

# Поверхности. Первая и вторая квадратичные формы

Лекция 12

149

## 1. Первая квадратичная форма

Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbf{R}^n$ , и пусть  $V^{n-1}$  — гладкое подмногообразие размерности  $n-1$  (или, как говорят, «коразмерности один»), вложенное в  $\mathbf{R}^n$ . В настоящем параграфе мы будем, в основном, интересоваться только локальными свойствами этой гиперповерхности, не интересуясь ее глобальной структурой, поэтому можно считать, что у нас просто имеется гладкое вложение диска  $D^{n-1}$  в  $\mathbf{R}^n$ . Выше мы уже обсуждали различные способы задания многообразий, в том числе гиперповерхностей. Для удобства выберем параметрическое задание  $V^{n-1}$ , т. е. будем считать, что  $V^{n-1}$  (или вложенный диск  $D^{n-1}$ ) определяется гладким радиус-вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1}) \in \mathbf{R}^n$ , где параметры (координаты)  $u^1, \dots, u^{n-1}$  меняются в некотором диске в евклидовом пространстве параметров  $\mathbf{R}^{n-1}(u^1, \dots, u^{n-1})$ . Поскольку мы считаем, что радиус-вектор определяет гладкое подмногообразие, то это означает, что векторы  $\frac{d\mathbf{r}}{du^1}, \dots, \frac{d\mathbf{r}}{du^{n-1}}$  линейно независимы в каждой точке области определения. Напомним, что эти векторы являются касательными к соответствующим координатным линиям, проходящим через выбранную точку  $P$  на поверхности  $V^{n-1}$ . Как было показано выше, гладкое вложение  $V^{n-1}$  в  $\mathbf{R}^n$  порождает на  $V^{n-1}$  индуцированную риманову метрику. Напомним эту конструкцию. Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты в  $\mathbf{R}^n$ , тогда радиус-вектор  $\mathbf{r}$  задается набором гладких функций  $x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Пусть  $ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$  — евклидова метрика в  $\mathbf{R}^n$ ; тогда возни-

кает следующая квадратичная форма:

150

$$\begin{aligned}
 ds^2|_{V^{n-1}} &= \sum_{i=1}^n (dx^i(u^1, \dots, u^{n-1}))^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\partial x^i}{\partial u^k} du^k \right)^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} du^k du^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p, \\
 g_{kp} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} \right\rangle;
 \end{aligned}$$

здесь через  $\langle , \rangle$  обозначено скалярное произведение в  $\mathbf{R}^n$ .

**Определение 1.** Первой квадратичной формой гиперповерхности  $V^{n-1}$  в  $\mathbf{R}^n$  называется форма  $ds^2|_{V^{n-1}} = \sum_{k,p} g_{kp} du^k du^p$ , где функции  $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$  определены выше.

Функции  $g_{kp}$  зависят от радиус-вектора гиперповерхности и меняются, вообще говоря, при изменении радиус-вектора, т. е. при деформации гиперповерхности. Первая квадратичная форма определена на векторах, касательных к  $V^{n-1}$ ; более точно, если  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_p V^{n-1}$  — два произвольных касательных вектора, то определено скалярное произведение

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{ds^2(V^{n-1})} = g_{kp} a^k b^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp} a^k b^p.$$

Напомним, что в целях упрощения обозначений мы опускаем знак суммирования, когда суммирование ведется по совпадающим верхним и нижним индексам. Из геометрического смысла функций  $g_{kp}$  следует, что скалярное произведение  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{ds^2(V^{n-1})}$  просто совпадает с обычным евклидовым скалярным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , рассматриваемых как векторы объемлющего пространства  $\mathbf{R}^n$ . Матрица метрического тензора  $G$ , составленная из функций  $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$ , имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \dots & g_{1,n-1} \\ \vdots & & & \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,2} & \dots & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что риманова метрика возникла у нас ранее как некоторый объект, удобный для вычисления длин гладких кривых, расположенных на поверхности. С этой точки зрения, длина дуги  $\gamma(t)$ , расположенной

в  $V^{n-1}$ , выражается по формуле:  $l = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} dt$ . В терминах функций  $g_{kp}(u)$  это же выражение приобретает вид:

$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u(t)) \frac{du^k(t)}{dt} \frac{du^p(t)}{dt}} dt.$$

151

Эта формула «выгоднее» тем, что в ней участвуют функции  $g_{kp}(u)$ , не зависящие от выбора кривой на поверхности  $V^{n-1}$ , а зависящие только от самой поверхности  $V^{n-1}$  и от ее параметризации. Кроме того, эти функции не меняются при изометриях поверхности, например, при изгибании плоскости в цилиндр.

Рассмотрим теперь, какой вид приобретает первая квадратичная форма для различных способов задания гиперповерхности. Пусть  $V^{n-1}$  задана в виде графика  $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ . Имеем:

$$\begin{aligned} ds^2|_{V^{n-1}} &= \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 + (dx^n(x^1, \dots, x^{n-1}))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 + \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^p} dx^k dx^p = \\ &= \sum_{k,p=1}^{n-1} \left( \delta_{kp} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^p} \right) dx^k dx^p = g_{kp}(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^k dx^p. \end{aligned}$$

Иногда будем обозначать  $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$  через  $f_{x^\alpha}$ . Пусть теперь поверхность  $V^{n-1}$  задана с помощью неявной функции, т. е. в виде:  $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ , где  $\frac{\partial F}{\partial x^n} \neq 0$ . Тогда по теореме о неявной функции существует (локально) решение уравнения  $F(x^1, \dots, x^n) = 0$  вида:  $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ , причем  $\frac{\partial f}{\partial x^i} = -(\partial F / \partial x^i) / (\partial F / \partial x^n)$ . Подставляя вместо  $f_{x^\alpha}$  выражение вида  $(\partial F / \partial x^\alpha) / (\partial F / \partial x^n)$ , получаем  $G = (g_{kp})$ , где

$$g_{kp} = \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^p} \right) / \left( \frac{\partial F}{\partial x^n} \right)^2 \right] + \delta_{kp}.$$

Рассмотрим частный случай — вложение двумерной поверхности в трехмерное евклидово пространство. Пусть  $V^2$  задано параметрически:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ . Тогда первая квадратичная форма обычно записывается в виде:  $ds^2(V^2) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ , где  $E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle$ ,  $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle$ ,

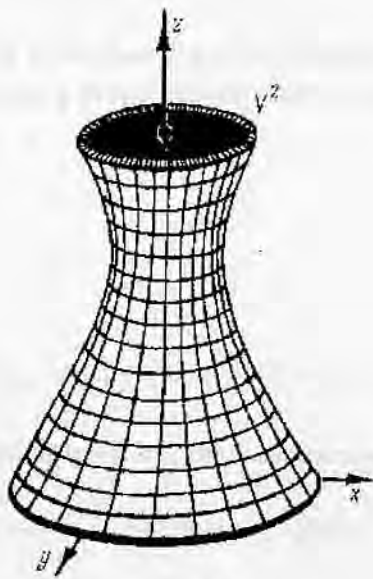


Рис. 1

$G = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle$  — коэффициенты формы, выраженные через компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}$

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Напомним, что метрика  $ds^2(V^2)$  называется конформно-евклидовой, если  $E = G$  и  $F = 0$ .

Рассмотрим пример первой квадратичной формы для поверхностей вращения, вложенных в  $\mathbf{R}^3$ . Пусть в  $\mathbf{R}^3$  введены цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$ , и пусть двумерная поверхность задана параметрически  $(\varphi = u, z = v, r = r(v))$ . Тогда вычисление дает:

$$ds^2(V^2) = dv^2 + r^2(v)du^2 + (dr(v))^2 = (1 + (r'_v)^2)dv^2 + r^2 du^2.$$

Здесь  $F(u, v) = 0, E(u, v) = r^2(v), G(u, v) = 1 + (r'_v)^2$ . Тот факт, что  $F = 0$  означает, что координаты линии  $v = v_0 = \text{const}$  и  $u = u_0 = \text{const}$  ортогональны друг другу в каждой точке (рис. 1).

**Лемма 1.** Пусть  $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$  — гладкое подмногообразие и  $G$  — первая квадратичная форма. Тогда форма  $G$  невырождена.

*Доказательство.* В силу определения радиус-вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1})$  все векторы  $\mathbf{r}_{u^k}, 1 \leq k \leq n-1$ , линейно независимы в точках  $P$ , принадлежащих  $V^{n-1}$ . Поскольку матрица  $G$  составлена из скалярных

произведений векторов  $\mathbf{r}_{u^k}$  и  $\mathbf{r}_{u^p}$ , т. е.  $G = \langle (\mathbf{r}_{u^k}, \mathbf{r}_{u^p}) \rangle$ , то  $G$  — невырождена. Лемма доказана.  $\square$

Этот факт можно усмотреть и из геометрических соображений: если бы симметрическая матрица  $G$  была вырождена, то тогда по крайней мере одно ее собственное число было бы равно нулю, а тогда нулевое собственное число имела бы и исходная евклидова метрика, что противоречит ее определению.

153

## 2. Вторая квадратичная форма

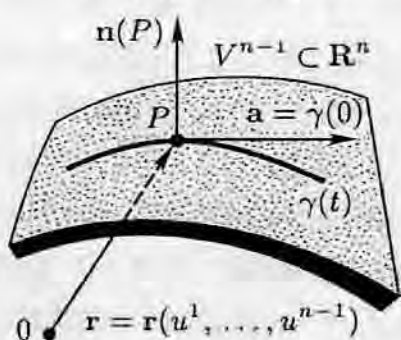


Рис. 2

Пусть  $V^{n-1}$  — гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$ , заданная радиус-вектором вида:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1})$ . Пусть  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(P)$  — единичный вектор, ортогональный поверхности  $V^{n-1}$  в точке  $P$ . Определим квадратичную форму  $Q(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ , задав ее значения  $Q(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  для произвольного вектора  $\mathbf{a} \in T_P(V^{n-1})$ . Для этого рассмотрим произвольную гладкую кривую  $\gamma(t)$ , лежащую на  $V^{n-1}$  и проходящую через точку  $P$ , причем так, что  $\gamma(0) = P$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{a}$ . Такая кривая всегда существует, хотя и

определена неоднозначно (рис. 2). Так как вдоль кривой  $\gamma(t)$  радиус-вектор  $\mathbf{r}$  является функцией от  $t$ , то  $\mathbf{a} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{r}(u(t)) \right|_{t=0}$ . Рассмотрим радиус-функцию  $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(u(t))$  и ее производную по  $t$ , т. е.  $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(u(t))$ . Обозначим через  $\ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{a}}$  значение  $\ddot{\mathbf{r}}$  при  $t = 0$ . Это и есть вторая производная радиус-вектора  $\mathbf{r}$  по направлению вектора  $\mathbf{a}$ .

**Определение 2.** Положим:  $Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \langle \ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{a}}; \mathbf{n} \rangle$ .

Определенное нами число является величиной проекции вектора  $\ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{a}}$  на вектор нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $P$  (см. рис. 3). Вычислим значение  $Q(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  в явном виде через координаты вектора  $\mathbf{r}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{r}_{u^k} \frac{du^k(t)}{dt}; & \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt} + \mathbf{r}_{u^k} \frac{d^2u^k}{dt^2}; \\ \left\langle \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(u(t)), \mathbf{n} \right\rangle &= \left\langle \mathbf{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle + 0; & \text{так как} \\ \left\langle \mathbf{r}_{u^k} \frac{d^2u^k}{dt^2}, \mathbf{n} \right\rangle &= \frac{d^2u^k}{dt^2} \langle \mathbf{r}_{u^k}, \mathbf{n} \rangle = 0; \end{aligned}$$



$\mathbf{r}_{u^k} \in T_P(V^{n-1}); \mathbf{n} \perp T_P(V^{n-1});$  отсюда получаем:

$$\left\langle \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \Big|_{t=0}, \mathbf{n} \right\rangle = \langle \mathbf{r}_{u^k u^p} |_{t=0}, \mathbf{n} \rangle \frac{du^k}{dt} \Big|_{t=0} \frac{du^p}{dt} \Big|_{t=0} = Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}).$$

При этом следует помнить, что вектор  $\mathbf{a}$  имеет координаты:  $\left( \frac{du^1(0)}{dt}, \dots, \frac{du^{n-1}(0)}{dt} \right)$ , т. е. окончательно:

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_{u^k u^p} |_{t=0} \rangle a^k a^p.$$

Эта квадратичная форма однозначно определяет билинейную форму  $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , значение которой на паре произвольных векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P(V^{n-1})$  определяется так:  $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = q_{kp}(P) a^k b^p$ , где

$$q_{kp}(P) = \langle \mathbf{r}_{u^k u^p} |_{t=0}, \mathbf{n} \rangle.$$

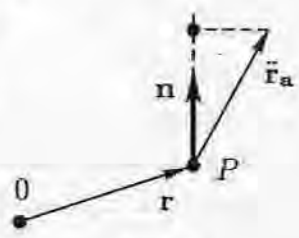


Рис. 3

**Лемма 2.** Выражение  $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = q_{kp} a^k b^p$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P(V^{n-1})$  определяет билинейную форму.

*Доказательство.* Имеем:

$$q_{k'p'} = \langle \mathbf{r}_{u^{k'} u^{p'}} |_{t=0}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}(0)}{\partial u^k \partial u^p}, \mathbf{n} \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} q_{kp},$$

т. е. функции  $q_{kp}$  преобразуются при замене координат как коэффициенты билинейной формы, что и требовалось доказать. □

**Определение 3.** Билинейная форма  $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  называется второй квадратичной формой поверхности  $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ .

Ясно, что форма  $Q$  зависит от способа вложения  $V^{n-1}$  в  $\mathbf{R}^n$ , т. е. при гладкой деформации  $V^{n-1}$ , эта форма, вообще говоря, будет меняться. При этом форма уже не является инвариантной относительно изометрий  $V^{n-1}$  в  $\mathbf{R}^n$ ; так например, при изгибании  $V^{n-1}$ , т. е. при гладкой деформации, при которой первая форма не меняется, форма  $Q$  будет, вообще говоря, изменяться. Например, пусть  $V^2$  — двумерная плоскость в  $\mathbf{R}^3$ , тогда радиус-вектор  $\mathbf{r}(u, v)$  можно считать линейной функцией от параметров  $u, v$ . Следовательно, первая форма является евклидовой плоской метрикой:  $du^2 + dv^2$

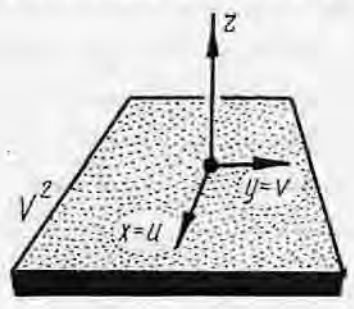


Рис. 4

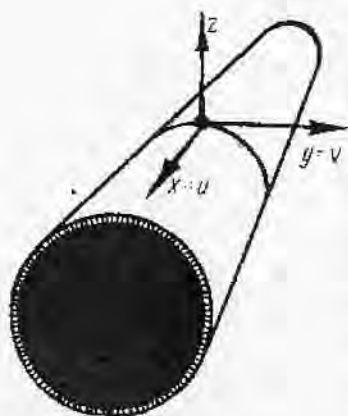


Рис. 5

(рис. 4). Теперь рассмотрим изометрическое преобразование  $V^2$  — свертывание плоскости  $\mathbf{R}^2$  в цилиндр, ось которого параллельна оси  $ox$  (рис. 5). Ясно, что вторая форма цилиндра отлична от нуля, так как отлично от нуля число:  $\langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle$ . В то же время, вторая форма плоскости  $\mathbf{R}^2$  тождественно равна нулю, следовательно, при изгибании (т. е. при изометрии) вторая форма изменилась.

Рассмотрим фиксированное подмногообразие  $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ , пусть  $P \in V^{n-1}$ . В каждой точке  $P$  определена пара форм:  $G$  и  $Q$  (первая и вторая формы). С этой парой связан набор числовых инвариантов, позволяющих

изучать  $V^{n-1}$  независимо от введенной на ней системы координат. Обозначим через  $G$  и  $Q$  матрицы соответствующих форм и рассмотрим полином по переменной  $\lambda$ :  $\det(Q - \lambda G)$ . Поскольку форма  $G$  невырождена (см. лемму 1), то существует матрица  $G^{-1}$ , обратная к  $G$ , следовательно, уравнение  $\det(G^{-1}Q - \lambda E) = 0$  эквивалентно уравнению:  $\det(Q - \lambda G) = 0$ . Обозначим через  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  собственные числа матрицы  $G^{-1}Q$ , т. е. корни уравнения  $\det(Q - \lambda G) = 0$ . Вскоре мы докажем, что все они вещественны. Запишем характеристический полином  $F(\lambda)$  в виде:

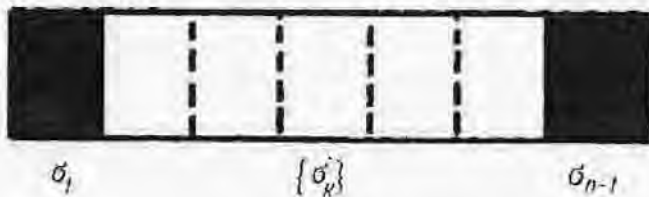
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \lambda^k, \text{ где } \sigma_k \text{ — симметрические функции от корней } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}.$$

**Лемма 3.** *Функции  $\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  являются инвариантами пары форм  $G$  и  $Q$ , т. е. сохраняются при произвольной невырожденной замене координат в окрестности точки  $P \in V^{n-1}$ .*

*Доказательство.* При регулярной замене координат  $x \rightarrow x'$  в окрестности точки  $P$  в касательном пространстве  $T_P V^{n-1}$  возникает индуцированное линейное невырожденное преобразование с помощью матрицы Якоби:  $J : T_P \rightarrow T_P$ . При этом матрицы  $G$  и  $Q$  подвергаются преобразованию:  $G \rightarrow JGJ^T = G'$ ;  $Q \rightarrow JQJ^T = Q'$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} \det((G')^{-1}Q' - \lambda E) &= \det[(J^T)^{-1}(G^{-1}Q - \lambda E)J^T] = \\ &= \det(G^{-1}Q - \lambda E), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □



156

Рис. 6

Нас будут особенно интересовать инварианты:

$$1) \sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \text{Spur}(G^{-1}Q); \quad 2) \sigma_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \det(G^{-1}Q).$$

Здесь через Spur обозначен след матрицы. Остальные  $\sigma_k$ ,  $2 \leq k \leq n-2$ , описывают более тонкие свойства  $V^{n-1}$ , которыми мы сейчас заниматься не будем. Поскольку  $G^{-1}Q \neq 0$ , если  $Q \neq 0$ , то существует хотя бы один инвариант  $\sigma_k$ , отличный от нуля. Инварианты  $\sigma_1$  и  $\sigma_{n-1}$  являются «крайними» инвариантами (рис. 6).

**Определение 4.** Функция  $H(P) = \sigma_1(P) = \sigma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  называется *средней кривизной поверхности*  $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$  в точке  $P \in V^{n-1}$ . Функция  $K(P) = \sigma_{n-1}(P) = \sigma_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  называется *гауссовой кривизной поверхности*  $V^{n-1} \in \mathbf{R}^n$  в точке  $P$ .

Если  $n = 3$  и  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ , то  $H(P) = \lambda_1 + \lambda_2$ ;  $K(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ .

**Теорема 1.** Все собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  пары форм  $G, Q$  вещественны. В том случае, когда все числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  попарно различны, все собственные векторы  $e_1, \dots, e_{n-1}$  матрицы  $G^{-1}Q$  взаимно ортогональны, как относительно объемлющей евклидовой метрики в  $\mathbf{R}^n$ , так и относительно римановой метрики, индуцированной на  $V^{n-1}$  вложением  $V^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

*Доказательство.* По известной теореме из алгебры собственные числа симметрической матрицы вещественны, и все ее собственные векторы взаимно ортогональны для различных собственных чисел. Пока что эта теорема не может быть применена в нашей ситуации, так как матрица  $G^{-1}Q$ , вообще говоря, не симметрична. Симметрия  $G^{-1}Q$  имела бы, например, место, если бы  $G$  и  $Q$  коммутировали. Так как форма  $G(P)$  симметрична при каждом  $P$ , то в некоторой окрестности  $P$  существует регулярная замена координат  $x \rightarrow x'$  такая, что в одной точке  $P$  фор-



ма  $G(P)$  приводится к диагональному виду. Такое приведение возможно, вообще говоря, только в одной точке. Поскольку приведение к диагональному виду необходимо осуществить только в одной точке, то в качестве искомой замены достаточно взять линейную замену. Приведя  $G$  к диагональному виду, можно затем привести ее к единичной матрице, применяя растяжения вдоль главных осей формы. Пусть  $A$  — линейный оператор  $A : T_P V^{n-1} \rightarrow T_P V^{n-1}$ , осуществляющий приведение  $G$  к единичной матрице; тогда  $G = AEA^T = AA^T$ . Матрица  $E$ , возникающая после выполнения  $A$ , определяет ортобазис  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  в  $T_P V^{n-1}$ . Получаем:  $\det(Q - \lambda G) = \det[A(A^{-1}Q(A^{-1})^T - \lambda E)A^T]$ . Рассмотрим форму  $\tilde{Q} = BQB^T$ , где  $B = A^{-1}$ . Исходное уравнение  $\det(Q - \lambda G) = 0$  запишется в базисе  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  в виде:  $\det(\tilde{Q} - \lambda E) = 0$ , так как  $\det A \neq 0$ . При этом  $\tilde{Q}^T = \tilde{Q}$ , так как  $Q^T = Q$ . Следовательно, все собственные числа и собственные векторы у формы  $\tilde{Q}$  и матрицы  $G^{-1}Q$  — одни и те же. Так как форма  $\tilde{Q}$  симметрична, то все ее собственные числа (т. е.  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ ) вещественны, и в случае, когда все они попарно различны, все ее собственные векторы взаимно ортогональны. Это следует из известной теоремы алгебры. Ортобазис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$  не обязан совпадать с ортобазисом  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ . Теорема доказана.  $\square$

Как видно из доказательства, в случае, когда все собственные числа различны, ортобазис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$  в плоскости  $T_P V^{n-1}$  определен однозначно. Если же среди  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  есть совпадающие, то остается довольствоваться только соотношением  $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$ , если  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Если собственное число имеет кратность  $k$ , то ему отвечает  $k$ -мерное инвариантное подпространство, векторы которого умножаются на одно и то же число  $\lambda$ ; в этом подпространстве можно также выбрать  $k$ -мерный ортобазис (неоднозначно!).

**Определение 5.** Векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$  (определенные однозначно, если  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ ) называются *главными направлениями гиперповерхности  $V^{n-1}$  в точке  $P$* , или *главными осями*.

Итак, мы связали с каждой точкой гиперповерхности  $V^{n-1}$  однозначно определенный (если  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ ) ортобазис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ , гладко зависящий от  $P$ . Ортогональность векторов  $\{\mathbf{e}_i\}$  имеет место как в объемлющей евклидовой метрике, так и в индуцированной метрике на  $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ .

Поскольку в ортобазисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$  матрица  $G$  становится единичной, то  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  совпадают с собственными числами формы  $Q$ , записанной в ортобазисе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ .

Рассмотрим частный случай. Пусть  $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$  задана в виде графика  $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ ; пусть плоскость  $T_P V^{n-1}$  в некоторой точке  $P \in V^{n-1}$  совпадает с плоскостью переменных  $x^1, \dots, x^{n-1}$  (рис. 7). Тогда нормаль  $\mathbf{n}(P)$  к  $V^{n-1}$  в точке  $P$  имеет координаты  $(0, \dots, 0, 1)$ ; радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , описывающий поверхность  $V^{n-1}$ , имеет вид:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{n-1}; f(x^1, \dots, x^{n-1}))$ .

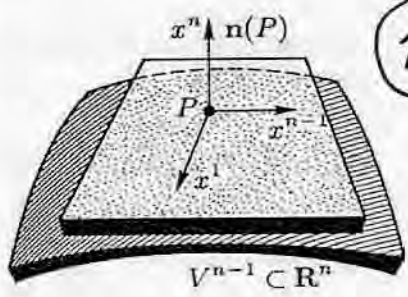


Рис. 7

Так как гиперплоскость  $(x^1, \dots, x^{n-1}) = T_P V^{n-1}$  касается  $V^{n-1}$  в точке  $P$ , то выполнено соотношение  $\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_P = 0, 1 \leq i \leq n-1$ ; отсюда:  $G(P) = E$ , так как  $g_{ij} = f_{x^i x^j} + \delta_{ij}$ . Рассмотрим матрицу  $Q = (q_{ij})$ , где

$$q_{ij} = \langle \mathbf{r}_{x^i x^j}; \mathbf{n} \rangle = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Итак,  $Q = (f_{x^i x^j}(P))$  совпадает с матрицей гессиана функции  $f$  в точке  $P$ . Средняя кривизна  $H(P)$  имеет вид:

$$H(P) = \text{Spur} (G^{-1}Q) = \text{Spur} Q = \sum_{k=1}^{n-1} f_{x^k x^k};$$

для гауссовой кривизны  $K(P)$  получаем:

$$K(P) = \det (G^{-1}Q) = \det Q = \det (f_{x^i x^j}(P)).$$

Для двумерной поверхности (при  $n = 3$ ) получаем:

$$z = f(x, y); \quad H(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f,$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа на плоскости  $\mathbf{R}^2$ ;

$$K(P) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

### 3. Элементарная теория гладких кривых на гиперповерхности

Рассмотрим произвольную точку  $P \in V^{n-1}$ , и пусть  $\mathbf{n}(P)$  — нормаль к гиперповерхности  $V^{n-1}$  в  $\mathbf{R}^n$ . Рассмотрим произвольную двумерную плоскость  $\mathbf{R}^2$ , проходящую через  $P$  и пересекающую  $V^{n-1}$  по некоторой гладкой кривой  $\gamma(t) = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$  (по-прежнему нас интересуют только события, происходящие в малой окрестности точки  $P$ ).

**Определение 6.** Гладкая кривая  $\gamma(t) = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$  называется *плоским сечением гиперповерхности*  $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ .

159

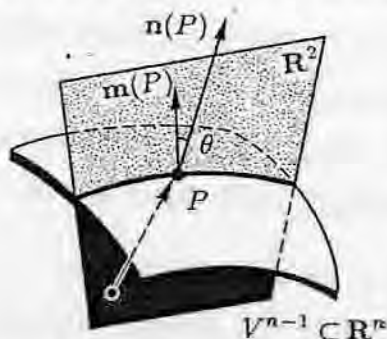


Рис. 8

Через точку  $P$  проходит бесконечно много плоских сечений. В то же время, далеко не всякая гладкая кривая  $\gamma \subset V^{n-1}$  является плоским сечением  $V^{n-1}$ . Для того чтобы  $\gamma \subset V^{n-1}$  не была плоским сечением, достаточно, чтобы  $\gamma$  имела ненулевое кручение. Пусть  $\gamma$  — плоское сечение  $V^{n-1}$  (зафиксируем содержащую ее плоскость  $\mathbf{R}^2$ ), и пусть точка  $O$  — начало координат, из которого выходит радиус-вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1})$ , описывающий поверхность  $V^{n-1}$ , принадлежит плоскости  $\mathbf{R}^2$ .

Пусть  $\mathbf{m}(P)$  — вектор нормали к плоской кривой  $\gamma = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$ , содержащийся в  $\mathbf{R}^2$  (рис. 8). Поскольку мы рассматриваем произвольное плоское сечение, то нормали  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}$ , вообще говоря, не совпадают.

Введем на кривой  $\gamma = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$  натуральный параметр  $s$ :  $\gamma = \gamma(s)$  ( $s$  — длина дуги). Тогда в плоскости  $\mathbf{R}^2$  кривая  $\gamma(s)$  задается радиус-вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , где  $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^1(s), \dots, u^{n-1}(s))$ . В силу формул Френе для плоских кривых имеем:  $k(s) = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}(s)}{ds^2} \right|$ , где  $k(s)$  — кривизна кривой  $\gamma(s)$  в точке  $P$ . Напомним также, что  $\frac{d^2 \mathbf{r}(s)}{ds^2} = \mathbf{m}k(s)$ , где  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(P)$ ,  $P \in \gamma(s)$ . С другой стороны, если  $\mathbf{a} = \frac{d}{ds} \mathbf{r}(s)$  — вектор скорости кривой  $\gamma(s)$  в точке  $P$ , то (в силу определения второй формы  $Q$ ) имеем:

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \left\langle \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right\rangle = \langle k\mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = k \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = k \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между нормальными  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  в точке  $P$  (см. рис. 13). С другой стороны,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= Q \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = Q \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{ds}{dt} \right)^{-2} Q \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right), \end{aligned}$$

где  $t$  — произвольный гладкий параметр вдоль кривой  $\gamma = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$ . Здесь  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\alpha}$  — произвольный касательный вектор к кривой  $\gamma$  в точке  $P$ .

Если  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ , то:

$$k \cos \theta = \frac{Q(\alpha, \alpha)}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j}.$$

160

Поскольку в направлении любого касательного вектора  $\alpha \in T_P V^{n-1}$  можно провести кривую  $\gamma$ , являющуюся плоским сечением, то, следовательно, нами доказана

**Теорема 2.** Для любого касательного вектора  $\alpha \in T_P V^{n-1}$  и любого плоского сечения  $\gamma$  (такого, что  $\dot{\gamma} = \alpha$ ) отношение второй формы к первой равно  $k \cos \theta$ , т. е.

$$\frac{Q(\alpha, \alpha)}{G(\alpha, \alpha)} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j} = k \cos \theta.$$

Кривизна  $k$  называется кривизной плоского сечения.

Среди плоских сечений выделен класс нормальных сечений.

**Определение 7.** Плоское сечение  $\gamma = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$  в точке  $P$  называется нормальным, если  $\mathbf{n}(P) \in \mathbf{R}^2$ , т. е.  $\theta = 0$ .

Таким образом, каждое нормальное сечение  $\gamma$  в точке  $P \in V^{n-1}$  взаимно-однозначно задается касательным вектором  $\alpha \in T_P V^{n-1}$ , т. е. двумерная плоскость  $\mathbf{R}^2$ , определяющая это сечение, натянута на два вектора: нормаль  $\mathbf{n}(P)$  и вектор  $\alpha \in T_P V^{n-1}$ . Вращая плоскость  $\mathbf{R}^2$  вокруг  $\mathbf{n}(P)$ , получаем все нормальные сечения гиперповерхности  $V^{n-1}$  в точке  $P$ .

Для нормального сечения  $\gamma = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$  доказанная в теореме 2 формула принимает вид:

$$k = \frac{Q(\alpha, \alpha)}{G(\alpha, \alpha)} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j},$$

так как  $\theta = 0$ . Так как кривизна плоского сечения (вдоль вектора  $\alpha$ ), образующего угол  $\theta$  с нормалью  $\mathbf{n}(P)$ , зависит от  $\theta$ , то эту функцию следует записать в виде  $k(\theta, \alpha)$ . В силу доказанного утверждения:  $k(\theta, \alpha) \cos \theta = k(0, \alpha)$ , где  $k(0, \alpha)$  — кривизна нормального сечения (вдоль вектора  $\alpha$ ).

Таким образом, если известна кривизна нормального сечения  $k(0, \alpha)$ , то кривизна любого плоского сечения (вдоль  $\alpha$ ), образующего угол  $\theta$  с  $\mathbf{n}$ , находится из формулы:  $k(\theta, \alpha) = \frac{1}{\cos \theta} k(0, \alpha)$ .

Теперь напомним, что в касательной плоскости  $T_P V^{n-1}$  всегда определены главные направления  $\mathbf{e}_1(P), \dots, \mathbf{e}_{n-1}(P)$ , определяющиеся однозначно, когда  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ . Рассмотрим эти «главные оси»  $\mathbf{e}_1(P), \dots, \mathbf{e}_{n-1}(P)$  и построим по каждому из них соответствующее нормальное плоское сечение  $\gamma_i = \mathbf{R}_i^2 \cap V^{n-1}$ , где плоскость  $\mathbf{R}_i^2$  натянута на  $\mathbf{n}(P), \mathbf{e}_i(P)$ . Все главные направления  $\mathbf{e}_i(P)$  взаимно ортогональны в евклидовой метрике на  $T_P V^{n-1}$ . Обозначим через  $k_i(P)$  кривизну нормального сечения  $\gamma_i$  (эти сечения иногда называются главными нормальными сечениями).

**Теорема 3.** Собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  совпадают с кривизнами  $k_1, \dots, k_{n-1}$  главных нормальных сечений.

*Доказательство.* Из теоремы 2 имеем:  $k \cos \theta = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j}$ ; так как  $\theta = 0$  для нормального сечения, то  $k = \frac{q_{ij} \alpha^i \alpha^j}{g_{ij} \alpha^i \alpha^j}$ , где  $\alpha$  — определяющий вектор нормального сечения. Фиксируем в  $T_P V^{n-1}$  ортобазис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ ; тогда  $g_{ij} = \delta_{ij}$ ;  $q_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$ ; следовательно,

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2}$$

Если  $\alpha \in T_P V^{n-1}$  совпадает с одним из  $\mathbf{e}_i$ , то:  $k_i = \lambda_i$ , что и требовалось.  $\square$

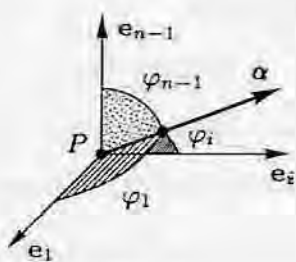


Рис. 9

Рассмотрим в  $T_P V^{n-1}$  произвольный вектор  $\alpha$  и рассмотрим нормальное сечение вдоль  $\alpha$ . Обозначим через  $\varphi_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) углы, образуемые  $\alpha$  с главными направлениями  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$  (рис. 9).

**Предложение 1.** Для нормального сечения вдоль произвольного вектора  $\alpha \in T_P V^{n-1}$  выполнено соотношение (формула Эйлера):

$$k = k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i.$$



Доказательство. В силу теоремы 3 имеем:

$$k(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left( \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2}} \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i,$$

162

где

$$\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^i)^2}} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|},$$

где через  $|\alpha|$  обозначена длина  $\alpha$ . То, что  $\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}$ , очевидно.  $\square$

Формула Эйлера позволяет исследовать так называемые «экстремальные свойства» главных кривизн  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ . Рассмотрим кривизну нормального сечения  $k(\alpha)$  как функцию от  $\alpha \in T_p V^{n-1}$ . Так как  $k(\alpha) = k(\rho\alpha)$ , где  $\rho \neq 0$  — вещественное число, то  $k(\alpha)$  зависит только от направляющих косинусов:  $\cos \varphi_1, \dots, \cos \varphi_{n-1}$ , где  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  — введенные ранее углы;

при этом  $\sum_{i=1}^{n-1} \cos^2 \varphi_i = 1$ . Так как  $\{\cos \varphi_i, 1 \leq i \leq n-1\}$  можно считать

координатами единичного вектора  $\mathbf{a} = \alpha/|\alpha|$ , то, положив  $x^i = \cos \varphi_i$ ,

$1 \leq i \leq n-1$ , можно считать, что  $k(\alpha) = k(x^1, \dots, x^{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x^i)^2$ ,

является гладкой функцией на сфере  $S^{n-2}$ , заданной уравнением:  $(x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 = 1$  в  $T_p V^{n-1}$ . Так как  $k(\alpha) = k(-\alpha)$ , то можно считать, что кривизна  $k(\alpha)$  является гладкой функцией на проективном пространстве  $\mathbf{RP}^{n-2} = S^{n-2}/Z_2$  (напомним, что  $\mathbf{RP}^{n-2}$  — гладкое многообразие). Итак,

$k(\alpha)$  оказывается функцией от  $n-2$  переменных  $(x^1, \dots, x^{n-1}; \sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2 =$

$= 1)$ . Так как сфера  $S^{n-2}$  и проективное пространство  $\mathbf{RP}^{n-2}$  — гладкие многообразия, то в окрестности каждой точки  $x \in S^{n-2}$  можно ввести локальные координаты  $y^1, \dots, y^{n-2}$  (например, при  $x^{n-1} \geq 0$ , координатами на  $S^{n-2}$  можно считать  $x^1, \dots, x^{n-2}$ ). Назовем точку  $x_0 \in S^{n-2}$  критической для функции  $f(x)$ , заданной на  $S^{n-2}$ , если  $\left. \frac{\partial f}{\partial y^i} \right|_{x_0} = 0, 1 \leq i \leq n-2$ .

Так как  $\frac{\partial f}{\partial y^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}}$ , то точка  $x_0$ , оказавшись критической в какой-то одной системе координат  $y^1, \dots, y^{n-2}$ , автоматически будет критической и в любой другой системе координат. Тем самым определение критической точки инвариантно.

Вопрос: какие критические точки имеет на сфере  $S^{n-2} \subset T_P V^{n-1}$  гладкая функция  $k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x^i)^2$ ? И, кроме того, какие значения принимает кривизна  $k(\alpha)$  в этих критических точках (т. е. вдоль направлений  $\alpha$ , соответствующих критическим точкам на сфере  $S^{n-2}$ )?

**Теорема 4.** Критическими точками функции кривизны  $k(\alpha)$  на сфере  $S^{n-2} \in T_P V^{n-1}$  являются в точности точки вида  $\pm e_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  (т. е. концы векторов  $\pm e_i$ ) в том случае, когда  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ . В точках  $\pm e_i$  функция  $k(\alpha)$  принимает значения, равные  $\lambda_i$ ;  $1 \leq i \leq n-1$ . В этом смысле главные кривизны являются экстремальными значениями функции кривизны  $k(\alpha)$ . Если среди собственных чисел  $\{\lambda_i\}$  есть совпадающие, то утверждение принимает вид: критическими точками функции  $k(\alpha)$  являются в точности концы всех собственных векторов формы  $Q$ .

Мы опускаем  
Доказательство.

Пусть  $n = 3$  и  $V^2$  вложена в  $\mathbf{R}^3$ . Тогда формула Эйлера принимает вид:  $k(\alpha) = \lambda_1 \cos^2 \varphi_1 + \lambda_2 \sin^2 \varphi_1$ ,  $\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1$  (пусть  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ), т. е.  $k(\alpha) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos^2 \varphi_1 + \lambda_2$ . Ясно, что минимум  $k(\alpha)$  достигается при  $\cos^2 \varphi_1 = 0$ :  $k(\alpha) = \lambda_2$ ; максимум  $k(\alpha)$  достигается при  $\cos^2 \varphi_1 = 1$ :  $k(\alpha) = \lambda_1$ . Если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то  $k(\alpha) = \lambda (= \lambda_1 = \lambda_2)$  (см. рис. 10).

С геометрической трактовкой главных кривизн связан красивый геометрический образ: так называемая квадрака нормальных кривизн:  $\lambda_1 \cos^2 \varphi_1 + \dots + \lambda_{n-1} \cos^2 \varphi_{n-1} = \text{const}$ . При этом, направления, соответствующие экстремальным (критическим) значениям кривизны, совпадают с главными осями этой поверхности. Если все главные кривизны  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  положительны, то квадрака является эллипсоидом с главными полуосями  $1/\sqrt{\lambda_i}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , т. е. величина  $i$ -й главной полуоси равна  $\sqrt{r_i}$ , где  $r_i$  — соответствующий радиус кривизны  $i$ -го нормального сечения  $\gamma_i = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$ .

Разберем случай двумерной поверхности  $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ . Оказывается, гауссова кривизна  $K(P)$  отвечает за важные локальные характеристики двумерной поверхности. Напомним, то  $K(P) = \lambda_1 \lambda_2$ , а потому выделяются

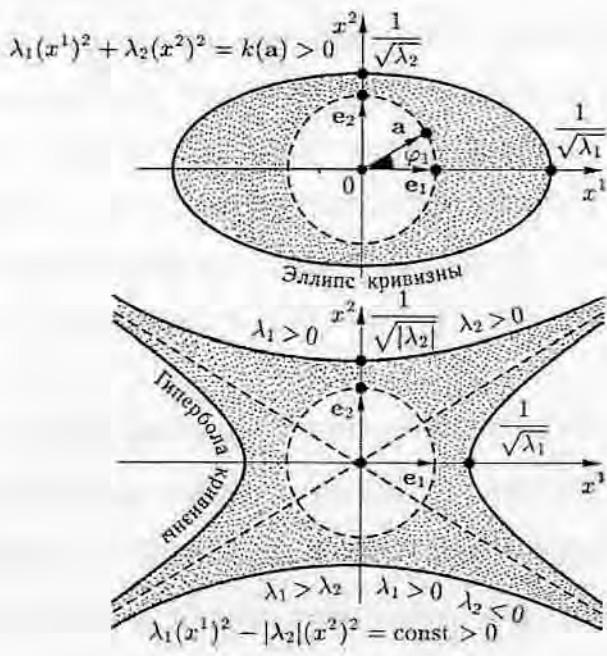


Рис. 10

три случая: а)  $K > 0$ ; б)  $K < 0$ ; в)  $K = 0$ . Отсюда:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{array} \right. \quad \text{или:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array} \right. ; \quad \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array} \right. \quad \text{или:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{array} \right. ; \\
 \text{в)} & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{или:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \neq 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right. ; \quad \text{или:} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Достаточно рассмотреть только случаи: а)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ; б)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ; в)  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

В случае а) поверхность  $V^2$  имеет около точки  $P$  (локально) вид, показанный на рис. 11. Здесь  $V^2$  расположена по одну сторону от касательной плоскости в точке  $P$ . В случае б)  $V^2$  имеет около точки  $P$  (локально) вид, показанный на рис. 12. Здесь  $V^2$  расположена по обе стороны от  $T_P V^2$ . Точки  $P$  такого типа называются седловыми (седлами). Иногда их называют точками перевала. В случае в)  $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = 0$  поверхность  $V^2$  имеет (локально) около точки  $P$  вид, показанный на рис. 13. Так как  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то  $V^2$  имеет в этой точке  $P$  в точности два ортогональных главных направления  $e_1, e_2$ . Не следует думать, что  $V^2$  около точки  $P$ , в которой  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , локально устроена как плоскость (с метрической точки зрения). Дело в том, что если вторая форма  $Q$  аннулируется в  $P$  (т. е. когда

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ), то локальная структура  $V^2$  около  $P$  может быть довольно сложной.

Пример: в качестве  $V^2$  возьмем график  $z = f(x, y) = \operatorname{Re}(x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2$  (см. рис. 14 — график «обезьяньего седла»). Первая форма  $G$  в точке  $(x = 0, y = 0)$  имеет вид:  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Вторая форма  $Q$  в точке  $(0, 0)$  вырождена:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Здесь  $Q = (q_{ij})$ , где  $q_{ij} = f_{x^i x^j}$ , т. е.  $Q = 6 \cdot \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}$ . То есть  $Q = 0$  в точке  $(0, 0)$ . Система линий уровня функции  $f(x, y)$  в окрестности  $(0, 0)$  имеет вид, показанный на рис. 15.

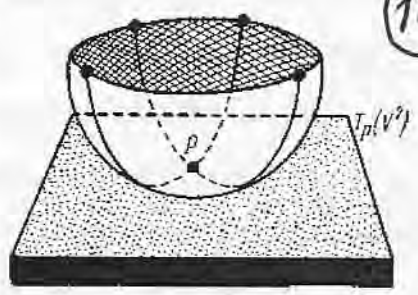


Рис. 11.

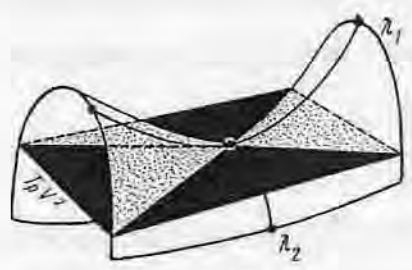


Рис. 12.

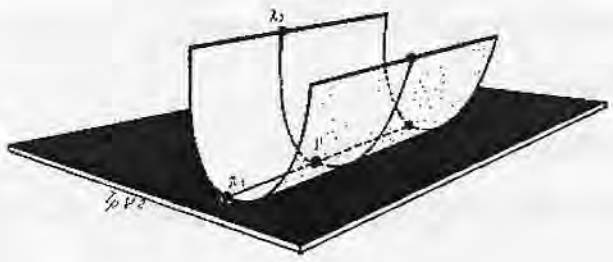


Рис. 13.

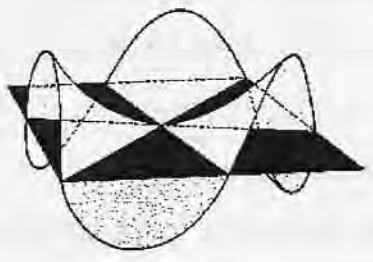


Рис. 14.

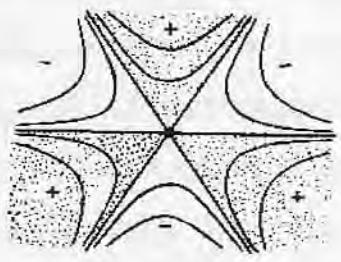


Рис. 15.