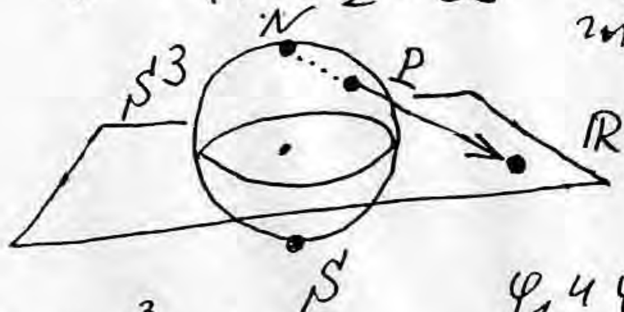
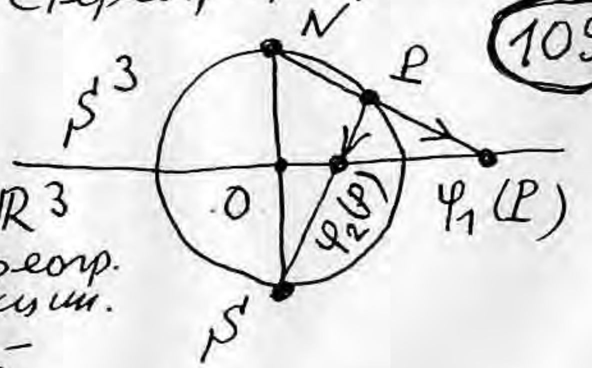
Лекция 8

• Примеры n-многообразий.

• 1. Сфера S^3: $x_1^2+\dots+x_4^2=1$ в $\mathbb{R}^4$. Тогда $S^3=A_1\cup A_2$, где $A_1\approx A_2\approx D^3$ и функции склейки этого атласа — гладкая. Стереограф. проекция.





$A_1=S^3\setminus N$

$A_2=S^3\setminus P$

φ_1 и φ_2 — стереогр. проекции.

ф-я перехода φ_{12} — гладкая. (докажите).

• $\mathbb{R}P^3$ (проект. пр-во) — гладкое. Д-во — позже. Сразу $\mathbb{R}P^n$.

• $M^2\times S^1$. Вообще, если M^m и N^n — гладк. мног., то $M\times N$ — гладк. мног. $\dim = m+n$.

~~~~~~

• Пример многомер. глад. многообразия.

Теор. проект. пр-ва $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ — гладк. многообразия.

Д-во. $\mathbb{R}P^n = \ast^{\ell}_{\mathbb{R}^{n+1}} \simeq \ell = \{\lambda(x^1,\dots,x^{n+1}),\ \lambda\neq 0$ и $\exists x^i\neq 0\}$.

Атлас на $\mathbb{R}P^n$ имеет вид: $\mathbb{R}P^n=A_1\cup\dots\cup A_{n+1}$, где локал. карта $A_i=\{\ell : x^i\neq 0\}$. Координатн. отображ. $\varphi_i: A_i\to\mathbb{R}^n$ имеет вид:

$$\varphi_i:\ \lambda(x^1,\dots,x^{n+1}) \longrightarrow \left(\frac{x^1}{x^i},\dots,\hat{i},\dots,\frac{x^{n+1}}{x^i}\right)\in\mathbb{R}^n(\alpha_1\dots\hat{\alpha_i}\dots\alpha_{n+1})$$

здесь: $\alpha_k = x^k/x^i$, при $k\neq i$. Ясно, что $\varphi_i: A_i\to\mathbb{R}^n$ гомеоморфизм

• Функции склейки на $A_i\cap A_j=(\ell(x^i\neq 0,\ x^j\neq 0))$.

пусть $A_i(\alpha_k,\ k\neq i)$ и $A_j(\beta_k,\ k\neq j)$.

тогда на пересечении: $\beta_k = x^k/x^j$, $k\neq j$ и $\alpha_k=x^k/x^i$, $k\neq i$, отсюда:

$$\alpha_k=\frac{x^k/x^j}{x^i/x^j}=\frac{\beta_k}{\beta_i};\quad \alpha_j=x^j/x^i=1/\beta_i$$

Все эти функции гладкие и даже веществ. аналитич.

• Аналогично — для $\mathbb{C}P^n$. При этом $\mathbb{C}P^n$ всегда ориентир., а $\mathbb{R}P^n$ — ориентир. при n-нечет. и неориен. при n-четном. докажем далее.
~~~~~~

Проведем теперь в поверхности M гладкую кривую $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, проходящую через точку P_0. Поскольку кривая $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ лежит на поверхности M, то ее параметрически можно представить в виде композиции

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)) \tag{8}$$

для некоторых функций $u(t)$, $v(t)$. Иначе это можно сказать следующим образом: функции $u(t)$, $v(t)$ являются параметрическим заданием кривой в локальной системе координат (u, v) на поверхности M. Тогда условие прохождения кривой через точку P_0 перепишем в виде условия на координаты: $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$. Вычислим теперь касательный вектор к кривой (или, как его иначе называют, вектор скорости кривой):

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(u(t), v(t)))|_{t=t_0} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u(t_0), v(t_0))\frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u(t_0), v(t_0))\frac{dv}{dt}(t_0) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{dv}{dt}(t_0).\end{aligned}$$

Следовательно, *касательный вектор к кривой, лежащей на поверхности M, лежит в касательной плоскости.*

Определение 1. Пусть

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\xi^1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\xi^2$$

— касательный вектор к поверхности M в точке P_0. Тогда числа (ξ^1, ξ^2) назовем *координатами касательного вектора $\boldsymbol{\xi}$ к поверхности M в точке P_0 в локальной системе координат (u, v) на поверхности M.*

Это определение годится не только для координат (u, v), с помощью которых параметрически задана поверхность M, но и для произвольной системы координат (u', v') в окрестности точки P_0. В самом деле, если (u', v') — другая система координат, то координаты u и v выражаются как гладкие функции от координат (u', v'): $u = u(u', v')$, $v = v(u', v')$, $u_0 = u(u'_0, v'_0)$, $v_0 = v(u'_0, v'_0)$. Тогда, рассматривая композиции функций, мы получаем новое параметрическое задание поверхности M:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(u', v'), v(u', v')). \tag{9}$$

Рассмотренные примеры показывают, что изучение инфинитезимальных свойств кривых в многообразии может быть проведено только в рамках некоторой локальной системы координат на многообразии. В частности, в геометрии важную роль играет понятие касательного вектора и касательного пространства произвольного гладкого многообразия, имеющие полную аналогию с касательными векторами и касательным пространством для поверхности, расположенной в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$.

Определение 2. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $P_0 \in \in M$ — произвольная точка. *Касательным вектором* $\boldsymbol{\xi}$ *в точке* P_0 *к многообразию* M называется соответствие, которое каждой локальной системе координат $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$ сопоставляет набор чисел $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$, удовлетворяющий следующему соотношению для каждой пары локальных систем координат:

$$\xi_i^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l. \tag{12}$$

Числа $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$ называются *координатами касательного вектора* $\boldsymbol{\xi}$ в локальной системе координат $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$. Соотношение (12) называется *тензорным законом преобразования координат* касательного вектора $\boldsymbol{\xi}$ при заменах локальных координат.

Определение 2 обобщает понятие координат касательного вектора к кривой на поверхности. Закон изменения этих координат является частным случаем тензорного закона (12) преобразования координат касательного вектора к многообразию. Более того, всякая гладкая кривая на гладком многообразии снабжается в каждой своей точке касательным вектором . Это важное свойство мы сформулируем в виде предложения. (112)

Предложение 1. *Пусть M — гладкое многообразие, $\gamma\colon (-1,1)\to M$ — гладкое отображение интервала $(-1,1)$ в многообразие M. Тогда соответствие, которое каждой локальной системе координат $(x^1,\dots,x^n)$ в окрестности точки $P_0 = \gamma(0)$ сопоставляет набор чисел $\left(\frac{dx^1}{dt}(\gamma(t)),\dots,\frac{dx^n}{dt}(\gamma(t))\right)_{t=0}$, является касательным вектором в смысле определения 1.*

Доказательство. Для доказательства предложения 1 достаточно проверить тензорный закон преобразования координат (12). Положим $\xi_j^k = \frac{dx_j^k}{dt}(\gamma(t))|_{t=0}$, где $(x_j^1,\dots,x_j^n)$ — локальная система координат на многообразии M в окрестности точки P_0. Тогда для двух локальных систем координат получим:

$$\xi_i^k = \frac{d}{dt}x_i^k(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x_i^k(x_j^1(\gamma(t)),\dots,x_j^n(\gamma(t)))|_{t=0} = \\ = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(\gamma(t))\frac{d}{dt}x_j^l(\gamma(t))|_{t=0} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l.$$

Это и есть тензорный закон (12). Предложение доказано. □

Таким образом, указанное в предложении 1 соответствие естественно называть *касательным вектором к кривой* γ или *вектором скорости кривой* γ. Касательный вектор к кривой будем обозначать через $\frac{d\gamma}{dt}(t_0)$ или $\dot\gamma(t_0)$.

Касательное пространство $T_{P_0}(M)$

Множество всех касательных векторов в фиксированной точке P_0 к многообразию M называется *касательным пространством к многообразию M в точке P_0*. Это множество обозначается через $T_{P_0}(M)$. Каждый касательный вектор $\boldsymbol{\xi}\in T_{P_0}(M)$ однозначно определяется своими координатами в одной фиксированной системе координат. Действительно, если нам задан набор чисел $(\mu^1,\dots,\mu^n)$ и мы считаем этот набор чисел координатами искомого касательного вектора в фиксированной локальной системе координат $(x_{i_0}^1,\dots,x_{i_0}^n)$, т. е. $\mu^k = \xi_{i_0}^k$, то для задания всего касательного вектора необходимо определить его координаты в каждой локальной системе координат $(x_i^1,\dots,x_i^n)$. Положим для этого

$$\xi_i^k = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\mu^l.$$

Полученные координаты удовлетворяют тензорному закону преобразования координат (12). Для проверки этого закона подставим в (12) значения ξ_i^k и ξ_j^l:

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\mu^i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0) \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\mu^i = \\ = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0)\frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)\right)\mu^l.$$

Поскольку $\frac{\partial x_i^k}{\partial x_{i_0}^l}(P_0) = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^s}(P_0)\frac{\partial x_j^s}{\partial x_{i_0}^l}(P_0)$ (закон изменения матрицы Якоби тройной замены координат), то соотношение (12) выполняется тождественно.

Мы установили, таким образом, что множество всех касательных векторов к многообразию M в точке P_0 однозначно описывается своими координатами в одной фиксированной локальной системе координат. Следовательно, все касательное пространство T_{P_0} отождествляется с арифметическим векторным пространством $\mathbf{R}^n$. Это значит, что касательное пространство $T_{P_0}(M)$ можно снабдить структурой линейного пространства. Казалось бы, структура линейного пространства в T_{P_0} зависит от выбора локальной системы координат в окрестности точки P_0. В действительности верно обратное.

Предложение 2. *Операции сложения векторов и умножения вектора на число в касательном пространстве $T_{P_0}(M)$ не зависят от выбора локальной системы координат на многообразии M в окрестности точки P_0.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\mu}$ — два вектора из $T_{P_0}(M)$, $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$, $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ — две локальные системы координат на многообразии M в окрестности точки P_0. Пусть $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$, $(\mu_i^1, \ldots, \mu_i^n)$ — координаты векторов $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\mu}$ в системе $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$, а $(\xi_j^1, \ldots, \xi_j^n)$, $(\mu_j^1, \ldots, \mu_j^n)$ — координаты тех же векторов в системе $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$. Тогда, согласно тензорному закону (12) преобразования координат касательных векторов, справедливы соотношения:

$$\xi_i^k = \sum_{l=1} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\xi_j^l, \tag{13}$$

$$\mu_i^k = \sum_{l=1} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)\mu_j^l. \tag{14}$$

Следовательно, складывая почленно эти равенства, получаем:

$$(\xi_i^k + \mu_i^k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)(\xi_j^l + \mu_j^l).$$

Последнее равенство означает, что наборы чисел $((\xi_i^1 + \mu_i^1), \ldots, (\xi_i^n + \mu_t^n))$ подчиняются тензорному закону преобразования координат, т. е. определяют один касательный вектор, независимо от выбора локальной системы координат.

Точно так же, умножая (13) на число λ, получаем:

$$\lambda \xi_i^k = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l}(P_0)(\lambda \xi_j^l),$$

т. е. набор чисел $(\lambda \xi_i^k)$ тоже подчиняется тензорному закону преобразования координат касательного вектора. Предложение доказано. □

Тензорный закон преобразования координат (12) можно рассматривать как способ отождествления арифметических пространств координат касательных векторов в каждой локальной системе координат. Этот способ заключается в том, что столбец координат (ξ_j^k) умножается на матрицу Якоби перехода от координат $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ к координатам $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$:

$$\begin{pmatrix} \xi_i^1 \\ \vdots \\ \xi_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_i^1}{\partial x_j^1} & \cdots & \dfrac{\partial x_i^1}{\partial x_j^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_i^n}{\partial x_j^1} & \cdots & \dfrac{\partial x_i^n}{\partial x_j^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \vdots \\ \xi_j^n \end{pmatrix}$$

или $(\xi_i^k) = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}(\xi_j^i)$.

Следовательно, касательное пространство $T_{P_0}(M)$ — это пространство, изоморфное всем арифметическим пространствам координат касательных векторов.

Пучок соприкасающихся кривых

В предыдущих пунктах мы дали формально-алгебраическое определение касательного пространства к многообразию. В этом определении плохо видно геометрическое свойство касательного вектора — линейного приближения к кривой. Как же определить это свойство безотносительно к расположению многообразия в линейном пространстве? Один и тот же вектор соответствует сразу многим кривым, для которых он является касательным. Поэтому нам ничего не остается, как выделить такие классы кривых, которые в линейных пространствах имели бы общий касательный вектор.

Определение 3. Две кривые γ_1, γ_2 на многообразии M, пересекающиеся в одной точке P_0, называются *соприкасающимися*, если в каждой локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки P_0 выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}(x^k(\gamma_1(t)) - x^k(\gamma_2(t)))^2 = o(t - t_0)^2 \text{ при } t \to t_0. \qquad (15)$$

Как и раньше, условие соприкасания (15) достаточно проверять всего лишь в одной локальной системе координат. Условие соприкасания тесным образом связано с касательными векторами. Следующая теорема, в частности, оправдывает термин «соприкасающиеся кривые».

Теорема 1. *Две гладкие кривые γ_1 и γ_2 на многообразии M соприкасаются в точке P_0 тогда и только тогда, когда у кривых γ_1 и γ_2 совпадают касательные векторы в точке P_0.*

Доказательство. Условие (15) перепишем в следующем виде:

$$\lim_{t\to t_0}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k(\gamma_1(t)) - x^k(\gamma_2(t))}{t - t_0}\right)^2 = 0$$

После элементарных преобразований получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}x^k(\gamma_1(t)) - \frac{d}{dt}x^k(\gamma_2(t))\right)^2\Bigg|_{t=t_0} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}x^k(\gamma_1(t))|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}x^k(\gamma_2(t))|_{t=t_0}.$$

Последнее равенство в точности означает, что касательные векторы к кривым γ_1 и γ_2 совпадают, $\dot\gamma_1(t_0) = \dot\gamma_2(t_0)$.

Обратно, если $\dot\gamma_1(t_0) = \dot\gamma_2(t_0)$, то справедливы равенства

$$\lim_{t\to t_0}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k(\gamma_1(t)) - x^k(\gamma_2(t))}{t - t_0}\right)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}x^k(\gamma_1(t)) - \frac{d}{dt}x^k(\gamma_2(t))\right)^2\Bigg|_{t=t_0} = 0 \qquad \square$$

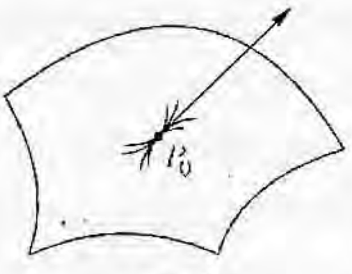


Рис. 1

Теорема 1 дает другой способ определения касательного вектора к кривой. Множество всех гладких кривых, проходящих через заданную точку P_0 на многообразии M, распадается на непересекающиеся классы попарно соприкасающихся кривых. Назовем *касательным вектором* класс соприкасающихся кривых, проходящих через точку $P_0 \in M$. Тогда мы получаем взаимно-однозначное соответствие между касательными векторами в смысле определения 1 и в смысле классов соприкасающихся кривых (рис. 1).

Производная функции по направлению

Существует еще один способ представлять касательный вектор на многообразии M. Как всегда, начнем с простого примера. Пусть $f(x, y)$ — гладкая функция от двух переменных, $P_0 = (x_0, y_0)$ — некоторая точка, $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ — вектор в плоскости $\mathbf{R}^2$. В математическом анализе изучают производную функции f вдоль вектора $\boldsymbol{\xi}$, которую определяют по формуле:

$$\boldsymbol{\xi}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\xi^2. \tag{16}$$

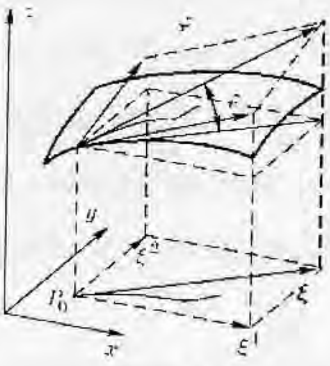


Рис. 2

Производную вдоль вектора $\boldsymbol{\xi}$ можно также определить, используя гладкие кривые. Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая на плоскости $\mathbf{R}^2$, проходящая через точку P_0. Допустим, что касательный вектор к кривой $\gamma(t)$ в точке P_0 равен $\boldsymbol{\xi}$. Тогда (см. рис. 2)

$$\boldsymbol{\xi}(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=t_0}, \quad \gamma(t_0) = P_0. \tag{17}$$

В самом деле, если $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, то $\xi^1 = \frac{dx}{dt}(t_0)$, $\xi^2 = \frac{dy}{dt}(t_0)$. Следовательно, подставляя координаты кривой $\gamma(t)$ в аргументы функции f и дифференцируя по параметру, получаем:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))|_{t=t_0} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\xi^2 = \boldsymbol{\xi}(f).$$

Таким образом, определим теперь в общем случае по каждому касательному вектору $\boldsymbol{\xi}$ к многообразию M в точке P_0 операцию дифференцирования гладкой функции в точке P_0.

117

Определение 4. Пусть $P_0 \in M$, $\boldsymbol{\xi} \in T_{P_0}$, $\gamma(t)$ — гладкая кривая, проходящая через точку P_0, $\gamma(t_0) = P_0$ и ее касательный вектор в точке P_0 равен $\boldsymbol{\xi}$. Пусть f — гладкая функция на многообразии M. Число

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=t_0} = \boldsymbol{\xi}(f) \tag{18}$$

называется *производной функции f вдоль касательного вектора $\boldsymbol{\xi}$*. Операция взятия производной называется *дифференцированием функции f вдоль вектора $\boldsymbol{\xi}$*.

Теорема 2. *Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в окрестности точки $P_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ многообразия M, $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — касательный вектор к многообразию M в точке P_0, $f = f(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкая функция в окрестности точки P_0, представленная как функция от локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда*

$$\boldsymbol{\xi}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\xi^i. \tag{19}$$

Следовательно, определение (18) *производной не зависит от выбора кривой γ в классе соприкасающихся кривых, а правая часть* (19) *не зависит от выбора локальной системы координат. Если g — другая гладкая функция в окрестности точки P_0, то для произведения функций f и g справедлива формула дифференцирования Ньютона—Лейбница:*

$$\boldsymbol{\xi}(fg) = \boldsymbol{\xi}(f)g(x_0^1, \ldots, x_0^n) + f(x_0^1, \ldots, x_0^n)\boldsymbol{\xi}(g). \tag{20}$$

Доказательство. Представим кривую $\gamma(t)$, проходящую через точку P_0 в координатном виде: $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Тогда по определению касательного вектора к кривой $\dfrac{dx^i}{dt}(t_0) = \xi^i$. Тогда

$$\boldsymbol{\xi}(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \ldots, x^n(t))|_{t=t_0} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\frac{dx^i}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n)\xi^i.$$

Формула (19) доказана. Докажем формулу (20). Используя (19) и дифференцируя произведение функций, получаем:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}(fg) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(f(x^1,\ldots,x^n)g(x^1,\ldots,x^n)\right)\Big|_{x^k=x_0^k}\xi^k = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\ldots,x_0^n)g(x_0^1,\ldots,x_0^n) + f(x_0^1,\ldots,x_0^n)\frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1,\ldots,x_0^n)\right)\xi^i = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\ldots,x_0^n)\xi^i\right) g(x_0^1,\ldots,x_0^n) + \\
&\quad + f(x_0^1,\ldots,x_0^n)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1,\ldots,x_0^n)\xi^i\right) = \\
&= \boldsymbol{\xi}(f)g(x_0^1,\ldots,x_0^n) + f(x_0^1,\ldots,x_0^n)\boldsymbol{\xi}(g).
\end{aligned}$$

Таким образом, формула (20) тоже доказана. □

Операция дифференцирования гладкой функции f вдоль касательного вектора $\boldsymbol{\xi}$ может быть охарактеризована некоторыми своими свойствами так, что в формулировках этих свойств вовсе не будет участвовать какая-либо локальная система координат. Такой способ описания наиболее удобен при проверке независимости наших геометрических конструкций от конкретной локальной системы координат. У операции дифференцирования таких свойств два:

а) операция дифференцирования вдоль вектора $\boldsymbol{\xi}$ линейна, т. е. если f и g две гладких функции, а λ, μ — два произвольных числа, то

$$\boldsymbol{\xi}(\lambda f + \mu g) = \lambda\boldsymbol{\xi}(f) + \mu\boldsymbol{\xi}(g); \tag{21}$$

б) операция дифференцирования вдоль вектора $\boldsymbol{\xi}$ удовлетворяет формуле (20) Ньютона—Лейбница.

Дадим общее определение.

Определение 5. Операция A, сопоставляющая каждой гладкой функции f класса C^∞ на гладком многообразии M число $A(f)$, удовлетворяющее свойствам а) и б), называется *операцией дифференцирования в точке* $P_0 \in M$.

В формуле Ньютона—Лейбница (20) участвуют значения функций в точке P_0. Поэтому операция дифференцирования в различных точках P_0 и P_1 не могут совпадать. Ясно, что операция дифференцирования вдоль касательного вектора $\boldsymbol{\xi}$ является частным случаем просто операции дифференцирования в смысле определения 4. Оказывается, других операций дифференцирования нет. Это значит, что для каждой операции дифференцирования в смысле определения 4 найдется касательный вектор, вдоль которого и производится дифференцирование функций.

119

Теорема 3. *Пусть M — гладкое многообразие класса C^∞, $P_0 \in M$ — произвольная точка, A — операция дифференцирования в смысле определения 4. Тогда существует и единственен такой касательный вектор $\boldsymbol{\xi}$ в точке P_0, что $A(f) = \boldsymbol{\xi}(f)$ для любой гладкой функции f в окрестности точки P_0.*

Д-во теоремы мы опустим.

Теорема 3 устанавливает взаимно-однозначное соответствие между касательными векторами к многообразию M в точке $P_0 \in M$ и операциями дифференцирования в точке P_0 гладких функций. Мы можем поэтому дать третье эквивалентное определение касательного вектора: *касательный вектор* — это операция дифференцирования гладких функций в точке P_0 многообразия M.

Примером дифференцирования гладких функций служит операция взятия частной производной в некоторой локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. По теореме 3 операция $\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ является касательным вектором, координаты которого равны $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стоит на месте с номером k. Поэтому касательные векторы $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ образуют базис в касательном пространстве T_{P_0}, а всякий касательный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ разлагается в линейную комбинацию $\boldsymbol{\xi} = \xi^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \xi^n \dfrac{\partial}{\partial x^n}$. Это удобное представление будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Касательное расслоение

Множество всех касательных векторов $T_{P_0}(M)$ к многообразию M в точке P_0 является, как мы уже видели, линейным пространством той же размерности, что и многообразие M. В геометрии иногда полезно изучать всю совокупность касательных векторов к многообразию M, которая, очевидно, представляется в виде объединения $\cup_{P_0 \in M} T_{P_0}(M)$. Это (пока еще не топологическое) пространство обозначают через $T(M)$ и называют касательным расслоением многообразия M.

Термин расслоение указывает на то, что $T(M)$ состоит из «слоев» — касательных пространств $T_{P_0}(M)$ к отдельным точкам P_0 многообразия M.

Касательное расслоение отнюдь не является векторным пространством, поскольку операция сложения векторов из разных слоев бессмысленна. Если, например, многообразие M является двумерной поверхностью в $\mathbf{R}^3$, то тогда $T(M)$ состоит из объединения всех касательных плоскостей к поверхности M. Следует обратить внимание, что касательные плоскости к поверхности, как правило, пересекаются и, значит, имеют общие точки. Но по определению $T(M)$ эти точки в каждом слое задают различные вектора, так как начала этих векторов различны.

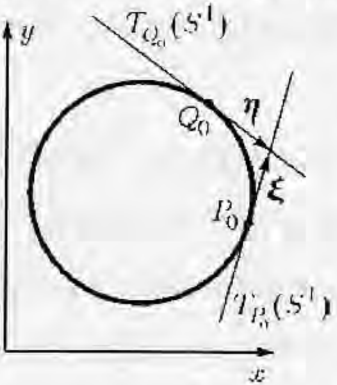


Рис. 3

Рассмотрим следующий пример: окружность $S^1 \subset \mathbf{R}^2$. На рис. 3 показаны две касательных к окружности в точках P_0 и Q_0 и два касательных вектора $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\mu}$, имеющие общий конец. Поэтому, для того чтобы изобразить касательное расслоение $T(S^1)$ в виде топологического пространства, расположенного в евклидовом пространстве, необходимо перейти в трехмерное пространство $\mathbf{R}^3$ и «повернуть» касательные к окружности на некоторый угол по отношению к плоскости (x, y) так, чтобы они перестали пересекаться. Тогда касательное расслоение $T(S^1)$ превратится в однополостный гиперболоид.

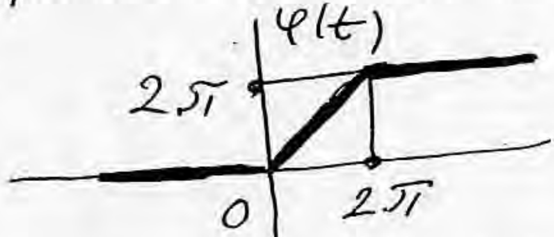
• Теор. (Уитни). Любое гладкое связное многообразие, заданное с помощью гладкого атласа (т.е. "абстрактно") допускает гладкое вложение в некоторое конечном. $\mathbb{R}^N$, $N<\infty$ (т.е. реализ. как гладк. поверхн. в $\mathbb{R}^N$).

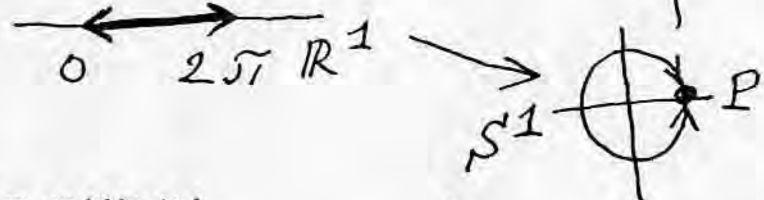
• Д-во. Докажем для компактного M^n (для простоты).
Сначала — технич. лемма.

Пусть $D^n \subset \mathbb{R}^n$ — станд. шар (диск) открытый. $\exists$ гладк. отображ. $h: \mathbb{R}^n \to S^n$, при котором $h: D^n \to S^n \setminus P$ является диффеом. (где P — точка, напр. северн. полюс сферы); а $h: \mathbb{R}^n \setminus D^n \to P$, т.е. все дополн. к шару отобр. в точку P.

Д-во. Пусть $n=1$. Строим $h: \mathbb{R}^1 \to S^1$. Сначала:

$$g: \begin{cases} x = \cos\varphi(t) \\ y = \sin\varphi(t) \end{cases} \quad \text{где:}$$

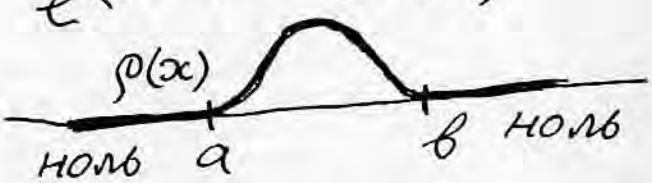


g:


но g не гладко в точках 0 и 2π. здесь излом. надо сгладить.

напомним:

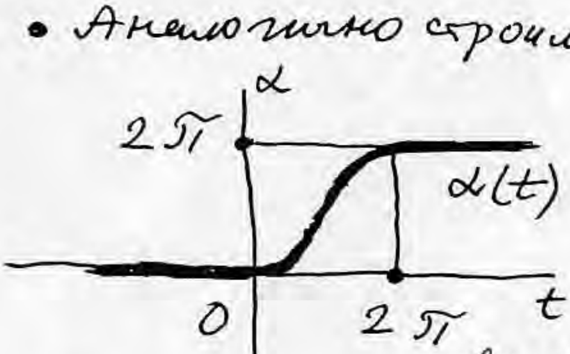
$$e^{\left(-\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{1}{(x-b)^2}\right)}$$



$$\lambda(x) = \int_0^x \rho(x)\,dx \ :$$

гладкая фун-я, "склеивает" две постоянные.

• Аналогично строим гладкую функцию $\alpha(t)$:



Тогда искомое $h: \mathbb{R}^1 \to S^1$ имеет вид:

$$h: \begin{cases} x = \cos\alpha(t) \\ y = \sin\alpha(t) \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

• Лемма доказана. Аналогично доказывается для произвольного n.

• В силу компактности M^n можно взять его <u>конечное</u> открытое покрытие: $M^n = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, где A_i гомеом. D^n.

• Для $\forall A_i$ строим гладкое отобр. $h_i : M^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $h_i : A_i \to D^n$ явл. диффеоморфизмом, а все дополнение в M к A_i отображ. в северн. полюс P сферы S^n:

$h_i : M^n \setminus A_i \to P \in S^n$.

• каждое h_i можно задать как вектор-ф-ю в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$h_i(x) = (y_i^1(x), \dots, y_i^{n+1}(x))$, где y^i – декарт. к-ты в $\mathbb{R}^{n+1}$.

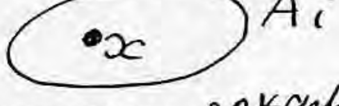
• Теперь строим окончательное $h : M^n \to \mathbb{R}^N$:

$h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x)) \in \mathbb{R}^{k(n+1)}$, т.е. $N = k(n+1)$.

• <u>Утв.</u> Отобр. h явл. погружением M^n в $\mathbb{R}^N$.

<u>Д-во.</u> Матр. Якоби (дифференциал) dh имеет вид: $dh = (dh_1, \dots, dh_k)$, где $dh_i(x)$ – матр. Якоби h_i.

Тогда ранг $dh(x) = n$ ($= \max$), т.к. точка x попадает в какую-то карту A_i:

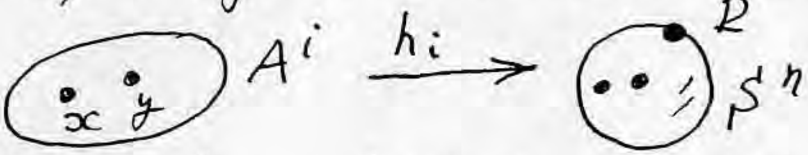


а тогда $h_i : x \to S^n \setminus P$ и явл. диффеом. локально около x, а тогда ранг $dh_i(x) = n$, а тогда и ранг $dh(x) = n$, т.к. $dh_i(x)$ – это "часть" матрицы $dh(x)$.

т.е. h – вложение.

• <u>Утв.</u> Если $x \neq y$, то $h(x) \neq h(y)$, т.е. h – вложение.

а) x и y "близки", т.е. попали в одну карту A_i:



$h(x) = (\dots\dots h_i(x) \dots\dots)$ Но: $h_i(x) \neq h_i(y)$, т.к.

$h(y) = (\dots\dots h_i(y) \dots\dots)$ обе эти точки $\in S^n \setminus P$, где h_i – диффеом.

б) точки x и y "далеки", т.е. $\exists$ карта A_i, так что: $x \in A_i$, $y \notin A_i$, т.е. $y \in M \setminus A_i$. Тогда:

$h(x) = (\dots\dots h_i(x) \dots\dots)$ Здесь $h_i(x) \neq P$, т.к.

$h(y) = (\dots\dots P \dots\dots)$ $h_i(x) \in S^n \setminus P$.

Теорема Уитни доказана.