ЛЕКЦИЯ 7.

Ранее мы определили гладкие многообразия. Было два определения: как поверхности в евклидовом пространстве и как многообразия, заданные с помощью гладкого атласа. При этом, мы определили многообразия БЕЗ КРАЯ, т.е. БЕЗ ГРАНИЦЫ. Это значит, что у каждой точки такого многообразия существует открытая окрестность, гомеоморфная открытому диску (шару). Такие многообразия называются ЗАМКНУТЫМИ (нет границы).

Определим теперь многообразия с краем.

Для этого рассмотрим замкнутое n-мерное многообразие W^n и на нем гладкую функцию f(x). Далее рассмотрим «поверхность уровня», задаваемую уравнением f(x) = 0 и предположим, что на этой «поверхности», в каждой ее точке отличен от нуля градиент функции, то есть

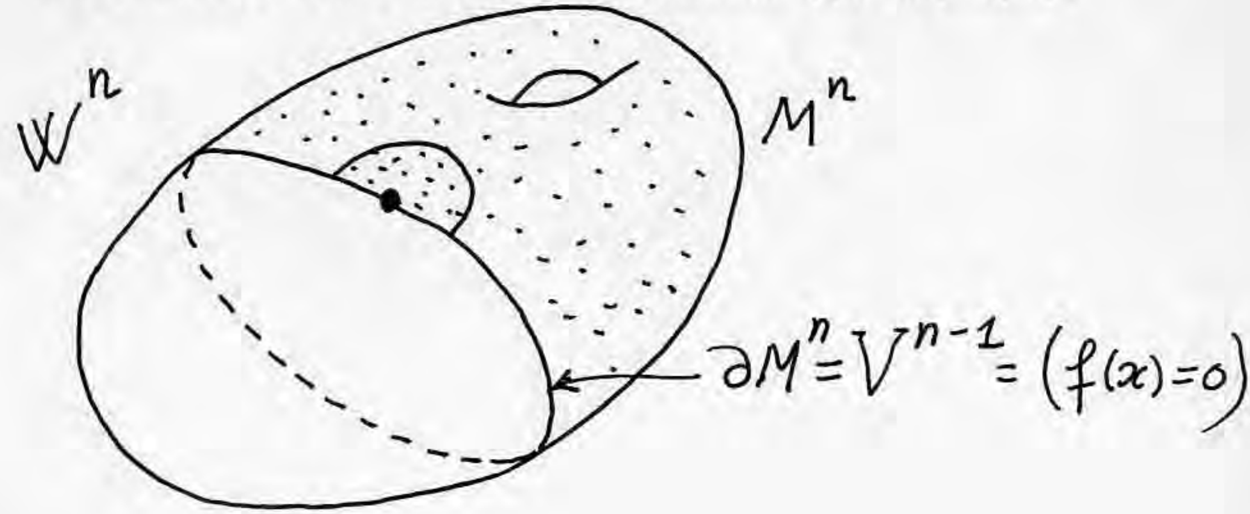
$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявных функциях (курс мат-анализа) множество уровня (x: f(x) = 0) является гладким многообразием размерности (n-1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразием M с краем (границей) назовем множество (x: f(x) $\geqslant$ 0). При этом краем (границей) ∂M многообразия называется (n-1)-мерное многообразие

$$\partial M = \{x : f(x) = 0\}$$

Как мы уже говорили, каждая граничная точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную «половине диска (шара)»



ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ.

1. Евклидово n-мерное пространство является гладким многообразием. Его можно покрыть одной картой. В этом случае атлас состоит из одной карты.
2. График гладкой функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ в $\mathbb{R}^n$. Постройте атлас на этом графике. Он является (n-1)-мерным многообразием (и подмногообразием в $\mathbb{R}^n$).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЯХ.

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа. Поэтому доказывать ее я не буду, а поясню геометрический смыл этой важной теоремы.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и в нем систему уравнений

$$\begin{cases} g_1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}$$

где ранг матрицы Якоби максимально возможен, то есть равен к:

$$\text{ранг}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \text{ранг}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^\alpha}\right) = k = \max$$

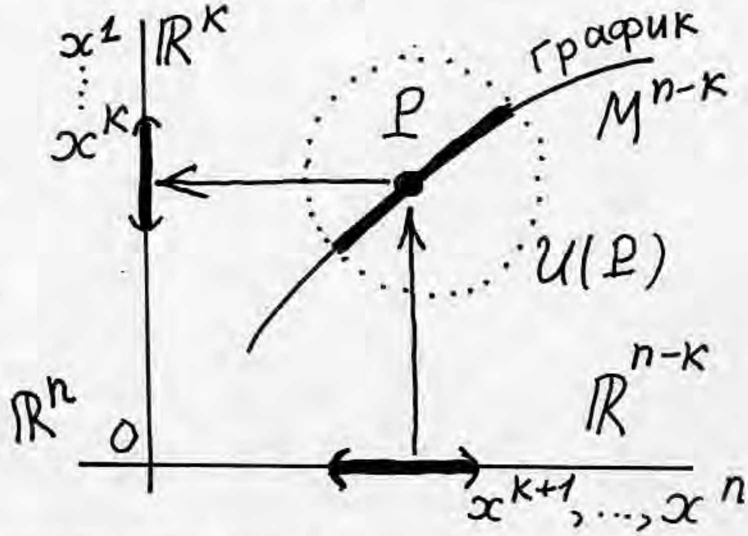
Рассмотрим множество совместного уровня всех этих уравнений:

$$M^{n-k} = \begin{cases} g_1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Тогда, согласно теореме о неявных функциях, это подмножество является гладким (n-k)-мерным многообразием (и подмногообразием в $\mathbb{R}^n$).

Пусть P – произвольная точка на множестве $M^{n-k}=\{g_i=0\}$.
Тогда по теореме о неявных функциях существует открытая окрестность U(P) этой точки, что в этой окрестности система уравнений (*) имеет единственное и гладкое решение, то есть существуют гладкие функции $f_1, \ldots, f_k$ такие, что

$$\begin{cases} x^1 = f_1(x^{k+1}, \ldots, x^n) \\ \vdots \\ x^k = f_k(x^{k+1}, \ldots, x^n) \end{cases}$$



Эти функции задают (в этой окрестности) график отображения, определяющий часть многообразия M^{n-k}, попавшего внутрь окрестности U(P), см. рисунок.

Напомним полезное утверждение.

ЛЕММА. Если в некоторой точке градиент гладкой функции f(x) в отличен от нуля, то он, рассматриваемый как вектор в $\mathbb{R}^n$, ортогонален поверхности уровня f(x) = 0 (в некоторой окрестности этой точки).

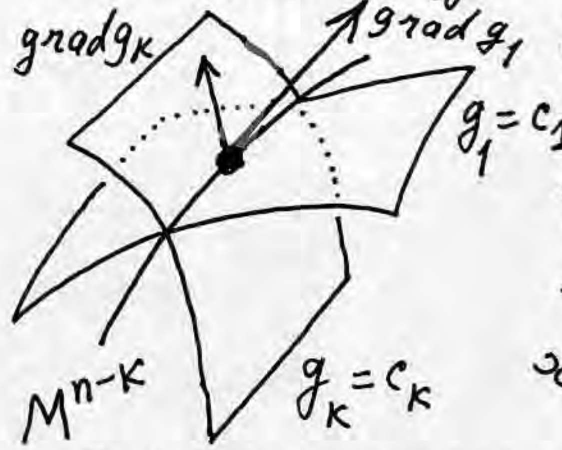
Доказательство. Пусть a - произвольный вектор, касающийся поверхности f(x) = 0 а точке x , и x(t) - гладкая кривая, выходящая из точки x, целиком лежащая в поверхности $f(x)=0$ и касающаяся вектора a в момент времени t=0 (при этом x(0) = x). Тогда: $f(x(t)) \equiv 0$ и:

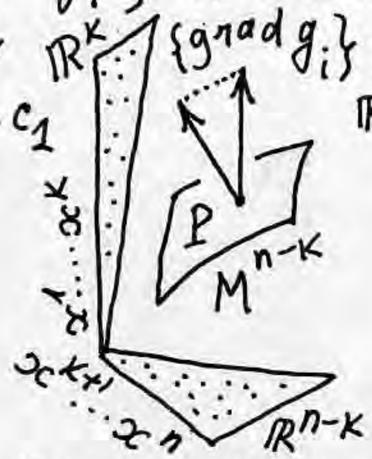
$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \cdot a^\alpha$$

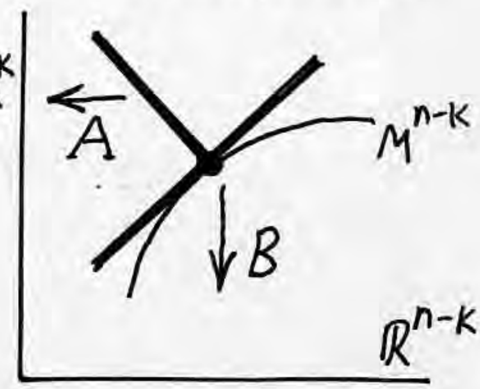
Следовательно, вектор gradf ортогонален всем векторам, касающихся поверхности в данной точке, то есть ортогонален касательной плоскости к поверхности. Что и требовалось.

Если же мы рассмотрим совместную поверхность уровня

M^{n-k}, задаваемую системой уравнений (*), то в каждой ее точке все градиенты $\{\operatorname{grad} g_i\}$ ортогональны этой поверхности.







Таким образом, в точке P мы обнаруживаем две плоскости: (n-k)-мерная плоскость касается поверхности M^{n-k}(графика отображения), а вторая плоскость имеет размерность к и ортогональна первой плоскости. Причем плоскость, ортогональная поверхности M^{n-k}, является линейной оболочкой к градиентов $\operatorname{grad} g_i$. Все они линейно независимы, по условию. Рассмотрим две проекции. Одна A проектирует плоскость, натянутую на градиенты, на координатную плоскость $\mathbb{R}^k(x^1, \ldots, x^k)$, а вторая проекция B проектирует касательную плоскость к поверхности M^{n-k} на координатную плоскость $\mathbb{R}^{n-k}(x^{k+1}, \ldots, x^n)$.

ЛЕММА. Проекция A является линейным изоморфизмом плоскостей $\{\operatorname{grad} g_i\}$ и $\mathbb{R}^k(x^1, \ldots, x^k)$, а проекция B является линейным изоморфизмом касательной плоскости к поверхности M^{n-k} и координатной плоскости $\mathbb{R}^{n-k}(x^{k+1} \ldots x^n)$.

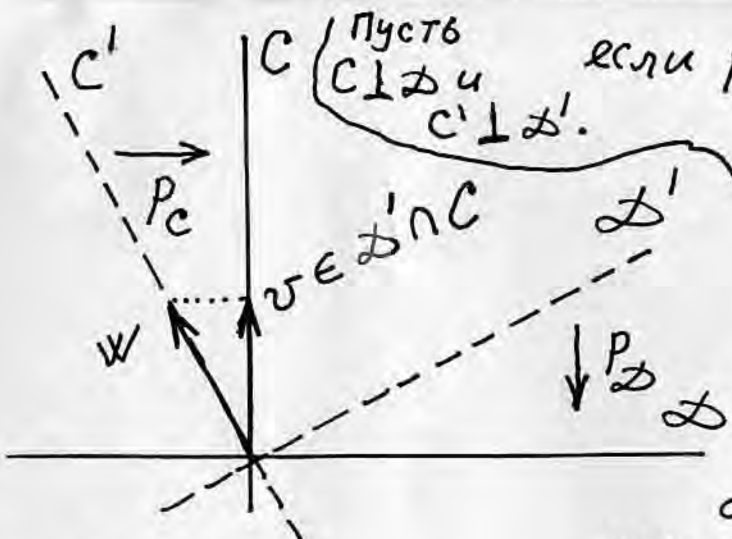
Доказательство. Рассмотрим более подробно матрицу Якоби исходной системы уравнений:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x^k} & \frac{\partial g_1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x^k} & \frac{\partial g_k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x^n} \end{array}\right) \begin{array}{l} = \operatorname{grad} g_1 \\ \vdots \\ = \operatorname{grad} g_k \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{ранг} = k} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\downarrow \ \text{при проекции} \\ 0 \ \ A \text{ на } \mathbb{R}^k(x^1 \ldots x^k)}}$$

Можно считать без ограничения общности, что ранг к матрицы Якоби достигается на первых к координатах $x^1, \ldots, x^k$. В противном случае всегда можно перенумеровать координаты. При проекции А градиентов $\{\operatorname{grad} g_i\}$ на плоскость $\mathbb{R}^k(x^1 \ldots x^k)$ их координаты $\left(\partial g_i/\partial x^{k+1} \ldots\ldots \partial g_i/\partial x^n\right)$ переходят в 0. Следовательно, плоскость, натянутая на градиенты, проектируется изоморфно на плоскость $\mathbb{R}^k(x^1, \ldots, x^k)$. Но тогда и ортогональная ей плоскость, касающаяся поверхности M^{n-k}, проектируется при отображении В изоморфно на плоскость $\mathbb{R}^{n-k}(x^{k+1} \ldots x^n)$. Это простой факт из линейной алгебры. Его доказательство оставляем читателю в качестве упражнения (краткую схему доказательства мы приводим ниже, на рисунке). Лемма доказана.

Тем самым мы вводим гладкий атлас на поверхности M^{n-k}, представили ее в виде графика гладкого отображения. В этом и состоит геометрический смысл теоремы о неявных функциях.



Пусть $C \perp \mathcal{D}$ и $C' \perp \mathcal{D}'$.

если $P_C \simeq$ изоморфизм, то $P_{\mathcal{D}}$ — тоже изоморфизм.

Здесь $C \oplus \mathcal{D} \simeq C' \oplus \mathcal{D}' \simeq \mathbb{R}^n$.

Доп. противное: пусть $\exists\ 0 \neq \operatorname{Ker} P_{\mathcal{D}}$, т.е. в-р $v \in C$ и $v \neq 0$. Тогда $\exists\ w \in C' : P_C w = v$, отсюда $\langle w, v\rangle = \langle v, v\rangle$, так как $w = v + z$, где $z \in \mathcal{D}$ и $\langle z, v\rangle = 0$. Итак: $\langle w, v\rangle = \langle v, v\rangle > 0$. Но $w \in C'$ и $v \in \mathcal{D}'$, $v \neq 0$, т.е. C' и $\mathcal{D}'$ — не ортогональны. Противоречие.

$P_C : C' \xrightarrow[\approx]{} C$

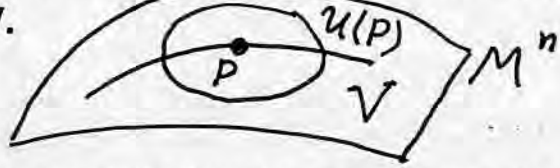
тогда и

$P_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}' \xrightarrow[\approx]{} \mathcal{D}$

тоже изоморфизм.

ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ПОДМНООГООБРАЗИЙ.

Первое определение. Рассмотрим гладкое многообразие M^n и его подмножество V.



Оно называется (n-k)-мерным гладким подмногообразием в M^n, если для каждой точки P из V существует открытая окрестность U(P) в M и гладкие функции $g_1(x), \ldots, g_k(x)$ в окрестности $U(x^1, \ldots, x^n)$ такие, что

$$V \cap U(P) = \{g_1(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0\} \text{ и ранг}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^\alpha}\right) = k.$$

Другими словами, часть V, попавшая в окрестность U(P) может быть задана как совместная поверхность уровня гладких функций с указанным условием на ранг матрицы Якобы этой системы уравнений. Здесь $x^1 \ldots x^n$ - некоторые локальные регулярные координаты в окрестности U(P).

Второе определение. Подмножество V в гладком многообразии M называется гладким (n-k)-мерным подмногообразием, если для любой его точки P найдется открытая окрестность U(P), а в этой окрестности такие регулярные гладкие координаты $x^1, \ldots, x^n$, что $V \cap U(P) = \{x^1 = \ldots = x^k = 0\}$.

То есть часть V, попавшая в окрестность U(P), задается как совместная поверхность уровня k этих локальных координат.

ТЕОРЕМА. Эти два определения эквивалентны.

Доказательство. Из определения 2 очевидно следует определение 1. В самом деле, за искомые функции $g_i(x)$ достаточно взять первые k координат $x^1, \ldots, x^k$, уже заданные в окрестности U(P).

Обратно. Выведем определение 2 из определения 1. Нам уже даны функции $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, функционально независимые в окрестности U(P). Требуется дополнить этот набор еще n-k гладкими функциями $g_{k+1}, \ldots, g_n$, чтобы получившийся полный набор задавал регулярную локальную систему координат. Можем считать, что окрестность U(P) совмещена с открытым диском в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, поскольку объемлющее многообразие M^n является гладким и на нем заданы локальные гладкие координаты, отождествляющие окрестность U(P) с евклидовым шаром. Рассмотрим векторы $\operatorname{grad} g_1, \ldots, \operatorname{grad} g_k$, то есть градиенты заданных нам функций $g_1, \ldots, g_k$. Градиенты линейно независимы (ввиду условия на ранг матрицы Якоби), а потому на них натягивается k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим (n-k)-мерную плоскость, ортогональную плоскости градиентов и пусть векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ образуют базис, то есть все они линейно независимы. Для каждого из них очевидно существует линейная функция a_α такая, что $e_\alpha = \operatorname{grad} a_\alpha$.

Рассмотрим набор функций $g_1(x) \ldots g_k(x), a_{k+1}(x) \ldots a_n(x)$.

Поскольку их градиенты линейно независимы, то ранг этой системы функций равен n, а следовательно они образуют регулярную локальную систему координат в заданной окрестности. Теорема доказана.