Лекция 9

Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если любую пару его точек можно окружить непересекающимися друг с другом открытыми множествами.

В частности, метрическое пространство хаусдорфово: если $\rho(x, y) = 2\varepsilon$, то открытые шары радиуса ε с центрами в точках x и y не пересекаются в силу неравенства треугольника. *В дальнейшем мы будем всегда говорить только о хаусдорфовых пространствах.* В частности, в определение многообразия мы внесем еще один пункт: многообразие предполагается хаусдорфовым пространством.

4. Пространство X называется *компактным*, если из любой последовательности точек можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Эквивалентно: если X покрыто счетным числом открытых областей, то из них можно выбрать конечное число покрывающих X.

5. *Линейно связное* пространство обладает тем свойством, что любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

6. Другим важным для нас примером топологического пространства является *пространство отображений $M \to N$* многообразия M в многообразие N, точное описание топологии которого будет дано ниже.

Понятие многообразия лишь на первый взгляд может показаться чересчур абстрактным. Фактически же даже в евклидовом пространстве или его областях мы зачастую бываем вынуждены делать замены координат и следить за законом преобразования тех или иных величин. Более того, часто удобно в разных областях пространства решать ту или иную задачу в разных координатах, затем следить, как решения «сшиваются» в общей области действия двух различных координатных систем. Кроме того, не все поверхности допускают возможность введения единой системы координат без особых точек (например, сфера не допускает).

Важный класс многообразий составляют ориентируемые многообразия.

Определение 1.3. Многообразие M называется *ориентированным*, если якобианы функций перехода $J_{pq} = \det\left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ положительны для всех пересекающихся пар областей.

Например, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ по определению ориентировано. То же самое пространство $\mathbb{R}^n$ с другими координатами $(y^1, \dots, y^n)$ также по определению ориентировано. При этом согласно сказанному выше якобиан замены $x^\alpha = x^\alpha(y^1, \dots, y^n)$, $J = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)$ отличен от нуля и потому имеет постоянный знак.

Определение 1.4. Мы скажем, что координаты (x) и (y) определяют одну и ту же ориентацию в $\mathbb{R}^n$, если $J > 0$, и противоположную, если $J < 0$.

Таким образом, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ обладает двумя ориентациями. В дальнейшем будет показано, что связное многообразие можно ориентировать двумя способами, если ориентация на нем вообще существует.

Приведем здесь еще одно определение ориентированного многообразия.

124

Рассмотрим в произвольной точке x n-мерного многообразия M произвольные невырожденные реперы τ из n касательных векторов. Любые два репера τ_1, τ_2 связаны невырожденным линейным преобразованием

$$\tau_1 = A\tau_2.$$

Будем говорить, что класс ориентации реперов τ_1, τ_2 одинаков, если детерминант $\det A$ положителен. Если $\det A < 0$, то будем говорить, что реперы τ_1, τ_2 относятся к классам противоположной ориентации. Тем самым в каждой точке x многообразия M имеются два класса касательных невырожденных n-реперов. Поскольку репер τ можно непрерывно смещать из точки x в близкую точку многообразия, имеет смысл говорить о непрерывной зависимости классов ориентации от точки многообразия. Дадим теперь другое определение ориентации многообразия.

Определение 2.1. а) Многообразие называется *ориентированным*, если в каждой точке выбран один класс ориентации реперов, непрерывно зависящий от точки.

б) Если такой выбор вообще возможен, то многообразие называется *ориентируемым*. В противном случае многообразие называется *неориентируемым*.

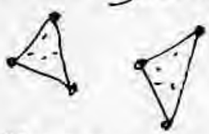
Утверждение . *Определение* 1.3 *эквивалентно определению* 2.1 а).

Доказательство. Если многообразие M ориентировано в смысле определения 1.3, то в каждой точке $x \in M$ в качестве ориентирующего репера можно взять репер $(e_{1j}, \ldots, e_{nj})$, состоящий из базисных ортов к координатным осям $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ области U_j, в которой находится точка x. Так как якобианы переходов положительны, то это определение не зависит от выбора окрестности U_j, в которой находится точка x (если она находится в двух областях U_j и U_k). Обратно, если многообразие ориентировано в смысле определения 2.1, то в каждой точке x задан ориентирующий класс реперов. Рассмотрим достаточно малую ε-окрестность точки x; введем координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ в этой ε-окрестности такие, что репер $(e_1, \ldots, e_n)$, составленный из касательных ортов к осям (x^j), определяет ту же ориентацию, что и ориентирующий репер, во всех точках ε-окрестности. Такое малое $\varepsilon > 0$ можно выбрать, так как ориентирующий класс реперов непрерывно зависит от точки x (хотя ε может зависеть от точки). Проделав эту процедуру для всех точек, получим покрытие многообразия областями, где якобианы перехода все положительны, так как в каждой точке знак касательного репера к выбранным системам координат положителен по отношению к ориентирующему классу реперов. Утверждение доказано. ■

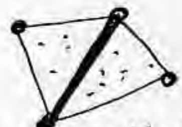
Сфера Александера: топологическое вложение двумерной сферы в $\mathbb{R}^3$, при котором образ сферы разделяет $\mathbb{R}^3$ на две открытые области. Одна из них — шар, а вторая — неодносвязна (рисунок А. Т. Фоменко)

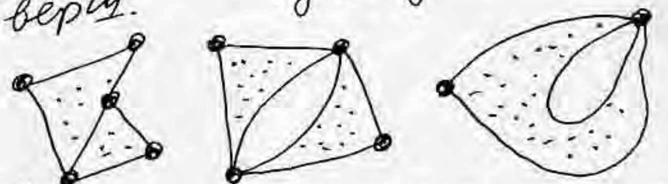
• **Теор. классиф. 2-мерн. поверхн.** компактные, гладкие, связные, замкнутые (т. е. без края, без границы).
Цель: классифицировать такие M^2 с точн. до гомеоморф.
• Подробное д-во см. в: Мищенко, Фоменко, "Краткий курс дифф. геом. и топол.", стр. 180 – 191 (М., URSS, Леланд, 2016).

• Шаг 1. Триангуляция. Определение. Трианг. гладкой 2-поверхн. M^2 – это набор (конечный) вершин (точек) и гладких дуг (ребер). Условие: дуги пересекаются только в (своих) вершинах и только своими концами. Они режут M^2 на области, гомеомор. треугольникам. (считаем треуг. – замкн. подмн.)
• При этом возможны только след. варианты:

1) 
не пересекаются

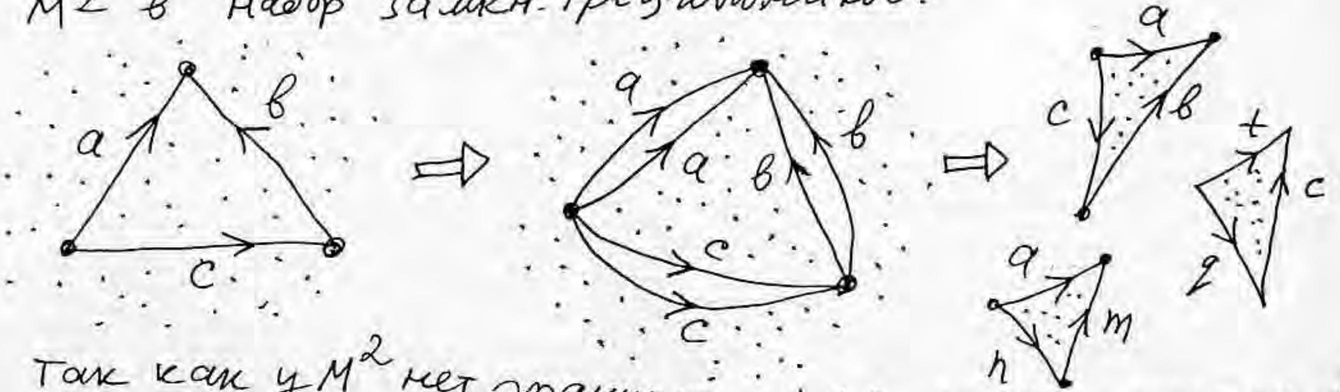
2) 
пересек. в одной верш.

3) 
пересек. ровно по одному целому ребру.

• Запрещено, например: 

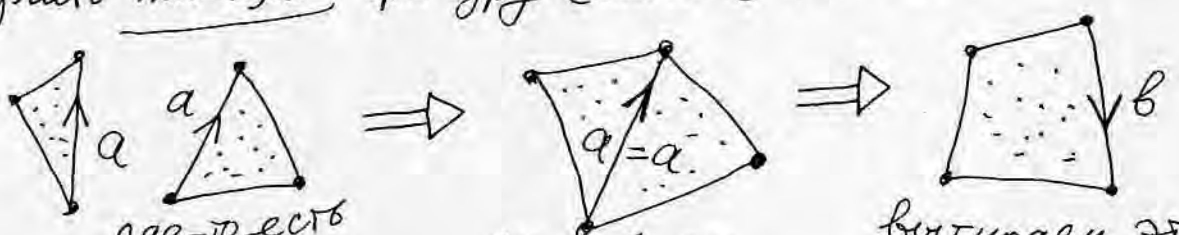
• Теор. (без д-ва. См. наш обязат. курс дифф. геом. и топол.)
$\forall$ гладкое 2-мерн. комп. связное, замкн. (= без края) многообр. допускает гладкую конечную триангуляцию.
• Берем любую такую трианг. на M^2.

• <u>Шаг 2</u>. Метим ребра — ставим на них буквы (все разные!) и стрелки (ориентац.) произвольно. Затем режем M^2 по всем ребрам и "рассыпаем" M^2 в набор замкн. треугольников.



Так как у M^2 нет границы, то $\forall$ буква встречается в наборе Δ ровно два раза! Т.к. у каждого разреза есть два берега.

• <u>Шаг 3</u>. Склеиваем обратно треугольники, чтобы получить <u>плоскую</u> фигуру (многоугольник).



где-то есть вторая "a" — склеиваем "a" с "a" — вытираем это "a".

На границе получившегося плоского многоугол. обязат. $\exists$ хотя бы одна буква "в" такая, что ее дубликат "в" лежит на каком-то из оставшихся треугольников.
Д-во: допус. противное. Восстановим все склейки и M^2 окажется несвязным объединением по крайней мере 2-х непересек. кусков (компонент). Противоречит связности M^2.

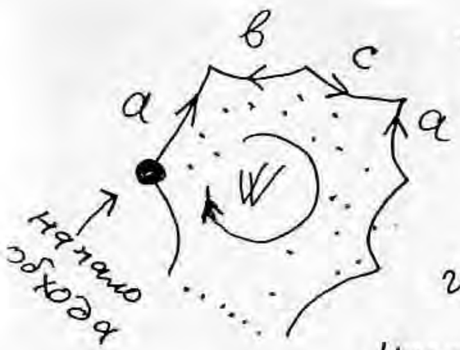
Итак, $\exists$ "в" со своим дубликатом в оставшихся треугольниках:

склеиваем по "в", вытираем этот разрез и т.д.

• В итоге получим <u>плоский</u> связный многоугольник W. Мы исчерпаем (т.е. подклеим) <u>все</u> треугольники (иначе будет противоречие со связностью M^2).

• Итог: на границе ∂W многоугольника W каждая буква "a" встрет. ровно два раза. Построение W — неоднозначно.

• <u>Шаг 4</u>. По мног. W строим "слово" (код) W. Будем его упрощать и приведем к каноническому виду (это — конечная цель).



обходим ∂W и выписываем буквы, указывая их ориентации:

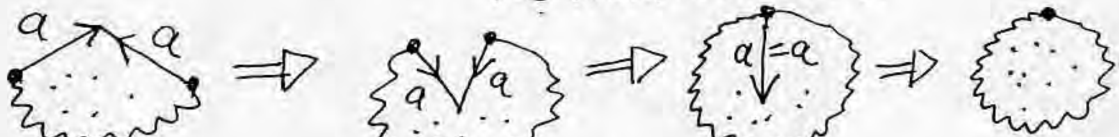
$$W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}\ ;\ \varepsilon_\alpha = \pm 1 .$$

итак: $M^2 \to W(M^2)$ (= слово, код).

Неоднозначно. Это — не страшно. Сократим все стоящие рядом aa^{-1}.

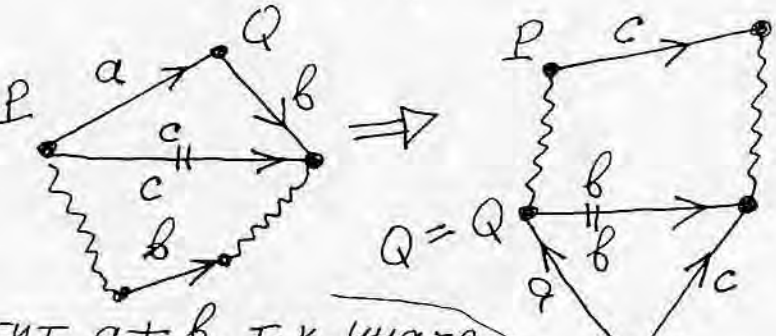
<u>Лемма.</u> Если $W = \text{---}\, aa^{-1} \,\text{---}$ (прочерком обозначаем остальные буквы) то на том же M^2 $\exists$ новая система разрезов, что $W' = \text{---}\ \ \text{---}$ (т.е. aa^{-1} исчезает, а остальное — не меняются).

<u>Д-во.</u>



<u>Шаг 5.</u> Все вершины $\to$ в одну вершину.

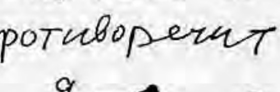
Рассмот. классы эквивалентных вершин (т.е. склеивающихся в одну точку на M^2): $\{P\}, \{Q\}, \dots \{R\}$. Тогда (если их > чем один) $\exists$ два класса $\{P\}$ и $\{Q\}$ с парой их вершин на одном ребре:



итак: $\{Q\} - 1$

$\{P\} + 1$

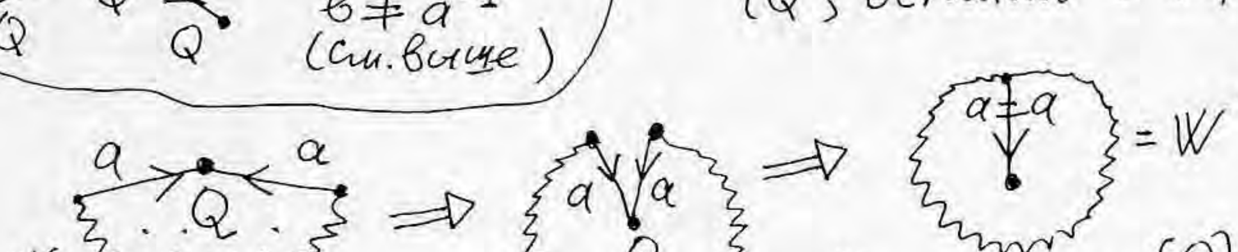
тут $a \neq b$, т.к. иначе было бы: $P = Q$, что противоречит выбору $P \neq Q$.



А также $b \neq a^{-1}$ (см. выше)

Продолжая таким образом, "перекачиваем" весь класс $\{Q\}$ в другие классы вершин.

Последний шаг: когда в $\{Q\}$ осталась 1 вершина



Итак, класс $\{Q\}$ "погиб". И т.д.

• При всех этих операциях M^2 заменяется на гомеоморфное. меняем лишь код $W \to W'$ (но не M^2!). меняем систему разрезов.

т.е. выбираем ("рисуем") более экономичные, оптимальные разрезы. При упрощении W новые разрезы уже не являются триангуляцией. Но это уже неважно. Поверхность M^2 при этом вообще не меняется.

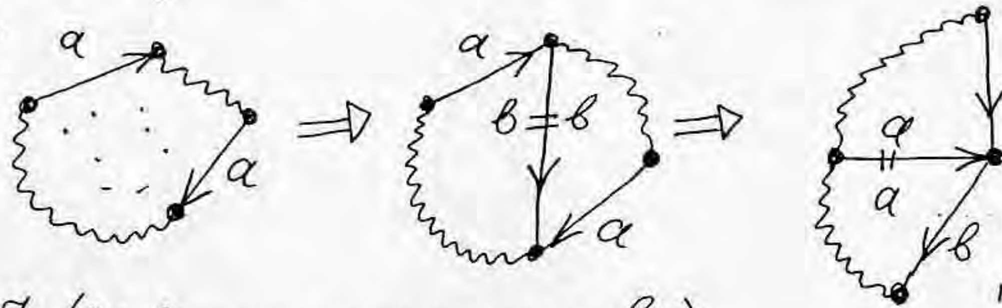
сферы с ручками, проективные плоскости, лист Мебиуса как "скрещенный колпак" и т.д.

Лекция 10

• **Шаг 6.** ("собирание квадратов"). лемма:

$$W = \text{—}\, a \,\text{—}\, a \,\text{—} \Rightarrow W' = \text{—}\, aa \,\text{—}$$

д-во.



$W' = \text{—}\, bb \,\text{—}$

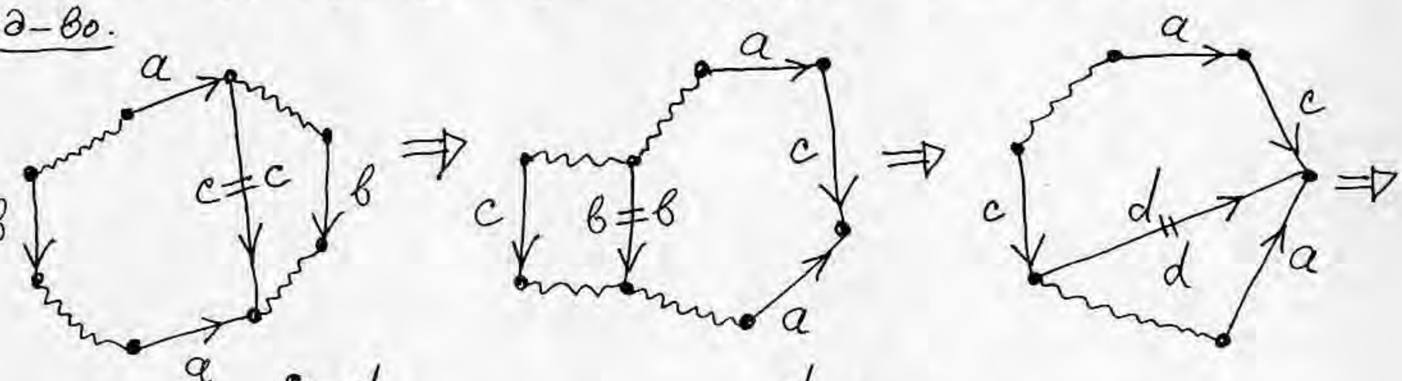
переобозначим $b \to a$

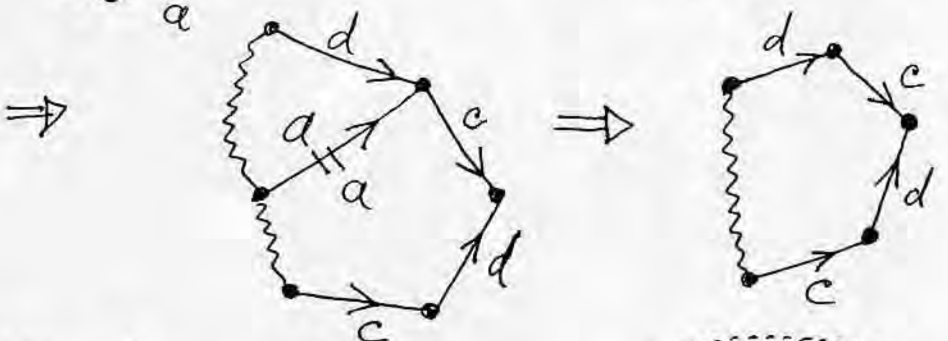
• **Шаг 7.** ("собирание коммутаторов").

лемма.

$$W = \text{—}\, a \,\text{—}\, b \,\text{—}\, a^{-1} \,\text{—}\, b^{-1} \,\text{—} \Rightarrow W' = \text{—}\, a b a^{-1} b^{-1} \,\text{—}$$

д-во.





переобозначим: $d \to a$, $c \to b$

• **Шаг 8.** лемма. $W = \text{—}\, a \,\text{———}\, a^{-1} \,\text{—}\, b^{-1} \,\text{—}$

$\exists\, b$ такое, что

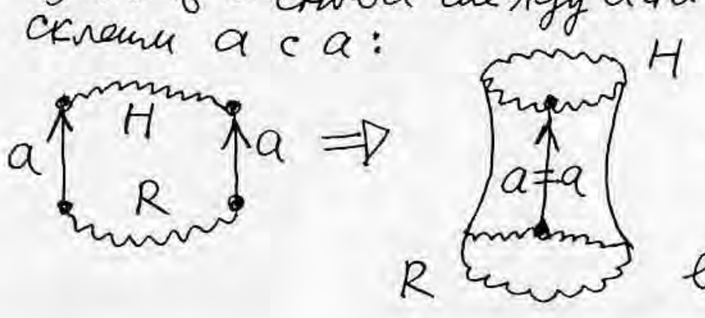
между $a - a^{-1}$
$\exists\, b$ такое, что его дубликат b^{-1} расположен вне "отрезка" $a - a^{-1}$
(именно b^{-1}, т.к. все квадраты мы уже собрали вместе).

д-во. Допуст. противное: $\text{—}\, a \,\underset{b \quad b^{-1}}{\text{———}}\, a^{-1} \,\text{—}$

т.е. $\forall b$ между a и a^{-1}, дубль b^{-1} снова между a и a^{-1}.

$\forall b$

склеим a с a:

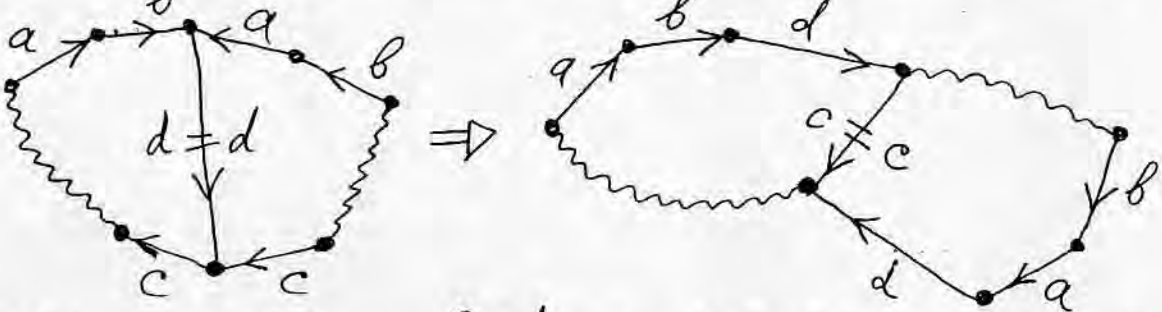


Но тогда все вершины из H склеены с вершинами из H, и все вершины из R склеены с вершинами из R. Т.е. возникают два класса разных вершин. А мы уже привели всё к одной вершине. Противоречие.

<u>Шаг 9.</u> (Нет смешанной серии). В присутствии квадрата коммутатор превращается в 2 квадрата.

<u>Лемма</u>. $W = —\, a b a^{-1} b^{-1} —\, c c — \Rightarrow W' = — a^2 — b^2 — c^2 —$

<u>Д-во.</u>



получим: $— abd — bad —$ и теперь собираем вместе 3 квадрата: $— a^2 — b^2 — d^2 —$

<u>Шаг 10.</u> Мы доказали, что $\exists$ три канонических кода:

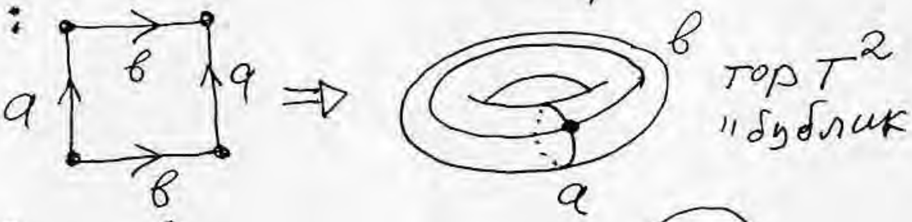
α) $a a^{-1}$

β) $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots\dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, $g > 0$

γ) $c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2$, $k > 0$.

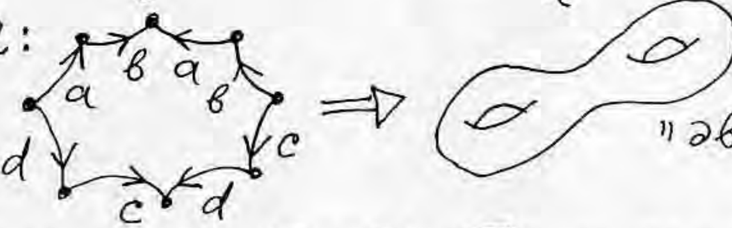
Код α — это сфера:

Код β для $g=1$:



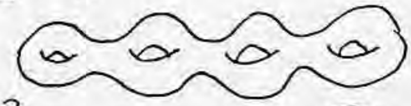
тор T^2 "бублик"

Код β для $g=2$:



"крендель" "две ручки"

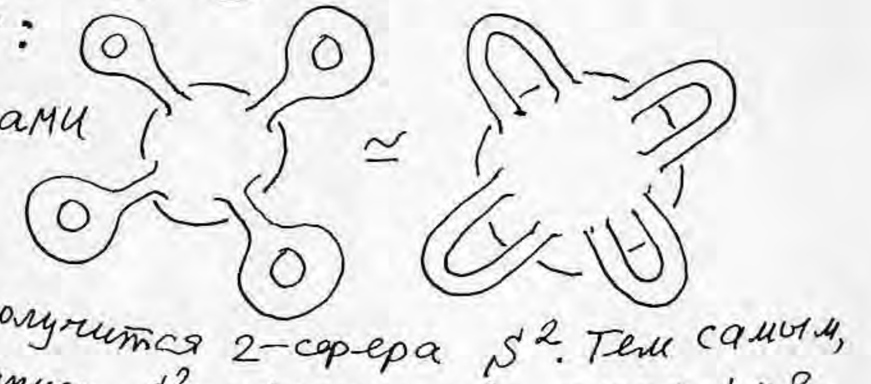
Код β для $\forall g$:



g "ручек"

Другая модель в $\mathbb{R}^3$:

сфера с ручками



Условно запишем так:
$S^2 + g$(ручек),
где $g \geq 0$. При $g=0$ получится 2-сфера S^2. Тем самым, мы объединяем в записи $S^2 + g$(ручек) оба кода: α и β. Эту ∞ серию назовем "серией I". Как увидим далее, это — <u>ориентируемые</u> 2-многообразия.

• Другой подход к построению M^2.

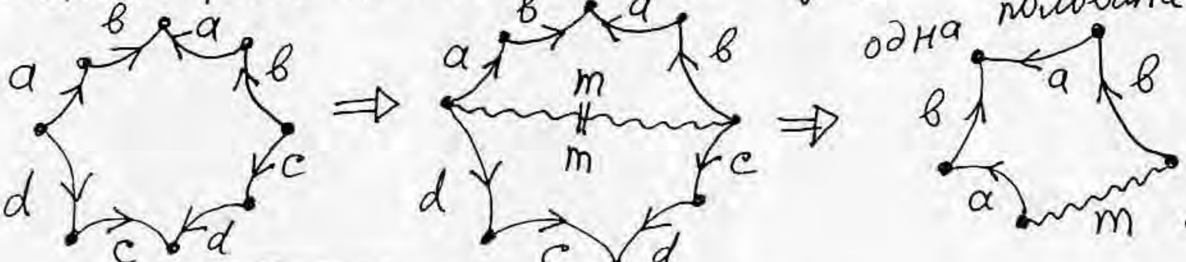
<u>Опред.</u> (Связная сумма). Пусть M и P — два связных многообр. Рассм. $M \setminus D$ и $P \setminus D$, т.е. выбросим из M и P по диску (шару). Получим два мног. с краем сфера. Отождествим эти две граничные сферы при помощи гомеоморфизма. Полученное мног. называется связной суммой: $Q = M \# P$.

$Q = M \# P$

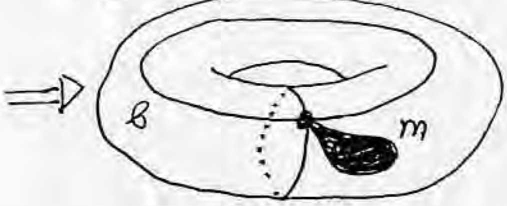
Утв. (Связная сумма корректно определена)

• Утв. Если M и P — гладкие мног., то и $M \# P$ можно считать гладким.

• Снова рассмотрим, например, $M^2_{g=2}$, т.е. крендель.



все вершины по-прежнему склеены в одну точку



= тор с дыркой (ее край — это m). Итак, $M^2_{g=2} \simeq$

$\simeq W = aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ имеет вид:

= крендель $= T^2 \# T^2$.

т.е. $M^2_{g=2} = T^2 \# T^2$ (связн. сумма). А потому:

<u>Теор.</u> Многообразия M^2_g серии I имеют вид (при $g \geq 1$): $M^2_g = T^2 \# \dots \# T^2$ (g раз). Число $g \geq 1$ называется <u>родом</u>.

Считаем, что при $g = 0$ $M^2_{g=0}$ гомеом. сфере.

<u>Утв.</u> Все многооб. серии I можно <u>гладко вложить</u> в $\mathbb{R}^3$. Д-во фактич. уже дано выше. Это — сферы с ручками.

<u>Шаг 11.</u> (2-мног. серии II). Начнем с примеров.

• $W = c^2 = cc$:

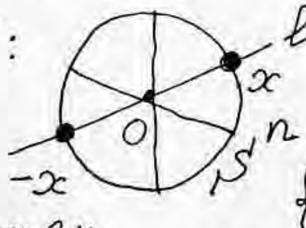
где $c = ab$

т.е. $W = c^2$ — это диск D^2, на границе которого отождествлены точки по правилу: $x \approx (-x)$, т.е. диаметрально противоположные.
А это есть проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$.

• <u>Опред. $\mathbb{R}P^n$</u>. В $\mathbb{R}^{n+1}$ рассм. пучок прямых l через точку O.

$\mathbb{R}P^n = \{l\}$, т.е. точки $\mathbb{R}P^n$ — это прямые этого пучка.

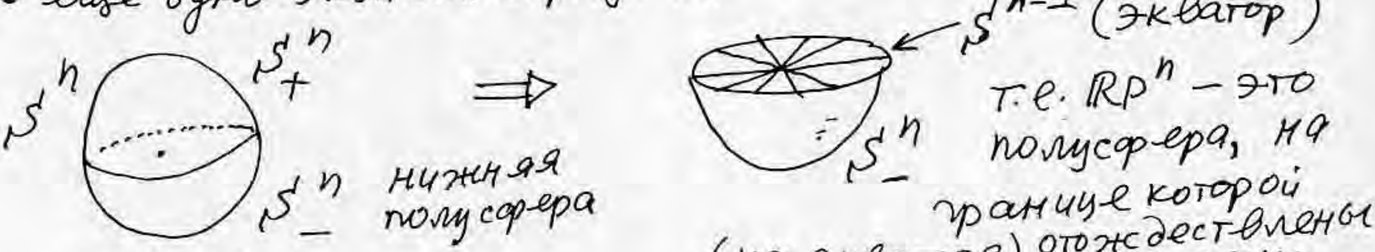
• эквивал. опред. $\mathbb{R}P^n$:



$l \leftrightarrow (x, -x)$, где $x \in S^n$. Поэтому $\mathbb{R}P^n = \{(x, -x), где\ x \in S^n\}$.

т.е. $\mathbb{R}P^n = S^n / \mathbb{Z}_2$ получается отождествлением диамет. противоп. точек на сфере S^n. $\sigma: x \to -x$ инволюция на сфере.
т.е. $\mathbb{R}P^n = S^n / \sigma$, факторизуем сферу по действию σ.

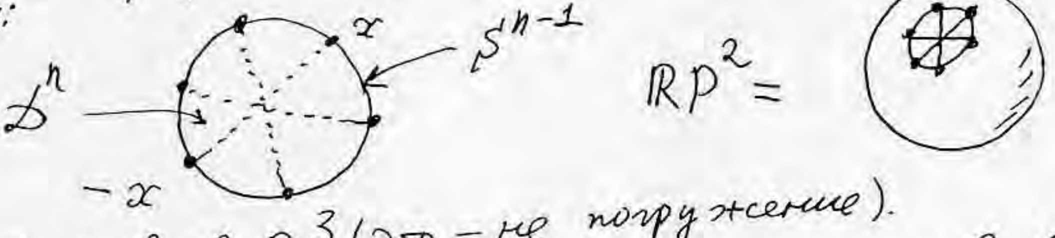
• еще одно эквивал. опред. $\mathbb{R}P^n$:



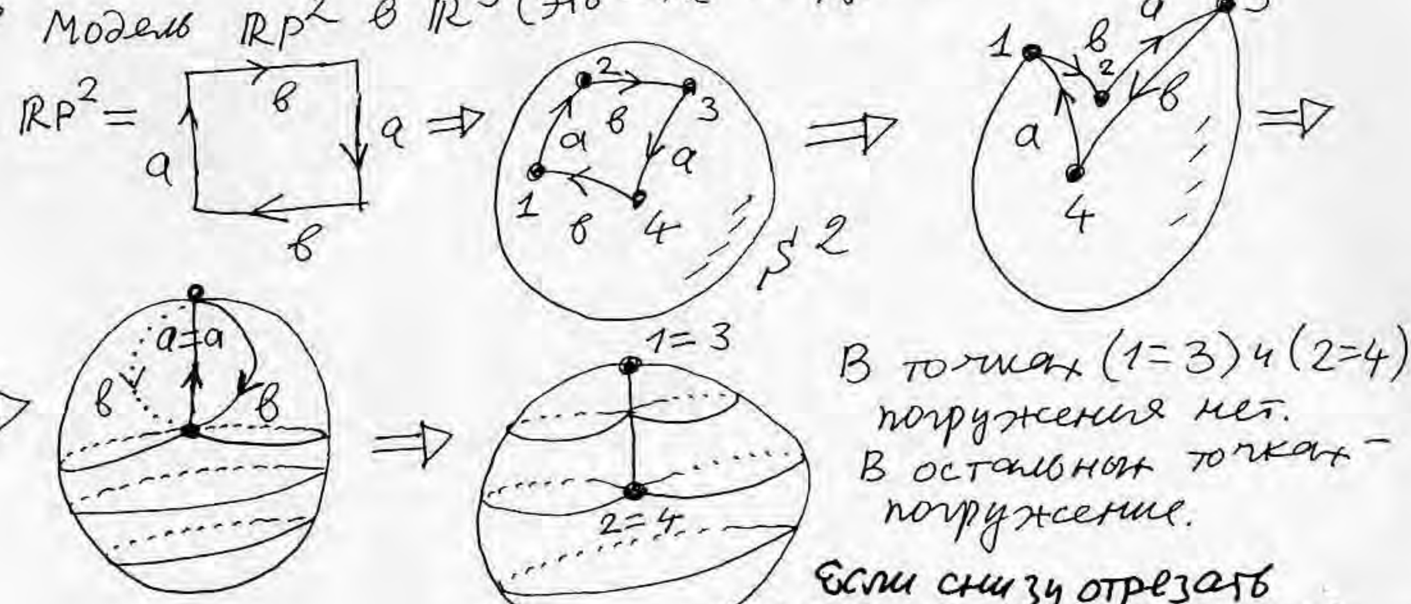
$x \sim (-x)$

т.е. $\mathbb{R}P^n$ — это полусфера, на границе которой (на экваторе) отождествлены точки диаметр. противопол.

• еще одно опред. $\mathbb{R}P^n$: так как полусфера S^n_- гомеоморф. диску (шару) D^n, то $\mathbb{R}P^n$ — это шар (диск) D^n, на граничной сфере которой отождествл. диамет. противопол. точки:

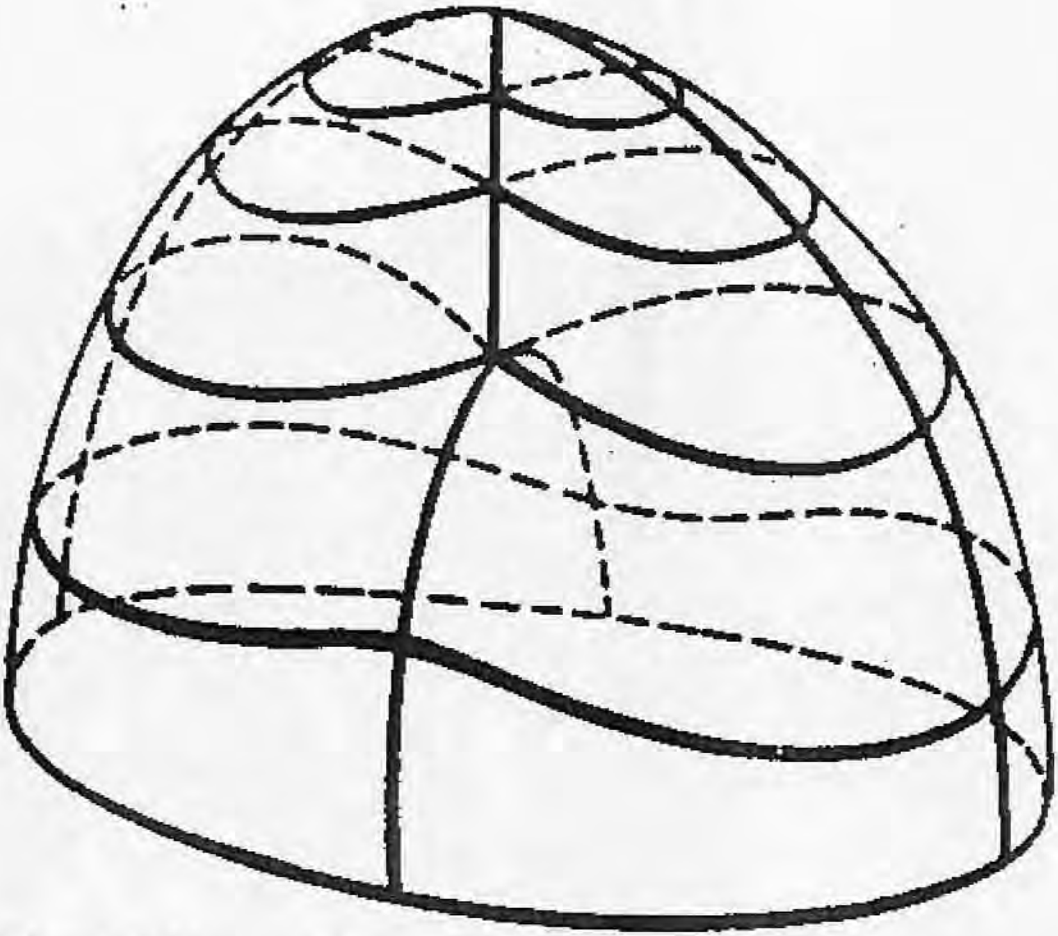


• Модель $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$ (это — не погружение).



В точках $(1=3)$ и $(2=4)$ погружения нет.
В остальных точках — погружение.

Если снизу отрезать "шапочку", то останется лист Мебиуса. см. рис.

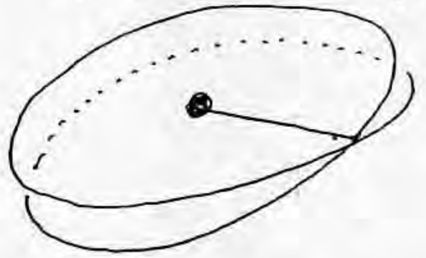


Это — погружение листа Мебиуса в $\mathbb{R}^3$, при котором его граница (окружность) стала плоской. За это пришлось "заплатить" тем, что у листа Мебиуса появились самопересечения.

Такую модель для μ называют "скрещенный" колпак.

См. след. страницу: $\mu = \mathbb{R}P^2 \setminus D^2$.

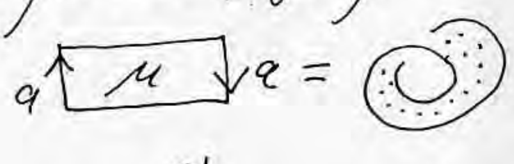
В точках (1=3) и (2=4) — ветвление порядка 2:



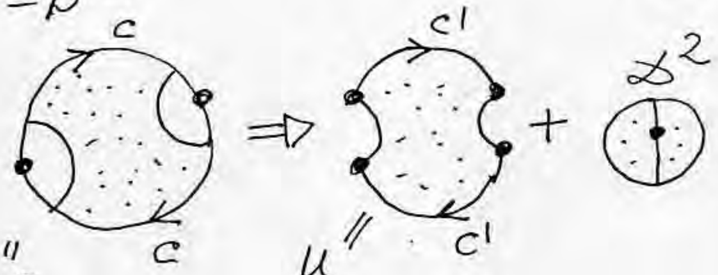
• лемма. $\mathbb{R}P^2 = \mu + D^2$, где μ — лист Мебиуса:

$\partial\mu = S^1$

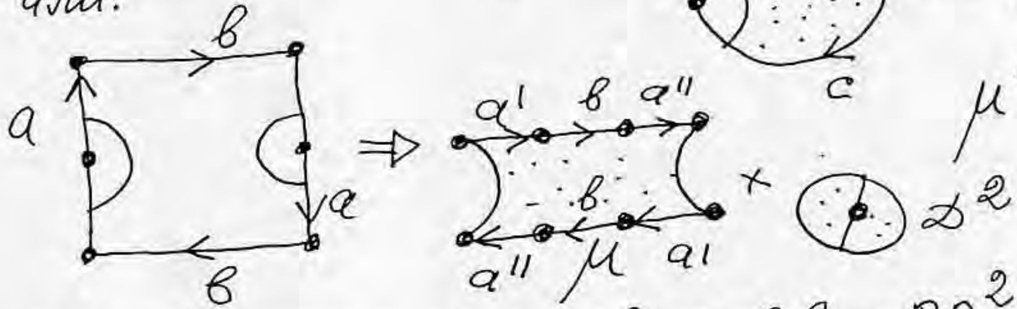
$\partial D^2 = S^1$



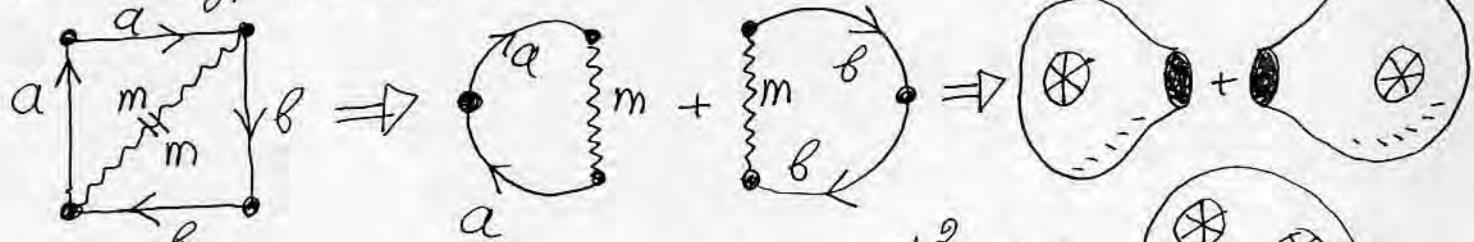
д-во. $\mathbb{R}P^2 \setminus D^2 = \mu$:



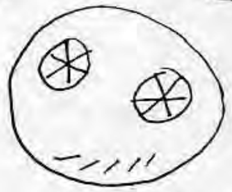
или:



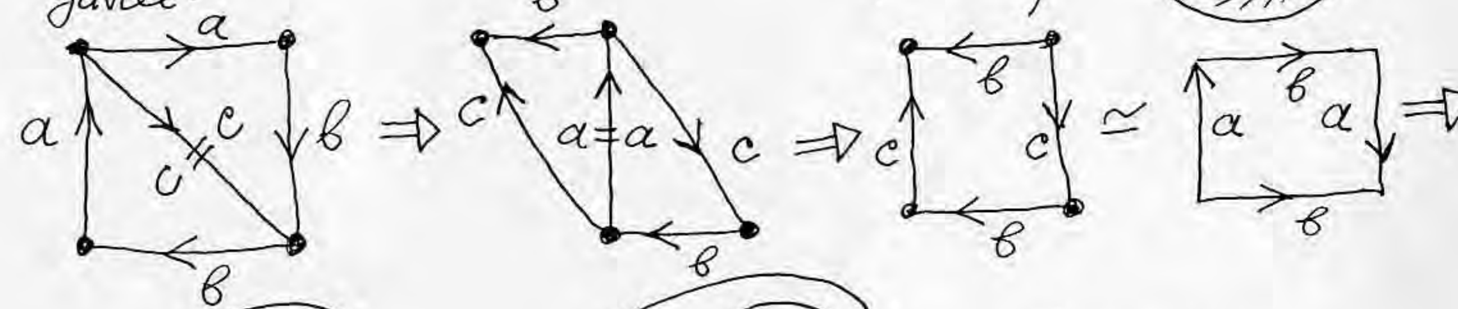
• Два квадрата: $W = a^2b^2 = aabb = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ (связн. сумма)

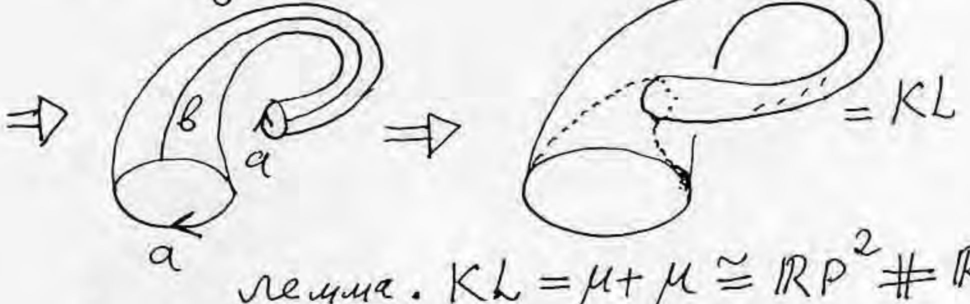


$S^2 + 2\mu$



далее:



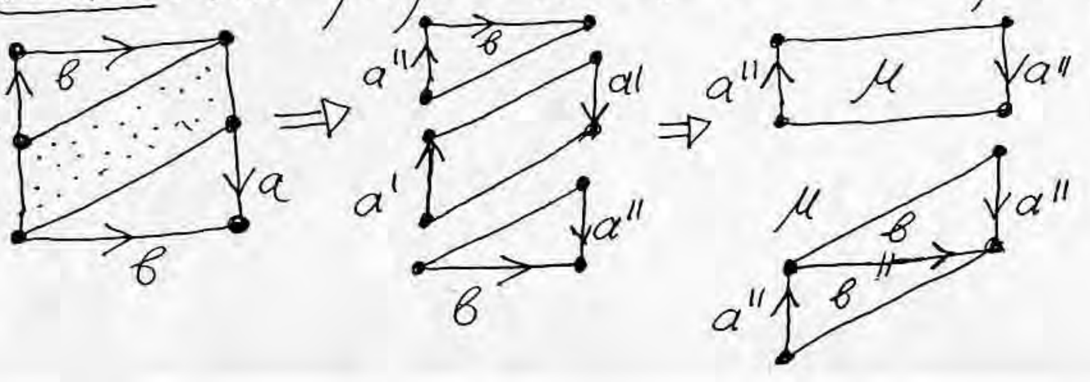


$= KL$ бутылка Клейна

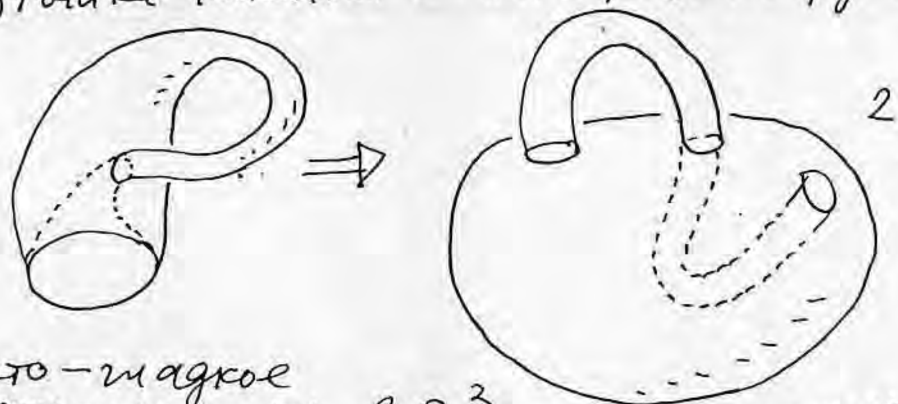
лемма. $KL = \mu + \mu \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = S^2 + 2\mu =$

д-во.

разрежем



• бутылка Клейна = вывернутая ручка:

KL  2-сфера с вывернутой ручкой

это — гладкое погружение KL в $\mathbb{R}^3$, но — не вложение (есть самопересечение)

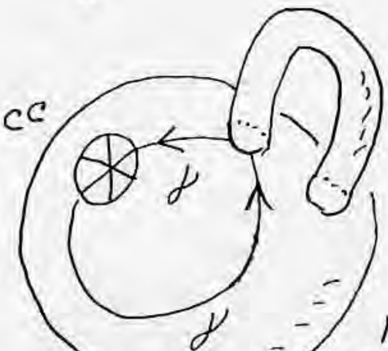
• еще одно погружение KL в $\mathbb{R}^3$:

склеить восьмерки с поворотом на π

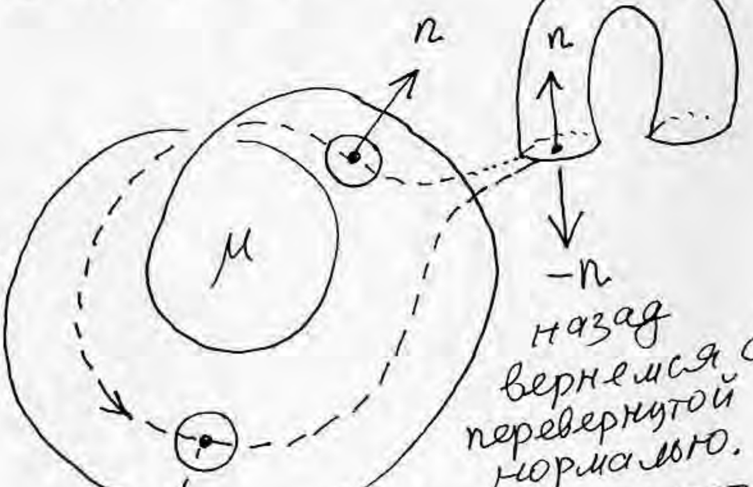
Получается скольжением восьмерки вдоль плоской окружности так, чтобы после полного оборота окружность повернулась на 180°.

• Еще одно (наглядное) д-во, что нет смешанной серии M^2:

$W = \text{—}\, a b a^{-1} b^{-1} \text{—}\, cc \text{—} \;\simeq\; W' = \text{—}\, a^2 \text{—}\, b^2 \text{—}\, c^2 \text{—}$



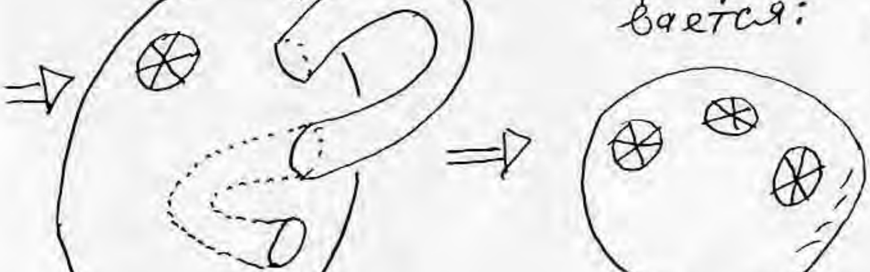
протащим одну подошву ручки вдоль петли γ, проходящей через лист Мебиуса



назад вернемся с перевернутой нормалью.

нормаль переворачивается:

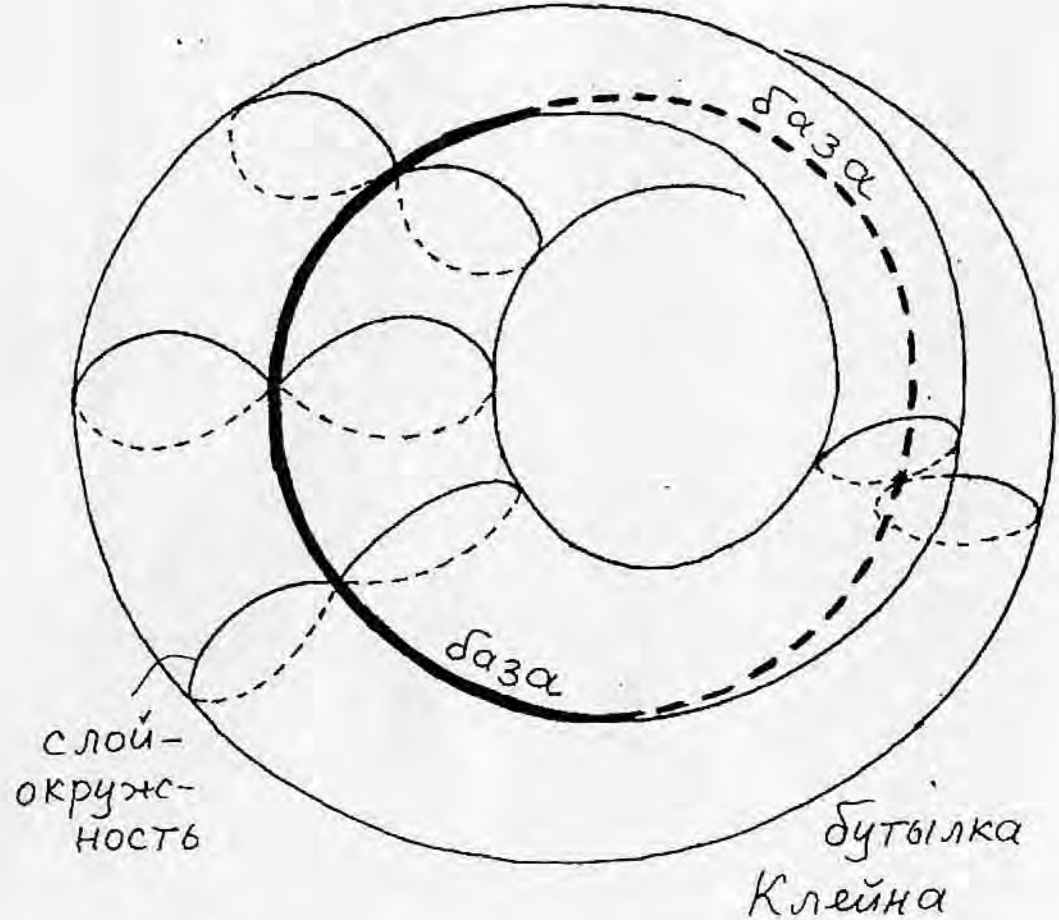
А это означает, что ручка вывернулась:



$= S^2 + 3\mu$

т.е. ручка превратилась в два листа Мебиуса

(также см. след. стр.)



Погружение KL в $\mathbb{R}^3$. Линия самопересечения – это окружность ("база"). Восьмерка движется по этой "базе", поворачиваясь после полного оборота на угол π. Получается "бутылка Клейна".

превращение ручки в вывернутую ручку, т.е. в два листа Мебиуса (при наличии листа Мебиуса)

Д-во отсутствия "смешанной серии".
Бутылка Клейна – это сфера с двумя "пленками Мебиуса".