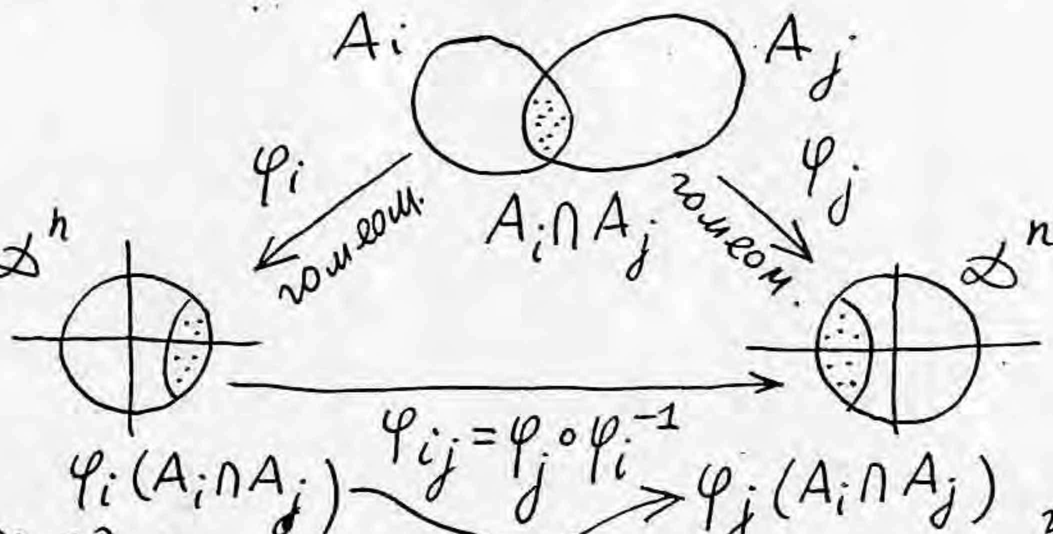
Лекция 6

- Абстрактное опред. топологического и гладкого многоб. при помощи атласа. Без вложения в $\mathbb{R}^N$.

- <u>Опред</u>. Тополог. хаусдорфово пр-во X назыв. тополог. многообразием, если $X=\bigcup_i A_i$, где все A_i открыты в X и для каждого i задан гомеоморф. $\varphi_i : A_i \to D^n$, где D^n — диск (шар) в $\mathbb{R}^n$; n — одно и то же для всех i и назыв. размерностью X, $n=\dim X$.

• A_i назыв. локал. картами, φ_i – локал. координаты, а совокупность $\{(A_i, \varphi_i)\}$ – это атлас на X.

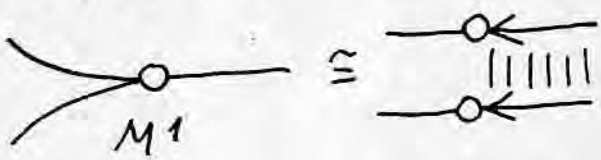
• Функции склейки или функции перехода данного атласа:



φ_{ij} – гомеом. как композиция гомеоморфизмов.

• <u>Опред.</u> $\{\varphi_{ij}\}$ назыв. функциями перехода (склейки) данного атласа.

• пример нехаусдорфова мног.



• <u>Опред.</u> Тополог. мног. назыв. гладким, если все функции перехода атласа явл. гладкими (C^∞). Аналогично определ. многообразия класса C^r, веществ.-аналит., компл.-аналит. (в терминах φ_{ij}).

• <u>Теор.</u> (без д-ва). Существуют тополог., но не гладкие мног. т.е. такие, на которых нельзя задать гладкого атласа.

• <u>Теор.</u> (без д-ва). $\exists$ гладкие мног-я, гомеоморфные, но не диффеоморфные. Пример: станд. сфера S^7 и мног. $M^7_k \subset S^9$, которое задается так. $\mathbb{C}^5 = \mathbb{R}^{10} \supset S^9 = (|z_1|^2 + \ldots + |z_5|^2 = 1)$. Рассм. M^7_k как пересечение сферы S^9 с поверхностью: $\{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0\}$. Здесь $k = 1, 2, \ldots, 28$. Получаются 28 гладких мног., среди которых есть и станд. сфера S^7. Все остальные 27 глад. мног. ей гомеоморфны, но не диффеоморфны (сферы Милнора).

Гладкие многообразия (примеры)

87

1. Теория кривых на плоскости и в трехмерном пространстве

1.1. Теория кривых на плоскости. Формулы Френе

Мы будем рассматривать евклидову плоскость $\mathbf{R}^2$, отнесенную к декартовым координатам (x, y). Гладкие кривые $\gamma(t)$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ будем задавать с помощью двух функций: $x(t), y(t)$, т. е. будем рассматривать радиус-вектор $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ гладкой кривой $\gamma(t)$, выходящий из начала координат — точки O. Напомним, что вектором скорости $\mathbf{v}(t)$ кривой $\gamma(t)$ в точке t называется вектор с координатами $\left(\dfrac{dx(t)}{dt}, \dfrac{dy(t)}{dt}\right)$. Определяемая этим вектором прямая является касательной к кривой в точке $\gamma(t)$. При этом, конечно, предполагаем, что $\mathbf{v}(t) \neq 0$. Это предположение мы будем на протяжении этого параграфа считать выполненным (напомним, что в тех точках, в которых вектор скорости обращается в ноль, гладкая кривая может претерпевать излом; примеры были приведены в гл. 1). Производную радиус-вектора будем иногда обозначать так:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$

Через $\left|\dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right| = |\mathbf{v}(t)|$ будем обозначать модуль вектора скорости (в евклидовой метрике). Пусть s обозначает длину дуги кривой от некоторой фиксированной точки до переменной точки на кривой; тогда (в силу монотонного возрастания длины дуги по мере движения точки в одном направлении по кривой) длину дуги можно взять за параметр вдоль кривой. Этот параметр называется *натуральным параметром*; уравнение кривой $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$, записанной в виде вектор-функции от параметра s, называется *натуральной параметризацией кривой*.

Лемма 1. *Модуль вектора скорости кривой, записанной в натуральном параметре, постоянен и равен единице.*

Доказательство. Так как для длины дуги мы имеем формулу: $l = \int\limits_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right| dt$, то в каждой точке выполнено тождество: $dl = dt\left|\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|$. □ (88)

Таким образом, можно считать, что по кривой, отнесенной к натуральному параметру, движение происходит с постоянной скоростью (постоянным является только модуль вектора скорости, но не его направление).

Следствие 1. *В каждой точке кривой вектор скорости* $\mathbf{v}(s)$ *отличен от нуля.*

Мы использовали тот факт, что для исходного параметра t было выполнено соотношение $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \neq 0$. Этот вектор ортогонален вектору скорости, что вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть задана вектор-функция* $\mathbf{p}(t)$ *такая, что* $|\mathbf{p}(t)| \equiv 1$. *Тогда вектор* $\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}$ *ортогонален вектору* $\mathbf{p}(t)$ *(при любом* t *таком, что* $\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \neq 0$*).*

Доказательство. Из условия следует, что $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle \equiv 1$. Дифференцируя это тождество по параметру t, получаем:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \mathbf{p}\right\rangle + \left\langle \mathbf{p}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right\rangle \equiv 0, \text{ т. е. } \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \mathbf{p}\right\rangle \equiv 0.$$ □

Итак, в каждой точке гладкой кривой $\gamma(s)$, отнесенной к натуральному параметру, естественно возникают два ортогональных друг другу вектора, один — вектор скорости, другой — вектор ускорения. Этот вектор уже не обязан иметь длину, равную единице. Удобно рассмотреть единичный вектор $\mathbf{n}(s) = \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} \Big/ \left|\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds}\right|$. Тем самым при изменении параметра s мы получаем вдоль кривой гладкое реперное поле, т. е. семейство двумерных реперов вида: $(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$. Вектор $\mathbf{n}(s)$ называется *вектором нормали* к кривой в точке s. Каждый репер, после его параллельного переноса в начало координат, однозначно определяет некоторое вращение плоскости вокруг точки O; тем самым реперное поле вдоль кривой определяет гладкое отображение $\gamma(s)$ в группу ортогональных матриц, т. е. в группу вращений плоскости. Иными словами, можно считать, что каждая кривая $\gamma(s)$ порождает некоторую гладкую кривую, точками которой являются ортогональные матрицы (2×2). Мы изучим свойства этой кривой сразу в многомерном случае, т. е. для случая гладкой кривой, расположенной в многомерном евклидовом пространстве (об этом — ниже). 89

Определение 1. Пусть гладкая кривая отнесена к натуральному параметру. *Кривизной кривой* в точке s называется величина $k(s) = \left|\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}\right|$.

Поскольку кривизна (по определению) является модулем вектора ускорения, то $\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = k(s)\mathbf{n}(s)$, где $\mathbf{n}(s)$ — вектор нормали к кривой в точке s, а

$$k(s) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — единичные ортогональные векторы, задающие декартовы координаты на плоскости $\mathbf{R}^2(x, y)$, то вектор нормали можно записать в явном виде так:

$$\mathbf{n}(s) = \left(\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{e}_2\right).$$

Определение 2. *Радиусом кривизны* гладкой кривой в точке s называется число $R(s) = 1/k(s)$.

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим те простые примеры кривых, которые обосновывают выбор терминов: «кривизна» и «радиус кривизны». Простейшая кривая на плоскости — это прямая, заданная параметрически в виде линейной вектор-функции: $x(s) = x(0) + \alpha s$; $y(s) = y(0) + \beta s$, где s — натуральный параметр. Это накладывает ограничения на выбор чисел α, β: ясно, что должно быть выполнено равенство $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$, так как $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ и $|\mathbf{v}(s)| \equiv 1$. Тогда вектор ускорения $\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds}$ равен нулю тождественно, а потому кривизна прямой линии также равна нулю. Соответственно, радиус кривизны прямой линии равен бесконечности.

Рассмотрим на плоскости окружность радиуса R. Параметрические уравнения окружности имеют вид:

$$x(s) = x(0) + R\cos\left(\frac{s}{R}\right), \quad y(s) = y(0) + R\sin\left(\frac{s}{R}\right).$$

Параметр s изменяется от 0 до $2\pi R$. Вектор скорости

$$\mathbf{v}(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right);\quad \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

Следовательно,
$$\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} = \left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right); \quad -\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$
90

Таким образом, кривизна окружности постоянна и равна $\frac{1}{R}$, а радиус кривизны равен $\frac{1}{k} = R$.

Однако при решении многих конкретных задач оказывается, что уравнения кривой отнесены не к натуральному параметру, а к какому-то произвольному параметру t, а потому полезно уметь вычислять кривизну кривой, отнесенной к произвольному параметру.

Теорема 1. *Пусть гладкая кривая $\gamma(t)$ отнесена к некоторому параметру t, не обязательно натуральному. Пусть в точке t вектор скорости $\mathbf{v}(t)$ отличен от нуля. Тогда имеет место формула:*
$$k(s) = \left|\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}\right| = \frac{|x''y' - y''x'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}},$$
где через $x', x'', \ldots$ обозначены производные по параметру t.

Доказательство. Пусть $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ — параметрическое задание $\gamma(t)$, $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ — вектор скорости; если s — натуральный параметр, то для произвольной вектор-функции $\mathbf{q}(t)$ имеем:
$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}(t) = \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}.$$
В качестве $\mathbf{q}$ возьмем
$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}(t)/|\mathbf{v}(t)| = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}.$$
Из определения кривизны получаем:
$$k = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\right| = \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\right)\right|.$$
Далее:
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\right) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\right).$$
Найдем $\frac{dt}{ds}$. Так как $ds = \left|\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right| dt$, то
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left|\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|} = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|}.$$

Отсюда:

$$k = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|^2}\left(\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} - \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}\frac{d}{dt}|\mathbf{v}(t)|\right) =$$
$$= \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}\left(\mathbf{r}'' - \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}\frac{d}{dt}|\mathbf{r}'|\right) = \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}\left(\mathbf{r}'' - \frac{\mathbf{r}'}{2|\mathbf{r}'|^2}\frac{d}{dt}|\mathbf{r}'|^2\right).$$

91

Так как

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}'|^2 = \frac{d}{dt}\langle\mathbf{r}', \mathbf{r}'\rangle = 2\langle\mathbf{r}', \mathbf{r}''\rangle$$

то

$$k = \left|\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}\right| = \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}\left|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'\frac{\langle\mathbf{r}', \mathbf{r}''\rangle}{|\mathbf{r}'|^2}\right|.$$

Более подробно:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}\left(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'\frac{\langle\mathbf{r}', \mathbf{r}''\rangle}{|\mathbf{r}'|^2}\right) = \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}\left(x'' - x'\frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2}\right)\mathbf{e}_1 +$$
$$+ \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}\left(y'' - y'\frac{x'x'' + y'y''}{(x')^2 + (y')^2}\right)\mathbf{e}_2 =$$
$$= \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}\left(\frac{x''(y')^2 - x'y'y''}{(x')^2 + (y')^2}\right)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2}\left(\frac{y''(x')^2 - y'x'x''}{(x')^2 + (y')^2}\right)\mathbf{e}_2.$$

Отсюда:

$$k^2 = ((x')^2 + (y')^2)^{-4}((y')^2(x''y' - y''x')^2 + (x')^2(y''x' - x''y')^2) =$$
$$= \frac{(x''y' - y''x')^2}{((x')^2 + (y')^2)^3}.$$

Итак:

$$k = \frac{|(x''y' - y''x')|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

□

Вернемся к изучению движения репера $(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$ при изменении параметра s. Оказывается, что производные от векторов репера удовлетворяют простым соотношениям, называемым «формулами Френе».

Теорема 2. *Если гладкая кривая отнесена к натуральному параметру, то выполнены равенства:*

$$\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s), \quad \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = -k(s)\mathbf{v}(s).$$

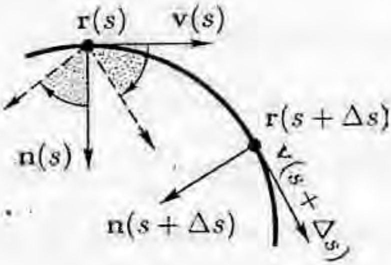


Рис. 1

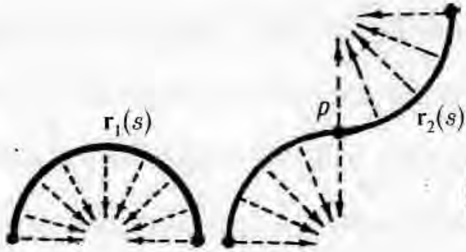


Рис. 2

92

Доказательство. Первая формула Френе непосредственно следует из определения кривизны $k(s)$. Осталось проверить вторую формулу. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{n}(s)$; в силу определения имеем: $\langle \mathbf{n}(s)\,,\mathbf{n}(s)\rangle = 1$. В силу леммы 2 имеем:

$$\left\langle \mathbf{n}(s)\,, \frac{d}{ds}\mathbf{n}(s) \right\rangle = 0, \text{ т. е. } \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = \lambda(s)\mathbf{v}(s)\,,$$

где $\lambda(s)$ — некоторая гладкая функция от s. Найдем эту функцию. Продифференцируем по s тождество: $\langle \mathbf{v}\,,\mathbf{n}\rangle = 0$. Получим:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{v}}{ds}\,,\mathbf{n} \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}\,, \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right\rangle = 0,$$

откуда $k\langle \mathbf{n},\mathbf{n}\rangle + \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}\rangle = 0$, т. е. $k = -\lambda$. □

Векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ могут быть организованы в столбец; тогда формулы Френе принимают вид:

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{v}/ds \\ d\mathbf{n}/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

— кососимметрическая матрица. Этому соотношению можно придать прозрачный геометрический смысл. Рассмотрим в точке s репер $\omega(s) = (\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$ и сместимся по кривой $\mathbf{r}(s)$ из точки s в бесконечно близкую точку $s + \Delta s$. Перенеся параллельно репер $\omega(s+\Delta s)$ в точку s, получим в точке s два репера: $\omega(s)$ и $\omega(s+\Delta s)$, причем $\omega(s+\Delta s)$ получается из репера $\omega(s)$ поворотом на бесконечно малый угол $\Delta\varphi$. Следовательно, можно считать, что реперы $\omega(s+\Delta s)$, $\omega(s)$ связаны ортогональным преобразованием: $\omega(s+\Delta s) = A(\Delta s)\omega(s)$, где

$$A(\Delta s) = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi \\ -\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{pmatrix}.$$

Разлагая функции $\cos\Delta\varphi$, $\sin\Delta\varphi$ в ряды по малому приращению $\Delta\varphi$ и пренебрегая членами второго порядка малости по $\Delta\varphi$, получаем:

$$A(\Delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta\varphi \\ -\Delta\varphi & 0 \end{pmatrix} + \ldots\,,$$

т. е.

$$\omega(s+\Delta s) = \omega(s) + \begin{pmatrix} 0 & \Delta\varphi \\ -\Delta\varphi & 0 \end{pmatrix} \omega(s) + \ldots ,$$

т. е.

$$\frac{d}{ds}\omega(s) = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{1}{\Delta s} \begin{pmatrix} 0 & \Delta\varphi \\ -\Delta\varphi & 0 \end{pmatrix} \omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{d\varphi(s)}{ds} \\ -\dfrac{d\varphi(s)}{ds} & 0 \end{pmatrix} \omega(s),$$

где $\varphi(s)$ — угол поворота репера $\omega(s)$ относительно какого-то фиксированного репера на плоскости (скажем, относительно репера $\omega(0)$). В то же время, из формул Френе следует, что $\dfrac{d}{ds}\omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \omega(s)$. Сравнивая полученные матрицы, видим, что $k(s) = d\varphi(s)/ds$. Таким образом, кривизна кривой в точке s может быть интерпретирована как скорость изменения угла $\varphi(s)$ в этой точке. В случае плоской кривой задание функции $k(s)$ полностью определяет кривую, если только $k \neq 0$ для всех s. Более точно, имеет место

Теорема 3. *Пусть задана гладкая функция $k(s)$, не обращающаяся в ноль для всех s таких, что $a \leqslant s \leqslant b$. Тогда на плоскости существует гладкая кривая $\mathbf{r}(s)$, определяемая однозначно с точностью до параллельного переноса и ортогонального преобразования, для которой $k(s)$ является кривизной, а s — натуральным параметром.*

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{v}(s)/ds \\ d\mathbf{n}(s)/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix},$$

где $k(s)$ — заданная функция. Так как $k(s) \neq 0$, то по теореме существования и единственности из теории дифференциальных уравнений, эта система имеет (единственное, при фиксированных начальных данных) решение, гладко продолжающееся на весь интервал $a < s < b$. Далее, мы уже доказали, что $\dot{\varphi}(s) = k(s)$, а потому $\varphi(s) = \int\limits_0^s k(t)dt$. Фиксировав на кривой произвольную точку и полагая в ней $s = 0$ (т. е. отсчитывая длину s дуги от этой точки), получаем

$$\omega(s) = A(s)\omega(o), \text{ т. е.}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(o) \\ \mathbf{n}(o) \end{pmatrix}. \text{ Отсюда}$$

$$\mathbf{v}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s) = \cos\varphi(s)\mathbf{v}(o) + \sin\varphi(s)\mathbf{n}(o), \text{ откуда}$$

$$\mathbf{r}(s) = \left(\int\limits_0^s \cos\varphi(u)du\right)\mathbf{v}(o) + \left(\int\limits_0^s \sin\varphi(u)du\right)\mathbf{n}(o) + \mathbf{r}(\mathrm{o}), \text{ где}$$

$$\varphi(u) = \int\limits_0^u k(t)dt.$$

Так как любые два начальных данных могут быть совмещены на плоскости параллельным переносом и ортогональным преобразованием, то, следовательно, однозначно определенное решение фиксируется с точностью до преобразований указанного типа. □

Следует обсудить роль условия: $k(s) \neq 0$. На рис. 2 и рис. 3 приведены две кривые на плоскости, имеющие совпадающие гладкие функции $k(s)$, но, очевидно, не переводимые друг в друга параллельными переносами и ортогональными преобразованиями. Различный характер поведения этих кривых особенно отчетливо проявляется при рассмотрении вектор-функции нормали $\mathbf{n}(s)$. Итак, можно добиться того, чтобы обе кривые, имеющие совпадающие кривизны, были неконгруэнтны и гладки. Понятно, как надо поступать. Рассмотрим произвольную гладкую кривую, функция кривизны которой является гладкой и в некоторой точке $s = s_0$ обращается в ноль вместе со всеми своими производными всех порядков. Существование таких кривых вытекает из теоремы 3, примененной к гладкой функции $k(s)$, имеющей ноль бесконечного порядка в одной из концевых точек: a или b, где $a \leqslant s \leqslant b$. Тогда, сопрягая две такие кривые в их общей концевой точке, в которой функции кривизны обращаются в ноль вместе со всеми своими производными, мы и получаем две гладкие кривые, имеющие совпадающие функции кривизны, но не конгруэнтные (см. рис. 3). Однако, картина меняется, если мы рассмотрим вдоль кривой гладкое поле единичных нормалей, не обращая внимания на выпуклость или вогнутость отдельных ее участков. Для этого фиксируем нормаль в какой-то точке кривой и продолжим ее до гладкого поля нормалей вдоль всей кривой. При этом мы разрешим кривизне обращаться в ноль и менять знак. То есть кривизна будет, например, положительна на выпуклых участках кривой и отрица-

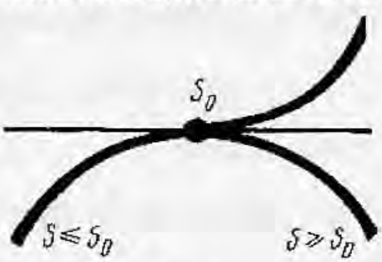


Рис. 3

тельна на вогнутых. В таком случае теорема о восстановлении кривой по ее кривизне (с точностью до параллельного переноса и ортогонального преобразования) становится верной и для тех случаев, когда кривизна может обращаться к ноль и менять свой знак. Задание кривой с помощью кривизны называется натуральным уравнением кривой.

1.2. Теория пространственных кривых. Формулы Френе

Рассмотрим теперь гладкую кривую $\mathbf{r}(t)$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, отнесенном к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$, т. е. $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Оказывается, что, как и в плоском случае, с каждой точкой кривой $\mathbf{r}(s)$ можно однозначно связать некоторый репер, который будет гладко меняться вдоль кривой при изменении натурального параметра s. Прежде чем переходить к построению этого репера, который мы назовем *репером Френе*, по аналогии с плоским случаем, докажем вспомогательное утверждение о дифференцировании матричных функций.

Рассмотрим гладкую кривую в линейном пространстве матриц, т. е. однопараметрическое семейство $A(t)$, где параметр t изменяется на интервале $-a < t < a$, а $A(t)$ — матрица $(n\times n)$, коэффициенты которой суть гладкие функции по t. Предположим, что все матрицы $A(t)$ (при всех t) являются ортогональными матрицами с определителем $+1$, а также, что $A(0) = E$, где E — единичная матрица.

Лемма 3. *Обозначим через $X = \dot{A}(t)|_{t=0}$ производную этого однопараметрического семейства ортогональных матриц $A(t)$ при $t = 0$, т. е. X — это матрица, составленная из функций вида $\left.\dfrac{da_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$, где $A(t) = (a_{ij}(t))$. Тогда X — кососимметрическая матрица.*

Доказательство. Каждую ортогональную матрицу $A(t)$ можно представлять себе как линейный оператор, действующий в n-мерном евклидовом пространстве, причем этот оператор сохраняет евклидово скалярное произведение. Это означает, что для любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ имеет место тождество: $\langle A(t)\mathbf{x}, A(t)\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$. Поскольку слева стоит гладкая функция от t, то можно рассмотреть ее производную по t при $t = 0$. Получим $\langle \dot{A}(t)\mathbf{x}, A(t)\mathbf{y}\rangle + \langle A(t)\mathbf{x}, \dot{A}(t)\mathbf{y}\rangle|_{t=0} = 0$, т. е. $\langle X\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}, X\mathbf{y}\rangle = 0$. Взяв в качестве векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ базисные векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$, соответственно (где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — ортобазис в $\mathbf{R}^n$) получаем: $\langle X\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle + \langle \mathbf{e}_i, X\mathbf{e}_j\rangle = 0$, что и означает косую симметрию матрицы X в ортобазисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Поскольку множество ортогональных матриц вложено как подмножество в линейное пространство всех матриц размера $(n \times n)$, то гладкую кривую $A(t)$ можно рассматривать как гладкую кривую в n^2-мерном линейном пространстве. С этой точки зрения матрица $X = A(t)|_{t=0}$ естественно отождествляется с обычным вектором скорости гладкой кривой $A(t)$ при $t = 0$.

Матрично-значную функцию $A(t)$ можно разложить в точке $t = 0$ по степеням бесконечно малого приращения Δt :

$$A(\Delta t) = E + \frac{dA(t)}{dt}|_{t=0}\,\Delta t + \ldots .$$

Тогда матрица X появляется как «коэффициент» при Δt.

Перейдем теперь к построению репера Френе. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — гладкая вектор-функция, задающая гладкую траекторию $\gamma(s)$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Предположим, что при $a \leqslant s \leqslant b$ все векторы вида: $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\mathbf{r}}{ds^n}$ линейно независимы при каждом s. Тогда в каждой точке $\mathbf{r}(s)$ возникает репер (не ортогональный!), составленный из векторов $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\mathbf{r}}{ds^n}$ и гладко меняющийся от точки к точке. В силу предположенной линейной независимости производных радиус-вектора, имеем, что все $\frac{d^k\mathbf{r}}{ds^k}$ отличны от нуля, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Предложение 1. *Пусть $\mathbf{r}(s)$ — гладкая вектор-функция в $\mathbf{R}^n$, и пусть k-я производная $\frac{d^k\mathbf{r}}{ds^k}$ оказалась линейно зависимой от производных $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ \ldots, \ \frac{d^{k-1}\mathbf{r}}{ds^{k-1}}$ в каждой точке интервала $a \leqslant s \leqslant b$, причем $\frac{d^k\mathbf{r}}{ds^k} \neq 0$ при $a \leqslant s \leqslant b$ и все производные $\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ \ldots, \ \frac{d^{k-1}\mathbf{r}}{ds^{k-1}}$ линейно независимы при $a \leqslant s \leqslant b$. Тогда кривая $\mathbf{r}(s)$ целиком содержится в некоторой $(k-1)$-мерной плоскости, натянутой на векторы $\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ \ldots, \frac{d^{k-1}\mathbf{r}}{ds^{k-1}}$. Эта плоскость не меняет своего положения в пространстве $\mathbf{R}^n$ при изменении s от a до b.*

Доказательство. В силу условия существуют гладкие функции $\lambda_i(s)$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, такие, что в каждой точке s имеем: $\frac{d^k\mathbf{r}}{d^ks} = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i(s)\frac{d^i\mathbf{r}}{d^is}$.

В силу линейной независимости векторов $\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}\mathbf{r}}{ds^{k-1}}$ эти векторы можно принять за базис в плоскости $\mathbf{R}^{k-1}$, натянутой на эти векторы. Для того чтобы доказать, что кривая $\gamma(s)$ все время остается в одной и той же k-мерной плоскости, достаточно показать, что плоскость $\mathbf{R}^{k-1}(s)$ не меняет своего положения в пространстве $\mathbf{R}^n$ при изменении s. Поскольку базисом в $\mathbf{R}^{k-1}(s)$ служат векторы $\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}\mathbf{r}}{ds^{k-1}}$, то достаточно показать, что производная этого базиса состоит из векторов, разлагающихся по этому базису. Однако это очевидно в силу условия предложения. $\square$

Итак, если векторы $\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\mathbf{r}}{ds^n}$ линейно независимы, то кривая $\mathbf{r}(s)$ не содержится ни в какой $(n-1)$-мерной плоскости в $\mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, неподвижной при изменении s. Построим теперь в каждой точке s ортонормированный базис, векторы которого будем обозначать через $\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_n$. Положим $\frac{d\mathbf{r}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \boldsymbol{\tau}_1$. Затем рассмотрим двумерную плоскость, натянутую на векторы $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\frac{d^2\mathbf{r}}{d^2s}$ и выберем в этой плоскости вектор $\boldsymbol{\tau}_2$, ортогональный $\boldsymbol{\tau}_1$. Так как по предположению $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\mathbf{r}}{d^2s}$ линейно независимы, то $\boldsymbol{\tau}_2$ имеет не нулевую проекцию на $\frac{d^2\mathbf{r}}{d^2s}$. Следующий вектор $\boldsymbol{\tau}_3$ выберем в трехмерном пространстве, натянутом на $\frac{d^3\mathbf{r}}{d^3s}, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_1$, т. е. на векторы $\frac{d^3\mathbf{r}}{d^3s}, \frac{d^2\mathbf{r}}{d^2s}, \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, причем в качестве $\boldsymbol{\tau}_3$ возьмем вектор, ортогональный плоскости, натянутой на векторы $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\tau}_1$ $\left(\text{т. е. на } \frac{d^2\mathbf{r}}{d^2s}, \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)$. Продолжая процесс, мы и получаем искомый ортонормированный репер $\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_n$. Ясно, что при изменении s, векторы репера $\boldsymbol{\tau}(s)$ также гладко меняются от точки к точке. Как и в плоском случае, рассмотрим производные от векторов репера $\boldsymbol{\tau}(s) = (\boldsymbol{\tau}_1(s), \ldots, \boldsymbol{\tau}_n(s))$. Оказывается, что они также удовлетворяют простым соотношениям, обобщающим формулы Френе для плоской кривой.

Теорема 4. *Пусть гладкая кривая $\mathbf{r}(s)$ в $\mathbf{R}^n$ отнесена к натуральному параметру s, и пусть векторы $\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\mathbf{r}}{ds^n}$ линейно независимы* *в каждой точке $a \leqslant s \leqslant b$. Тогда существуют такие гладкие функции $k_2(s), \ldots, k_n(s)$, что выполняются тождества (формулы Френе):*

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds} = k_2\boldsymbol{\tau}_2, \\ \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_2}{ds} = k_3\boldsymbol{\tau}_3 - k_2\boldsymbol{\tau}_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_{n-1}}{ds} = k_n\boldsymbol{\tau}_n - k_{n-1}\boldsymbol{\tau}_{n-2}, \\ \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_n}{ds} = \qquad - k_n\boldsymbol{\tau}_{n-1}. \end{cases}$$

т. е. $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_i}{ds} = k_{i+1}\boldsymbol{\tau}_{i+1} - k_i\boldsymbol{\tau}_{i-1}$, *где* $k_1 = k_{n+1} = 0$.

Доказательство. Так как вектор $\boldsymbol{\tau}_i$ (для $1 \leqslant i \leqslant n$) содержится в линейной оболочке векторов $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}, \ldots, \dfrac{d^i\mathbf{r}}{ds^i}$, то его производная $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_i}{ds}$ содержится в линейной оболочке векторов $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}, \ldots, \dfrac{d^i\mathbf{r}}{ds^i}; \dfrac{d^{i+1}\mathbf{r}}{ds^{i+1}}$ т. е. существуют некоторые функции $a_{i,1}(s), \ldots, a_{i,i+1}(s)$ такие, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}_i}{ds} = \sum_{j=1}^{i+1} a_{i,j}(s)\boldsymbol{\tau}_j(s).$$

Таким образом, если мы составим матрицу X размера $n \times n$, выражающую набор векторов $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds}, \ldots, \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_n}{ds}$ через репер $\boldsymbol{\tau}(s) = (\boldsymbol{\tau}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{\tau}_n \ )$, то она будет иметь следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & & & \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & & * & \\ & a_{23} & a_{33} & \ddots & & \\ & & & \ddots & a_{n-1,n-2} & \\ & 0 & & & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ & & & & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, нам известны некоторые дополнительные свойства матрицы X. В самом деле, как и в двумерном случае, мы можем интерпретировать перемещение репера $\boldsymbol{\tau}(s)$ вдоль кривой $\gamma(s)$ в терминах семейства ортогональных матриц $A(s)$ таких, что $\boldsymbol{\tau}(s) = A(s)\boldsymbol{\tau}(0)$. Задание этого однопараметрического семейства однозначно определяет эволюцию репера $\boldsymbol{\tau}(s)$ при изменении s. Тогда, очевидно, матрица X будет совпадать с производной матрицы $\dfrac{dA(s)}{ds}$ при $s = 0$. В силу леммы 3 матрица X будет кососимметрической, т. е.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & & & & & & \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & & & & 0 & \\ & a_{23} & 0 & -a_{34} & & & & \\ & & a_{34} & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & -a_{n-2,n-1} & \\ & 0 & & & & a_{n-2,n-1} & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & & & a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Взяв в качестве функций $k_i(s)$ функции $a_{i,i+1}(s)$, мы получаем доказательство теоремы. □

Рассмотрим трехмерный случай: $n = 3$. Здесь формулы Френе принимают вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds} = k_2\boldsymbol{\tau}_2;\ \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{ds} = k_3\boldsymbol{\tau}_3 - k_2\boldsymbol{\tau}_1;\ \frac{d\boldsymbol{\tau}_3}{ds} = -k_3\boldsymbol{\tau}_2.$$

Вектор τ_1 является единичным вектором скорости кривой $\mathbf{r}(s)$ и обычно обозначается через $\mathbf{v}(s)$. Вектор $\boldsymbol{\tau}_2(s)$ совпадает с производной по s от вектора $\mathbf{v}$, так как $\dfrac{d\mathbf{v}}{ds} \perp \mathbf{v}$ и $|\mathbf{v}(s)| = 1 = \mathrm{const}$. Здесь мы использовали тот факт, что s — натуральный параметр. Вектор $\boldsymbol{\tau}_3$ ортогонален $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n} = \dfrac{d\mathbf{v}}{ds}$, т. е. можно считать, что он совпадает с векторным произведением векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$. Вектор $\mathbf{n}$ называют вектором *нормали* к кривой $\mathbf{r}(s)$, а вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ — вектором *бинормали* к кривой $\mathbf{r}(s)$. Здесь через $[\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ мы обозначили векторное произведение $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$. В этих обозначениях формулы Френе запишутся так:

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = k\mathbf{n};\quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{v};\quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n}.$$

Здесь $k(s) = k_2(s)$ и называется *кривизной* кривой, а $\varkappa(s) = k_3(s)$ и называется *кручением* кривой. (Иногда вектор $\mathbf{n}(s)$ называют не просто «нормалью», а «*главной нормалью*» к кривой $\mathbf{r}(s)$.)

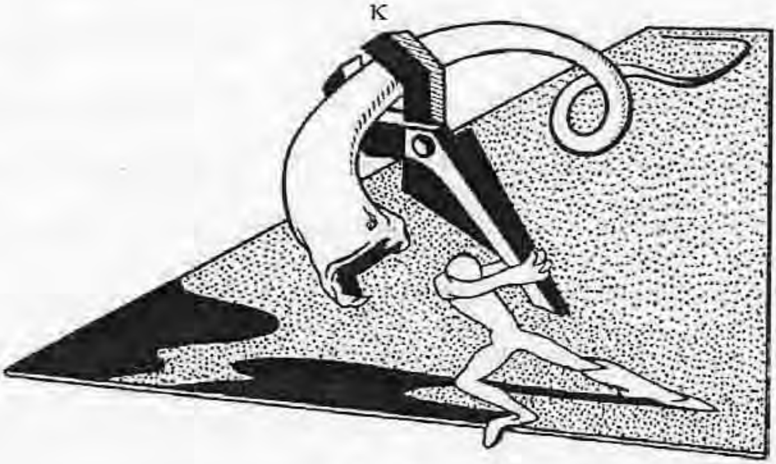
Для удобства работы с кривизной кривой, будем всегда считать, что вектор $\boldsymbol{\tau}_2$ совпадает с $\dfrac{d\mathbf{v}(s)}{ds} \Big/ \left|\dfrac{d\mathbf{v}(s)}{ds}\right|$; тогда $k(s)$ совпадает с модулем вектора $\dfrac{d\mathbf{v}(s)}{ds}$ и, следовательно, является положительным числом (мы считаем, что соответствующие производные радиус-вектора отличны от нуля). Если кривая плоская, то вектор бинормали является постоянным вектором, не меняется при изменении точки на кривой; в частности, кручение кривой равно нулю. Следовательно, плоские кривые могут быть охарактеризованы (с точки зрения $\mathbf{R}^3$) как кривые с нулевым кручением. Изучим более подробно роль кручения пространственной кривой в том случае, когда кручение отлично от нуля. Рассмотрим скольжение репера $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ вдоль кривой и будем проектировать векторы $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ на плоскость, натянутую на векторы $\mathbf{b}(s_0)$ и $\mathbf{n}(s_0)$, где s_0 — некоторое фиксированное значение параметра s, а значения s предполагаются бесконечно близкими к s_0. При этом вектор скорости спроектируется в вектор бесконечно малой длины, а потому можно считать (в первом приближении), что этот вектор проектируется в нуль. Тогда в плоскости $\mathbf{b}(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$ возникает некоторое движение векторов $\mathbf{b}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ спроектированных на эту плоскость. Из формул Френе следует, что это движение описывается формулами: $\dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = \varkappa\mathbf{b}$; $\dfrac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n}$, т. е. движение определяется кососимметрической матрицей $\begin{pmatrix} 0 & \varkappa \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix}$, что определяет бесконечно малый поворот репера $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$. Следовательно, векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ вращаются относительно вектора скорости кривой, причем скорость этого вращения однозначно задается кручением кривой (отсюда, кстати, происходит и сам термин «кручение»). При этом кривая теряет свою плоскую форму и становится «изогнутой в пространстве», если она первоначально была плоской. Итак, можно считать, что пространственная кривая (в малом) может быть получена из плоской кривой, если двигаться по ней с равномерной скоростью, «подкручивая» в каждый момент времени эту кривую с помощью кручения $\varkappa$ (рис. 4).

Замечание. Как и в случае плоской кривой, существует набор инвариантов, однозначно (с точностью до движения трехмерного пространства) определяющий гладкую кривую. Эти инварианты — кривизна и кручение кривой; задание этих двух функций определяет гладкую кривую. Доказательство проводится в точности по той же схеме, какая была уже использована при доказательстве теоремы 3. Поскольку в дальнейшем мы не будем пользоваться этим фактом, то доказательство «трехмерного утверждения» мы опускаем.

Рассмотрим гладкую кривую в $\mathbf{R}^n$. Пусть вектор скорости этой кривой отличен от нуля в каждой точке.

Предложение 2. *Гладкая кривая с ненулевым вектором скорости является гладким одномерным многообразием, гладко вложенным в* $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. То, что кривая является гладким многообразием, непосредственно следует из определения гладкого многообразия. Остается



101

Рис. 4

проверить, что она является гладким подмногообразием в $\mathbf{R}^n$, для чего нужно изучить дифференциал отображения вложения i, т. е. линейное отображение di. Поскольку оно полностью определяется вектором скорости кривой, то матрица Якоби имеет максимальный ранг в каждой точке кривой, а потому кривая является подмногообразием. □

Замечание. Кривая, расположенная в плоскости и изображенная на рис. 5, является гладким многообразием, но не является гладким подмногообразием в плоскости. Ясно, что она может быть задана с помощью радиус-вектора с гладкими компонентами $x(t)$, $y(t)$, однако в вершинах треугольника вектор скорости должен обращаться в нуль, чтобы кривая могла сделать резкий поворот.

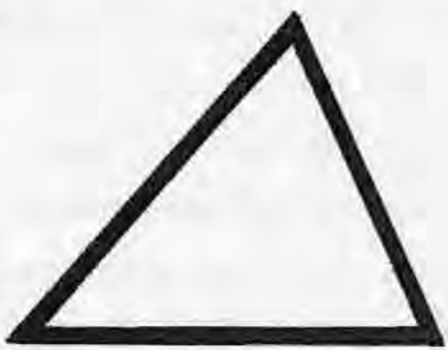


Рис. 5

Ясно, что любое связное одномерное гладкое замкнутое (т. е. не имеющее края) многообразие диффеоморфно либо прямой (некомпактное многообразие), либо окружности (компактное многообразие). Таким образом, все одномерные связные многообразия исчерпываются только двумя различными многообразиями. Эти многообразия уже не диффеоморфны, так как прямая некомпактна, а окружность компактна.