Лекция 11

Итог шага 11: Любое M^2 типа II гомеоморфно сфере с k пленками Мебиуса: $S^2+k\mu$, т.е. связной сумме k экземпляров $\mathbb{R}P^2$:
$M^2_k = S^2+k\mu = \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ (k раз).

• Ориентируемость и неориентируемость. Рассмотрим на M^2 всевозможные пути-петли γ, выходящие и возвращающиеся в точку x. В точке x рассмотрим касательный репер (из касательных векторов).

Опред. M^2 называется ориентируемым, если при любой непрерывной деформации (= скольжении) касательного репера вдоль любой петли, он возвращается в точку x с той же ориентацией.
M^2 назыв. неориентируемым, если найдется петля γ, при скольжении вдоль которой ориентация репера поменяется.

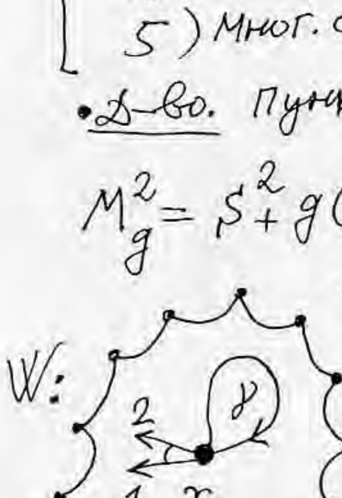
• Ориентируемость или неориентируемость — это инвариант гомеоморфизма.

• Шаг 12. Заключительный. Теорема классификации M^2.

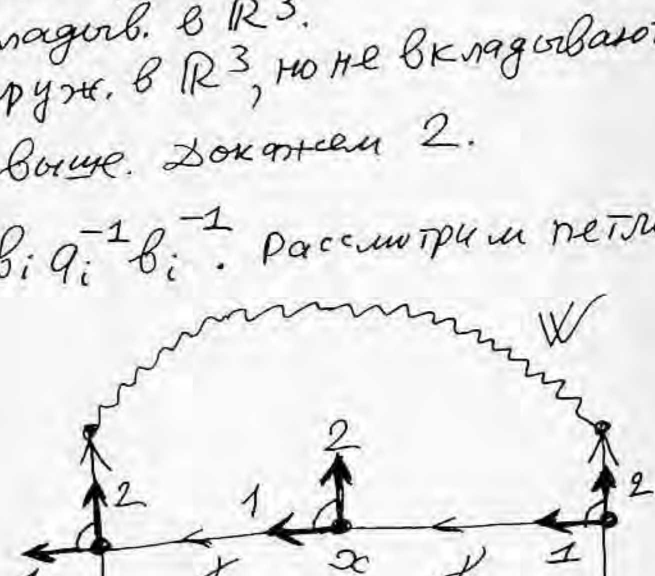
1) Любое связное, комп., гладкое, замкн. (без края) M^2 гомеоморфно (и диффеоморфно) либо: I: S^2+g (ручек), $g\geq 0$, либо: II: $S^2+k\mu$, $k>0$. Числа g и k назыв. родом.
2) Мног. серии I — ориент. Мног. серии II — неориент.
3) Мног. серии I и серии II не гомеоморфны. Внутри каждой серии мног. разного рода не гомеоморфны.
4) Мног. серии I гладко вкладыв. в $\mathbb{R}^3$.
5) Мног. серии II гладко погруж. в $\mathbb{R}^3$, но не вкладываются.

• Д-во. Пункт 1 уже доказан выше. Докажем 2.

$M^2_g = S^2+g(\text{ручек}) \simeq \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Рассмотрим петли γ.

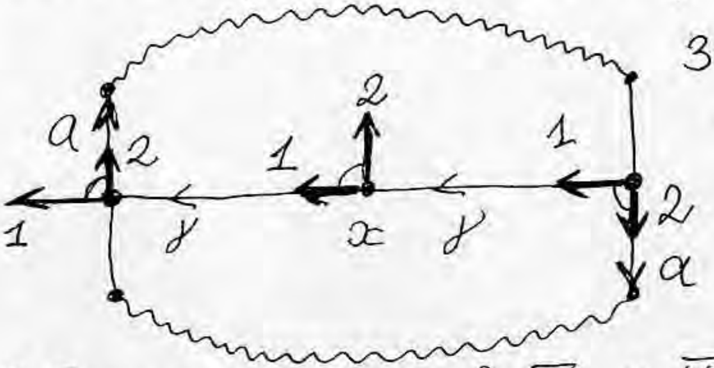


если петля γ "мала", т.е. не выходит на границу W, то репер (1,2) скользит по плоскости и очевидно не меняет ориентации.



если петля γ "длинная", т.е. выходит на границу W, то репер (1,2) возвращается с той же ориентацией. См. рис.

• Теперь $M^2_k = S^2 + k\mu$, $k>0$. $W = \prod_{i=1}^{k} c_i^2$.
Как и в ориентир. случае скольжение (перенос) репера вдоль "малых" петель γ не меняет ориентации. Теперь рассмот. "длинные петли":



Здесь репер достигает ∂W и, очевидно, возвращ. в точку x с противопол. ориентац. Пункт 2 теор. доказан.

• Пункт 3. Многооб. I и II не гомеом., т.к. I — ориент., а II — неориент. А вот негомеоморфность многооб. <u>разного рода</u> внутри каждой серии — факт более сложн. Мы его докажем потом, используя гомологии.

• Пункт 4 доказан выше.

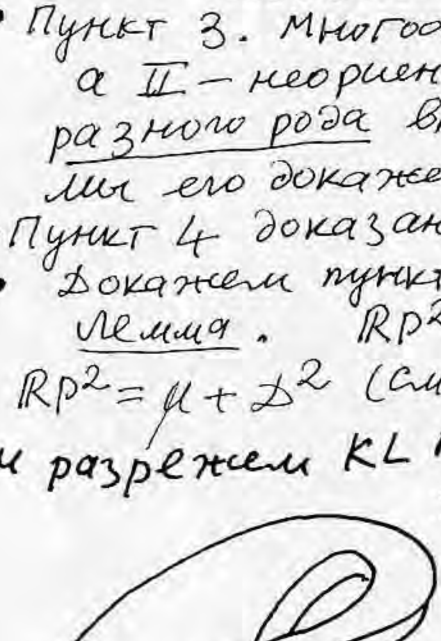
• Докажем пункт 5. Неориент. случай.

<u>Лемма</u>. $\mathbb{R}P^2$ гладко погруж. в $\mathbb{R}^3$.

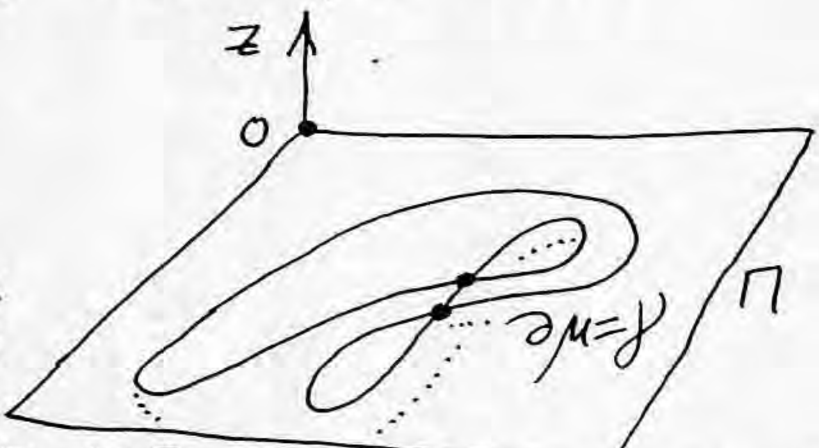
$\mathbb{R}P^2 = \mu + D^2$ (см. выше). Рассмотрим $KL = \mu + \mu$ и разрежем KL пополам плоскостью, см. рис.

это — погружение μ в $\mathbb{R}^3$.

Граница μ — это плоская кривая с самопересечением:

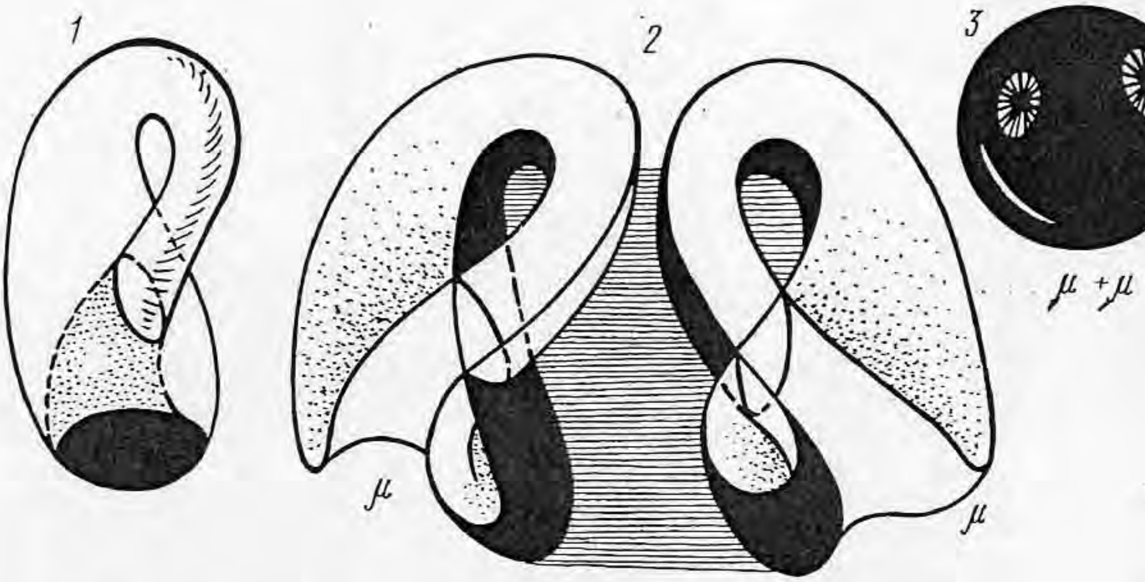


(см. след. стран.)

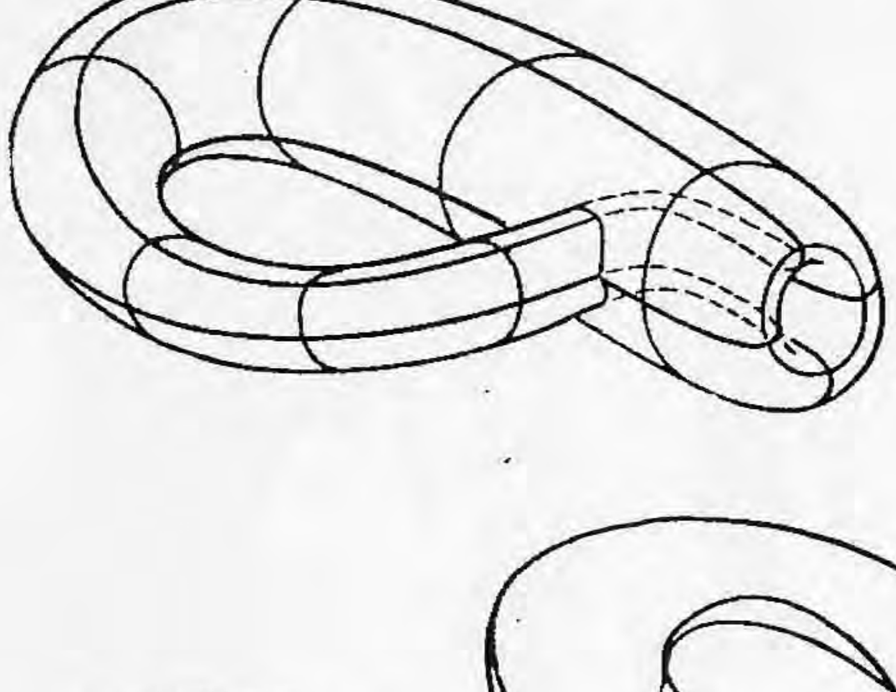


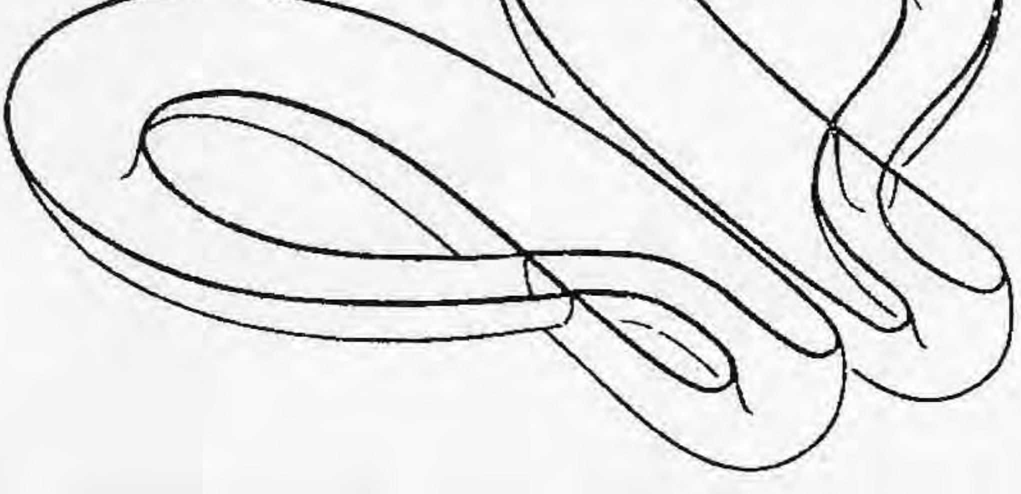
лист Мебиуса расположен под плоскостью П

Будем поднимать вверх плоскость П, одновременно деформируя кривую γ как показано на рис. При этом γ будет "заметать" некоторую 2-поверхность, погруженную в $\mathbb{R}^3$. Цель: продеформировать γ в стандарт. окружн. S^1 без самопересеч. в П.

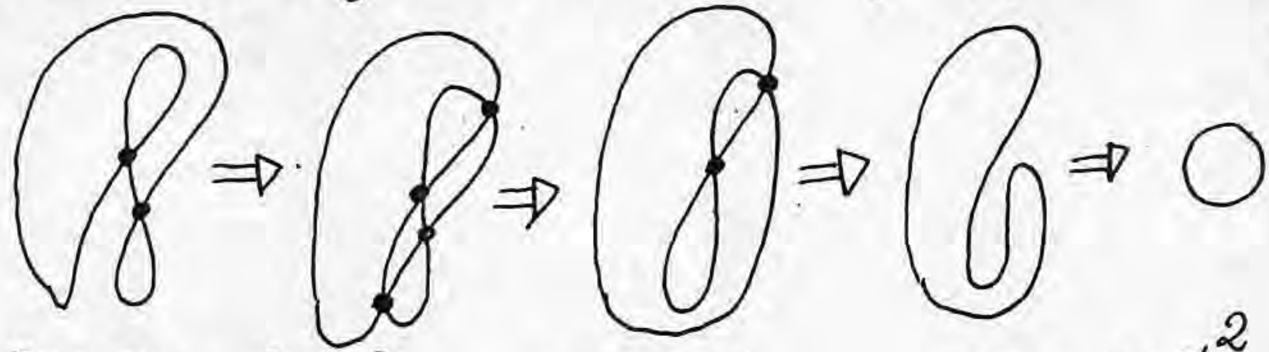


более наглядное изображение разрезания KL на два листа мебиуса.





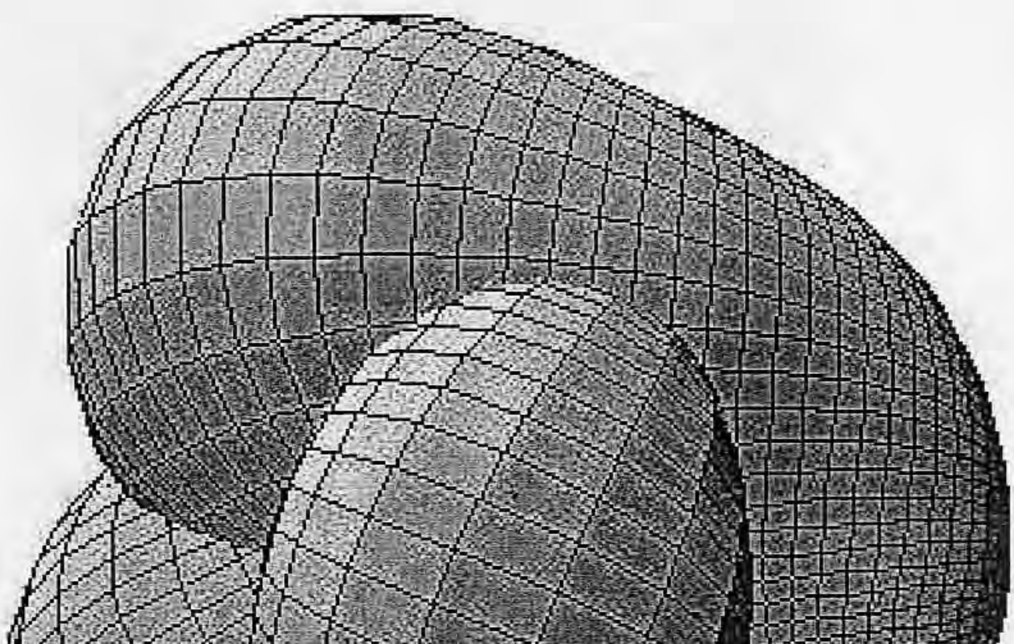
Деформация γ: (См. также след. стр.)



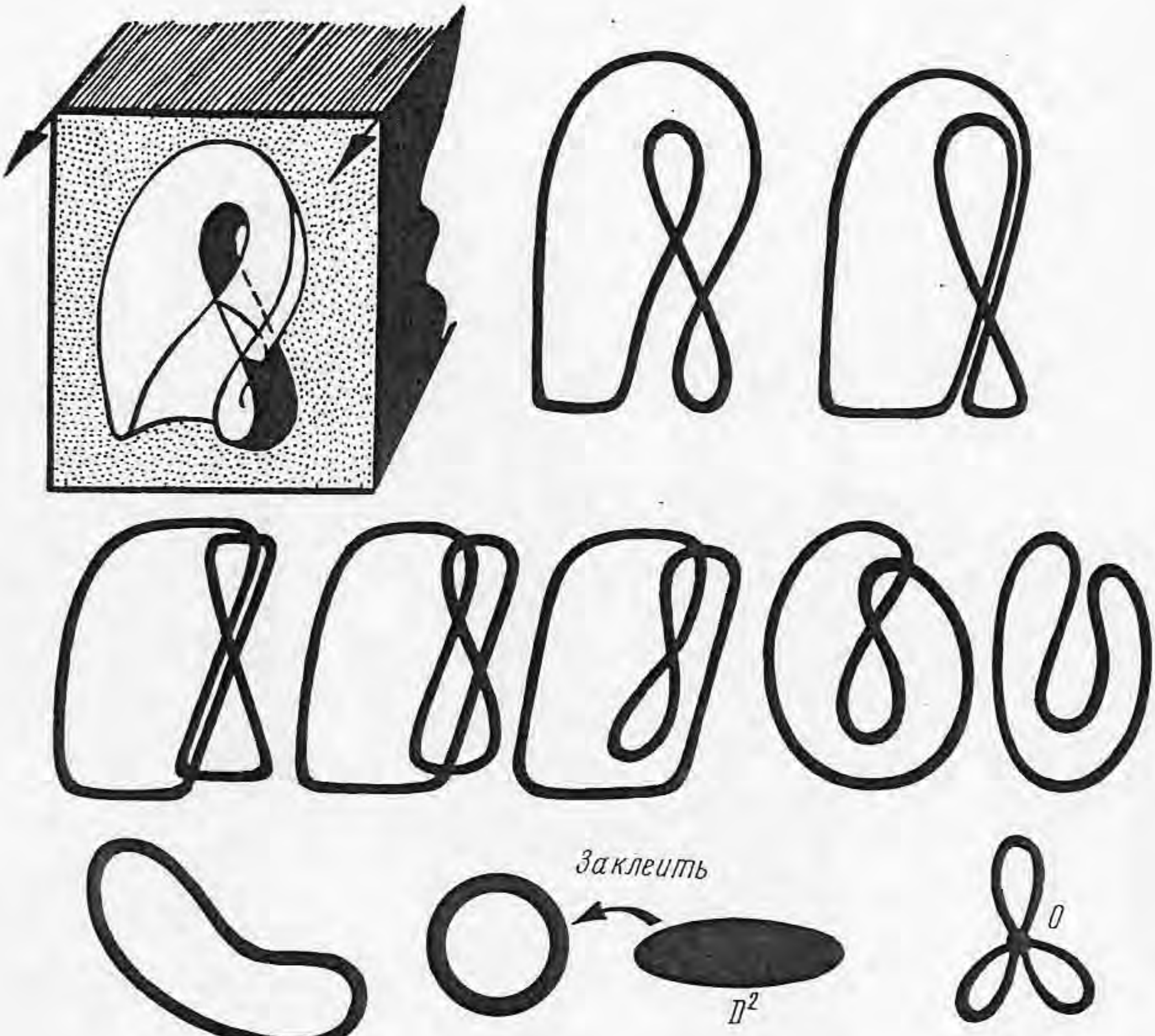
Получили в $\mathbb{R}^3$: сложную поверхность, с границей S^1, являющуюся погружением μ в $\mathbb{R}^3$

заклеим S^1 диском D^2 и получим погружение $\mathbb{R}P^2 = \mu + D^2$ в $\mathbb{R}^3$

эта поверхность называется "поверхностью Бойя".



А так как $M^2_k = \mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2$ (k раз), то мы получаем погружение M^2_k серии $\underline{\text{II}}$ в $\mathbb{R}^3$.



Еще одно изображение деформации границы листа Мебиуса в поднимающейся плоскости.

Почему M^2_k серии II нельзя вложить в $\mathbb{R}^3$?
Легко доказать, что если M^2 — гладк. комп. замкн. повер. вложенная в $\mathbb{R}^3$ (без самопересеч.), то она разбивает $\mathbb{R}^3$ на две части, а потому ориентируема. (142)

Пункт 5 доказан.

- Минимальные триангуляции S^2, T^2, $\mathbb{R}P^2$. т.е. с минимальным числом треугольников.

- S^2: 4 треуг. и 4 вершины. Опишем вокруг симплекса (тетраэдра) сферу и спроект. его из центра на сферу.

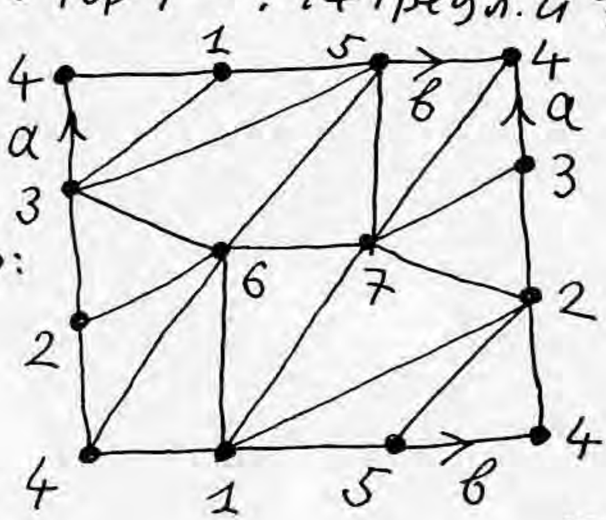
S^2

- докажите минимальность

(кстати, это — полный граф: каждая вершина соединена с каждой)

- тор T^2: 14 треуг. и 7 вершин:

тор:



(это — тоже полный граф)

Д-во. Пусть n — число треугол. в триангул. тора. Тогда число ребер равно $3n/2$, т.к. к каждому ребру примыкают два Δ. А всех ребер у n треуг. — $3n$.
В обязат. курсе есть теор.: эйлерова характер. тора $=0$, т.е. $\#$вер. $-$ $\#$ребер $+$ $\#$треуг. $=0$

т.е. $\#\text{вер.} - \frac{3n}{2} + n = 0 \Rightarrow$ вершин — $n/2$. Всего вершин у n треуг. — $3n$, поэтому при склейке M^2 из n треуг. в одну вершину на T^2 "в среднем" попадает $(3n)/(n/2) = 6$ вершин. А потому $\exists$ вершина на T^2 кратности $\geqslant 6$. Но тогда её "звезда" имеет вид:

т.е. к ней примыкают по крайней мере 6 треуг. А тогда число вершин $\geqslant 7$. А мы предъявили триангул. с 7 верш. Потому она минимальна.

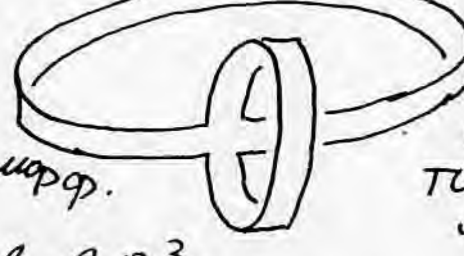
- Задача: миним. трианг. $\mathbb{R}P^2$ имеет 6 вершин и 10 граней. См. рис.

$= \mathbb{R}P^2$

для $\mathbb{R}P^2$ – это тоже полн. граф. Но для других 2-поверхн. их минимал. триангул. не обязана быть полным графом.

- Несколько задач.

(1) Тор с дыркой можно вывернуть наизнанку в $\mathbb{R}^3$ (без самопересеч.)

$T^2 \setminus D^2$  $\Rightarrow$ 

гомеоморф.

См. след. стран.

при выворачивании параллель и меридиан тора меняются местами.

(2) Расцепление пальцев в $\mathbb{R}^3$:

$S^2 + 2$ ручки

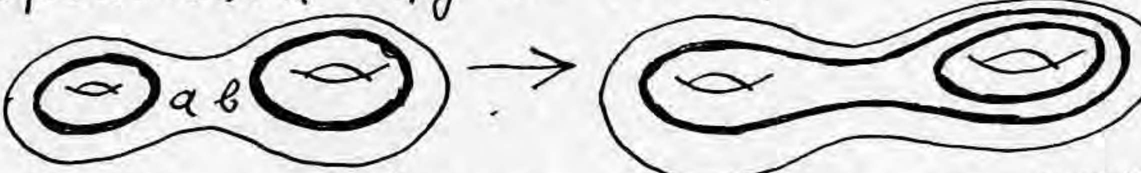
изотопией, т.е. гладкой деформацией без самопересечений "пальцы" можно расцепить

См. след. страницы.

(3) Разрезать лист Мебиуса по его "оси". См. следую. стр.

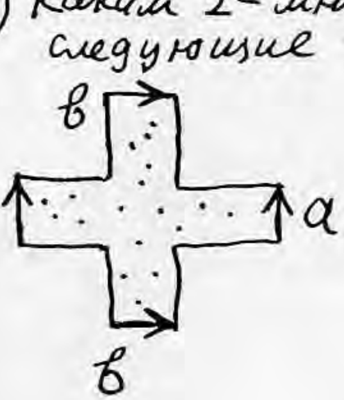
(4) Чему гомеоморфно мн-во всех прямых на плоскости.
Ответ: листу Мебиуса.

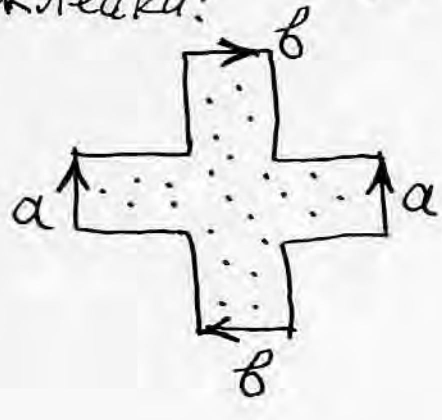
(5) Построить гомеоморфизм кренделя на себя, переводящий пару циклов a, b в пару b, $a \cdot b$

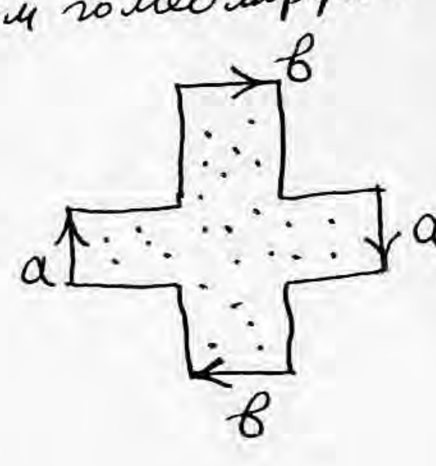


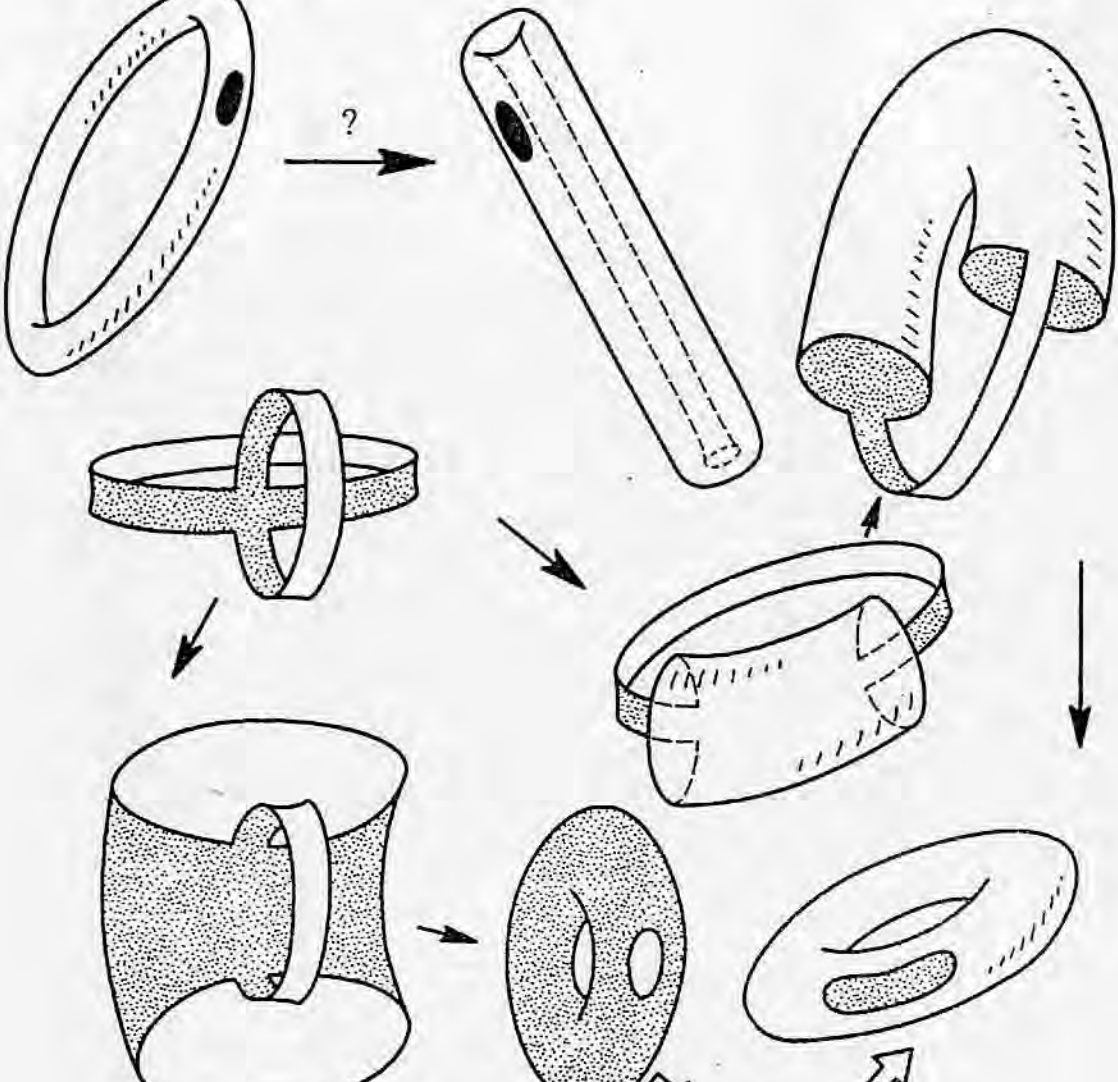
см. след. стран.

(6) Каким 2-многообразиям с краем гомеоморфны следующие склейки:

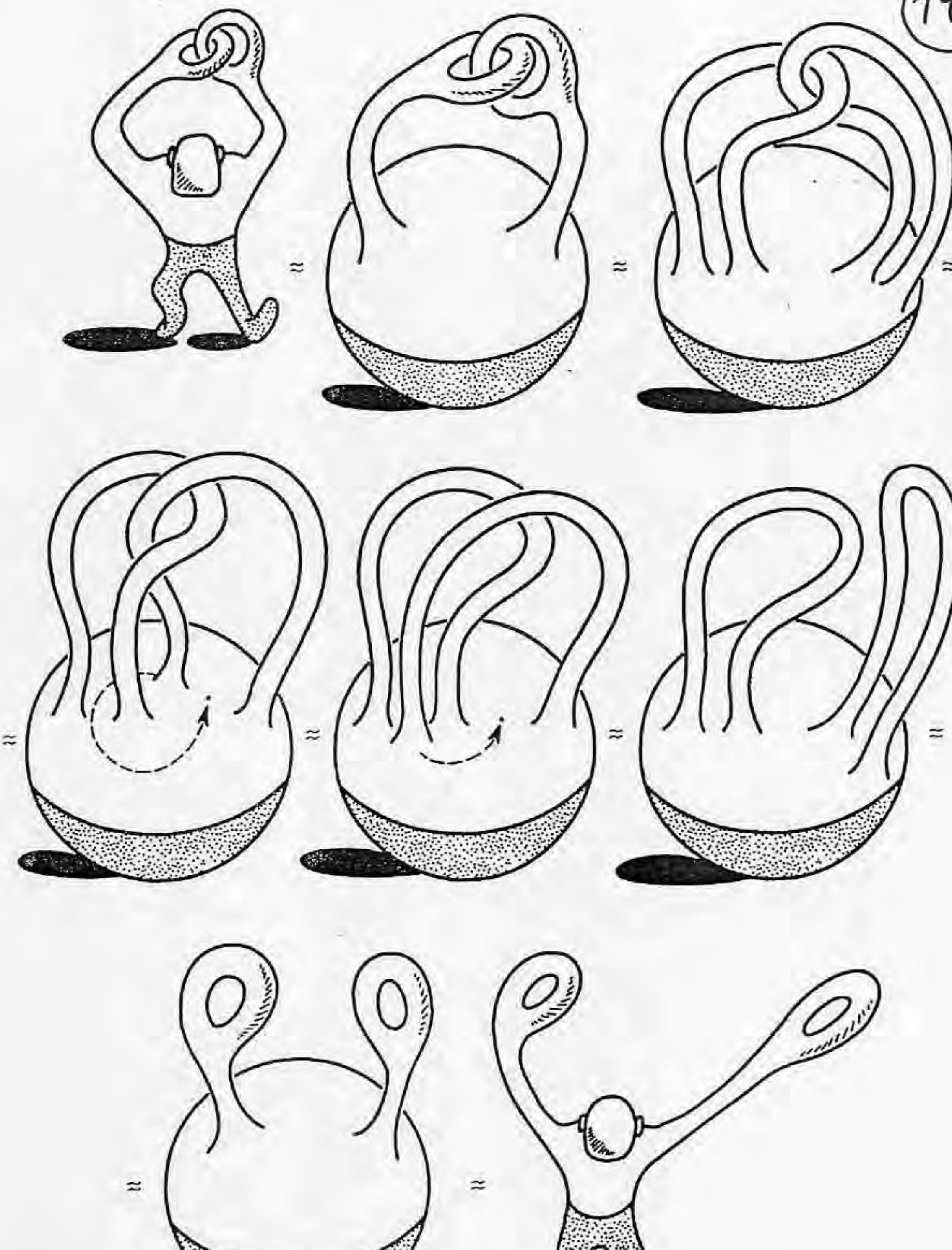




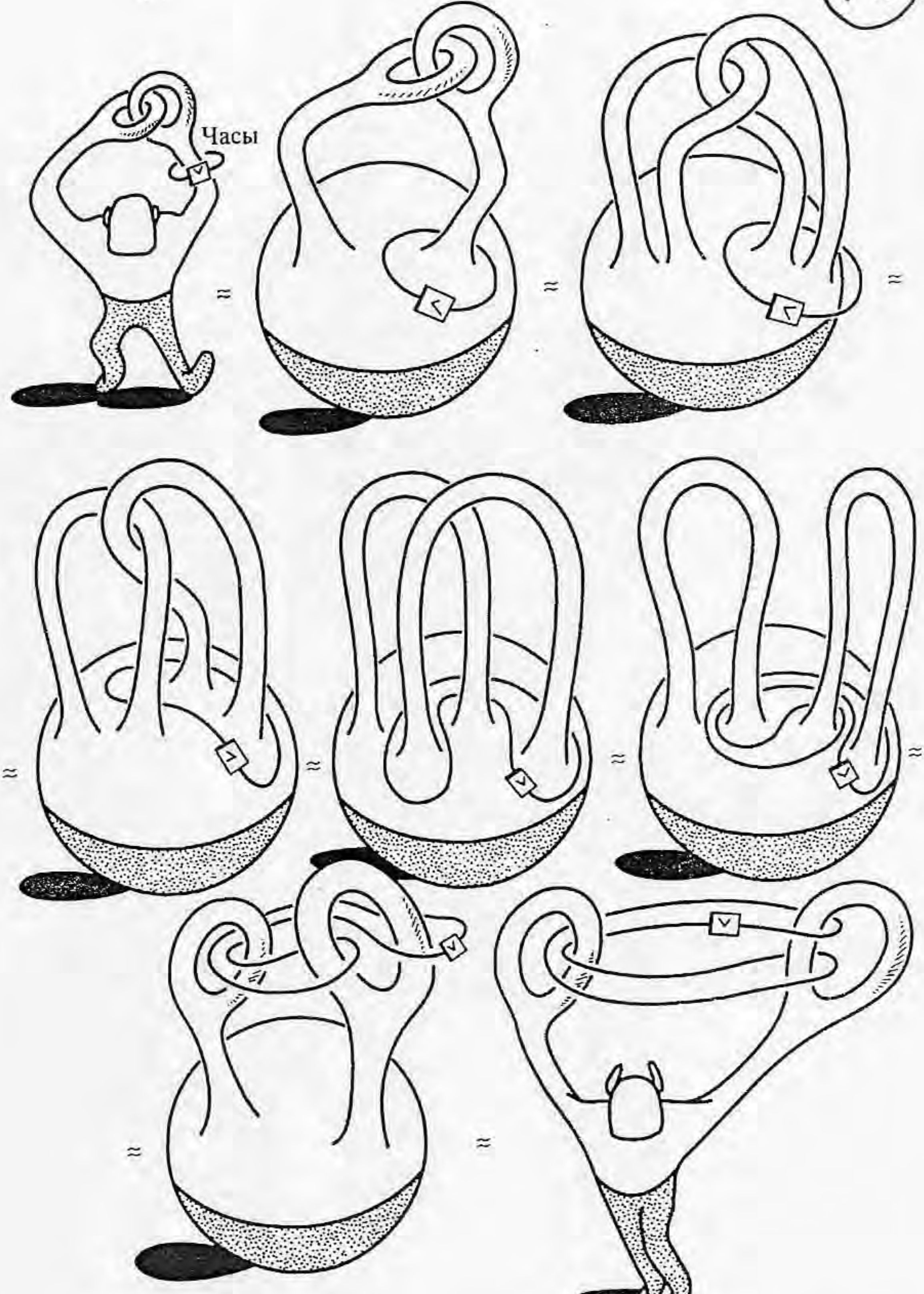




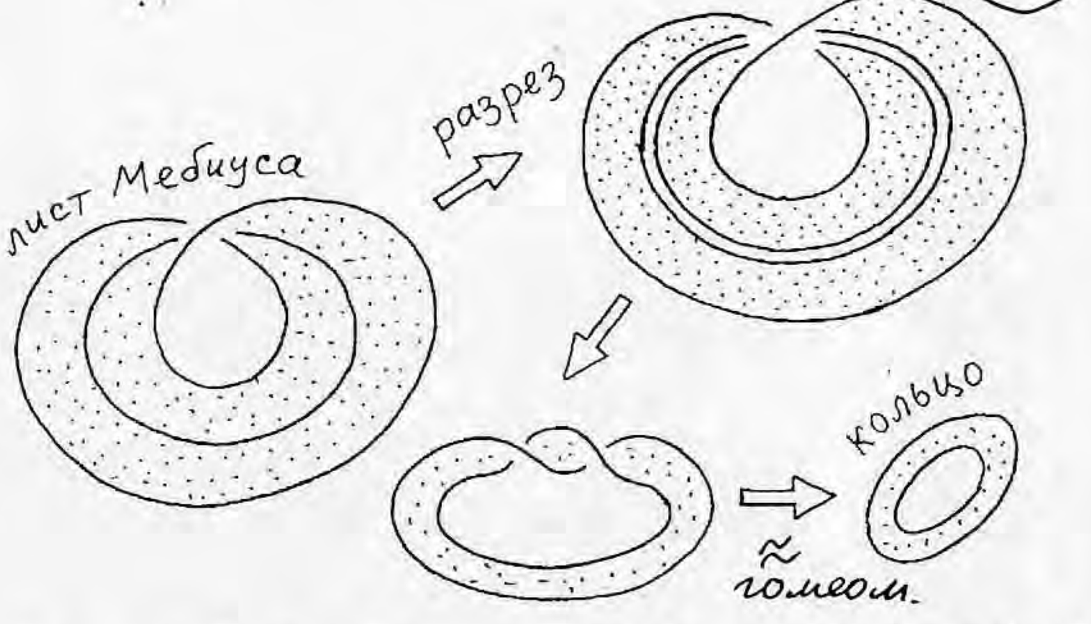
Выворачивание
тора с дыркой наизнанку в $\mathbb{R}^3$.
параллель и меридиан меняются местами.



Расцепление пальцев
в $\mathbb{R}^3$

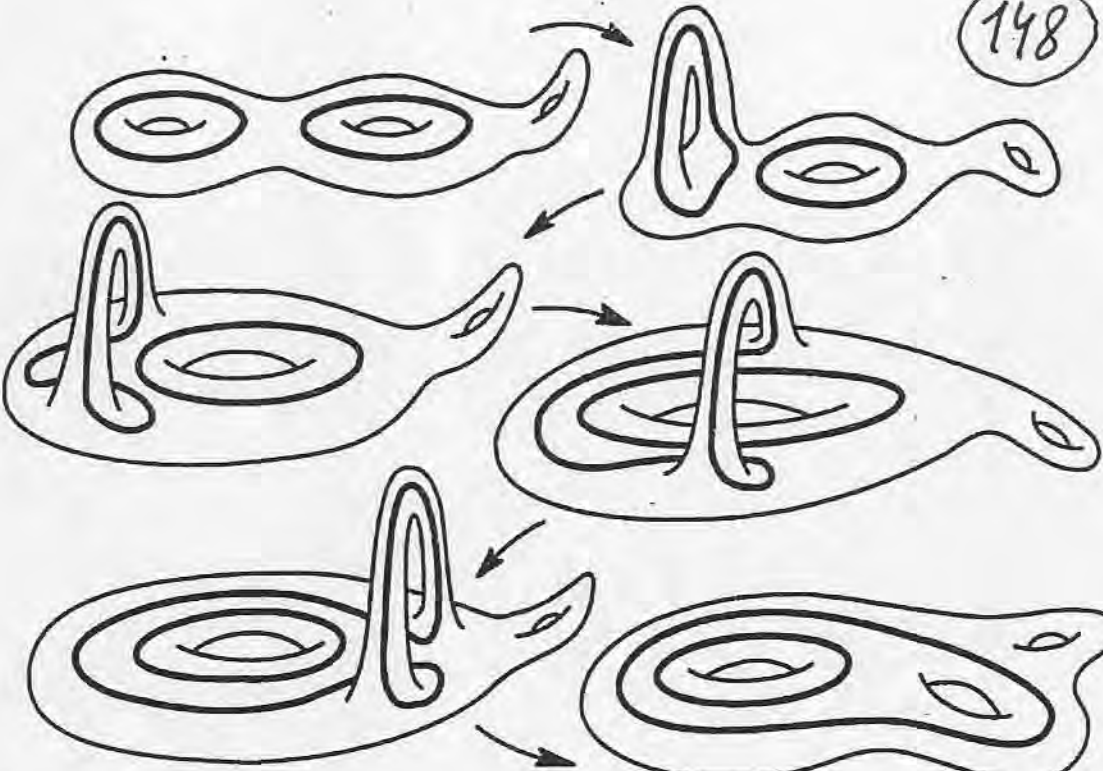


Но если на руке
есть часы (с ремешком), то пальцы конечно
можно расцепить, но ремешок завяжется,
как показано на рис.



Разрезав 1 раз по оси, получаем ленту, закруч. на 2π. Разрезав еще раз по оси ленты, получим уже две такие же ленты (закручен. на 2π), причем эти ленты зацеплены в $\mathbb{R}^3$. Докажите. Продолжить разрезания по оси. Что получится?

(Каждое из закрученных на 2π колец будет зацеплено с каждым).



В алгебре такие операции иногда называются операциями Нильсена.