхность  $V^2$  задается графиком  $z = x^2 - y^2$ , отнесенным к декартовой системе координат. Ясно, что  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \mathbf{r} = 0$ , т. е. поверхность  $z = x^2 - y^2$  — гармоническая. В то же время она не минимальна:  $H = 0$  только в точке  $(0, 0)$ , а в других точках  $H \neq 0$ .

Напомним, что криволинейные координаты  $(u, v)$  на поверхности  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$  называются *конформными*, если в них метрика  $E du^2 + 2F dudv + G dv^2$ , индуцированная на  $V^2$  объемлющей евклидовой метрикой, является диагональной, т. е.  $E = G, F = 0$ .

**Замечание.** Рассмотрим двумерное гладкое риманово многообразие, на котором задана риманова метрика  $ds^2$ , не обязательно индуцированная каким-либо вложением  $M^2$  в  $\mathbf{R}^3$ , с вещественно-аналитическими коэффициентами  $E, F, G$ , рассматриваемыми как функции от локальных криволинейных координат  $u, v$ . Тогда, оказывается, для любой точки  $P \in M^2$  существует такая окрестность  $U = U(P)$ , что в  $U$  можно ввести координаты  $p, q$  (являющиеся вещественно-аналитическими функциями от исходных координат  $u, v$ ), в которых  $ds^2$  имеет вид:  $\lambda(p, q)(dp^2 + dq^2)$ , т. е. координаты  $p, q$  будут конформными. Доказательство несложно, однако требует ссылки на теорему существования решения специального уравнения в частных производных (уравнения Бельтрами—Лапласа), что выходит за рамки нашего курса.

Как связаны гармонические и минимальные векторы в  $\mathbf{R}^3$ ? Пример гармонического, но не минимального вектора мы привели. Верно ли обратное, т. е. любой ли минимальный вектор — гармонический? Это тоже неверно (приведите пример!). Тем не менее имеет место следующее

**Утверждение 3.** *Минимальный вектор, записанный в конформных координатах, является гармоническим.*

**Доказательство.** Пусть  $(u, v)$  — конформные координаты, а  $\mathbf{r}(u, v)$  — вектор, описывающий минимальную пленку. Напомним, что  $E = G = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle$ ;  $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0$ . Требуется доказать, что  $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0$ . Положим  $\alpha = \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}$ . Так как  $H = 0$ , то  $GL - 2MF + EN = 0$ ,



т. е.  $L + N = 0$ . Отсюда  $\langle \alpha, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = L + N = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $V^2$ . Осталось доказать, что  $\langle \alpha, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \alpha, \mathbf{r}_v \rangle = 0$ , так как тогда  $\alpha$  будет иметь нулевые скалярные произведения с ортогональными векторами  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}$ , то есть вектор  $\alpha$  должен быть нулевым вектором. Дифференцируя тождества  $E = G, F = 0$ , получаем:  $\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v \rangle$ ;  $\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v \rangle$ ;  $\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle$ ;  $\langle \mathbf{r}_{vu}, \mathbf{r}_v \rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv} \rangle$ . Отсюда  $\langle \alpha, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v \rangle - \langle \mathbf{r}_{vu}, \mathbf{r}_v \rangle = 0$ . Аналогично:  $\langle \alpha, \mathbf{r}_v \rangle = 0$ , что и требовалось.  $\square$

**Замечание.** Выше мы сообщили (без доказательства), что в окрестности любой точки двумерной вещественно-аналитической поверхности можно ввести конформные координаты. Можно доказать (этот факт нетривиален), что любая минимальная пленка может быть задана вещественно-аналитическим радиус-вектором, а следовательно, в окрестности любой точки минимальной поверхности всегда можно ввести конформные координаты.

### Задачи к п. 2

1. Доказать, что если гауссова и средняя кривизны тождественно равны нулю, то поверхность в  $\mathbf{R}^3$  является плоскостью.
2. Пусть поверхность  $S$  образована касательными прямыми к кривой. Выразить гауссову и среднюю кривизны поверхности  $S$  через кривизну и кручение кривой.
3. В предыдущей задаче показать, что метрика на поверхности зависит только от кривизны кривой.