Группы преобразований

Лекция 5

Простейшие примеры групп преобразований

Здесь мы будем изучать основные примеры групп преобразований метрик, т. е. отображений многообразий, сохраняющих метрику. Рассмотрим риманово многообразие M^n с метрикой g_{ij}.

Определение 1. Диффеоморфизм f многообразия M^n на себя называется *движением* римановой метрики g_{ij} или *изометрией*, если риманова метрика при этом отображении переходит в себя, т. е. выполнено тождество:

$$g_{kp}(y) = g_{ij}(x(y))\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}\frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p},$$

где $y^1, \ldots, y^n$ — локальные координаты в некоторой окрестности точки $y \in M^n$; $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты в некоторой окрестности точки $x \in M^n$; $x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — функции задающие (локально) отображение f, причем $x = f(y)$.

Мы дали «координатное» определение изометрии. Иногда бывает удобно пользоваться инвариантным определением, не использующим локальные координаты, выбор которых неоднозначен. При отображении f дифференциал df отображает $T_y M^n$ на $T_x M^n$, причем это отображение — линейный изоморфизм, так как f — диффеоморфизм. В каждом из касательных пространств $T_y M^n$ и $T_x M^n$ определено скалярное произведение: $\langle\,,\,\rangle_y$ и $\langle\,,\,\rangle_x$, соответственно, построенное по римановой метрике, т. е. в локальных координатах $y^1, \ldots, y^n$ имеем: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_y = g_{ij}(y) a^i b^j$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_y M^n$.

Определение 2. Диффеоморфизм f многообразия M^n на себя называется *изометрией*, если $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_y = \langle df(\mathbf{a}), df(\mathbf{b})\rangle_x$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_y M^n$; $x = f(y)$.

Лемма 1. *Координатное и инвариантное определение изометрий эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} \in T_y M^n$,$\mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ в локальных координатах $y^1, \ldots, y^n$; отсюда $df(\mathbf{a}) \in T_x M^n$ имеет вид:

$$(df(\mathbf{a}))^i = \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} a^k,$$

так как $df\colon T_y M^n \to T_x M^n$ задается матрицей Якоби. Отсюда

$$\langle df(\mathbf{a}), df(\mathbf{b})\rangle_x = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p} a^k a^p = g_{kp} a^k a^p,$$

что и доказывает лемму □

Лемма 2. *Множество всех изометрий риманова многообразия M^n образует группу (в алгебраическом смысле).*

Доказательство. То, что композиция изометрий — снова изометрия, вытекает из правила дифференцирования сложной функции и закона изменения коэффициентов g_{ij} при замене координат. То что f^{-1} является изометрией, вытекает из того, что матрица Якоби f^{-1} является матрицей, обратной к матрице Якоби $J(f)$. В качестве единичного элемента группы следует взять тождественное преобразование. Лемма доказана. □

Группа изометрий риманова многообразия M^n обычно снабжается топологией из пространства отображений и обозначается через $\mathrm{Iso}\,(M^n)$. Рассмотрим простейшие примеры.

✍ ***Пример 1.*** В качестве M^1 возьмем вещественную прямую (некомпактное одномерное многообразие) с евклидовой метрикой $ds^2 = dx^2$, где x — координата на прямой. Пусть f — диффеоморфизм $\mathbf{R}^1$ на себя, задаваемый, следовательно, строго возрастающей (или убывающей) функцией $x = f(y)$; условия, что f — изометрия, дает, что $ds^2 = (f'_y)^2 dy^2 = dy^2$, т. е. $(f'_y)^2 = 1$, т. е. f имеет либо вид: $f(y) = y + a$, либо $f(y) = -y + b$, где a и b — произвольные постоянные. Итак, группа изометрий вещественной прямой гомеоморфна паре вещественных прямых (собственные изометрии, сохраняющие ориентацию прямой, и несобственные изометрии).

Этот пример является практически единственным примером, в котором, оставаясь на элементарном уровне, можно найти полную группу изометрий многообразия. Дело в том, что трудно доказывать полноту предъявленной подгруппы в группе всех изометрий. В предыдущем примере это удалось только за счет того, что гладкая функция, имеющая постоянную производную, является линейной. Вскоре мы познакомимся с понятием геодезической для римановой метрики и тогда сможем доказывать полноту некоторых предъявленных подгрупп в группе всех изометрий.

✍ ***Пример 2.*** Рассмотрим евклидову двумерную плоскость и найдем группу изометрий, сохраняющих точку O — начало координат. Будем искать изометрии среди линейных преобразований плоскости (можно показать, что любая изометрия плоскости — линейна; но сейчас мы не будем на этом останавливаться). Требование инвариантности метрики $dx^2 + dy^2$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, записывается в виде матричного уравнения: $E = AA^{\top}$, где $A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ — линейное преобразование. Это — определение ортогональной группы, т. е. в данном случае — группы $O(2)$, состоящей из матриц вида: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (собственные вращения) и $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ (несобственные вращения, или отражения). Собственные вращения образуют подгруппу в $O(2)$, обозначаемую $SO(2)$; несобственные вращения подгруппы не образуют. Подгруппа $SO(2)$ является нормальным делителем в $O(2)$; следовательно, определена фактор-группа $O(2)/SO(2)$, изоморфная $\mathbf{Z}_2$ (циклической группе второго порядка). Группа $O(2)$ является подгруппой в группе всех изометрий окружности, снабженной стандартной римановой метрикой $ds^2 = d\varphi^2$. Поскольку $O(2)$ состоит из матриц, то, следовательно, эта группа превращается в топологическое пространство, если сопоставить каждой матрице значение угла φ (для собственных

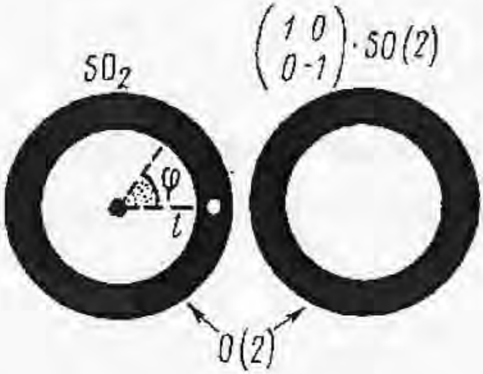

Рис. 1

вращений). Таким образом, множество матриц, образующих $O(2)$, гомеоморфно двум экземплярам окружности; следовательно, $O(2)$ может быть снабжена структурой гладкого одномерного замкнутого (несвязного) многообразия (рис. 1).

Задача 1. Докажите, что группа $O(2)$ совпадает с группой всех изометрий окружности с метрикой $ds^2 = d\varphi^2$. Указание: поступить по аналогии с группой Iso $(\mathbf{R}^1)$.

✍ ***Пример 3.*** Движение евклидовой плоскости можно записать в виде: $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, где $A \in O(2)$, а вектор $\mathbf{b}$ определяет параллельный перенос (сдвиг) на плоскости. Ясно, что все такие преобразования сохраняют евклидову метрику (проверьте!). Как будет показано далее, они исчерпывают собою все изометрии плоскости.

Эту группу можно представить в виде матриц

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & \mathbf{b} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(Проверьте, что соответствие $(\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}) \to T$ является изоморфизмом групп.) Следовательно, как и в предыдущем примере, группа Iso $(\mathbf{R}^2)$ может быть превращена в топологическое пространство, гомеоморфное прямому произведению пары окружностей на евклидову плоскость, и тем самым это множество может быть снабжено структурой гладкого трехмерного многообразия (некомпактного и несвязного — состоящего из двух компонент связности).

✍ ***Пример 4.*** Рассмотрим индефинитные метрики. Зададим на $\mathbf{R}^2$ индефинитную метрику $-dx^2 + dy^2$, превращающую двумерное пространство в псевдоевклидову плоскость $\mathbf{R}^2_1$. Матрица первой формы B постоянна и имеет вид: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, если мы хотим найти все линейные однородные преобразования, сохраняющие эту метрику, то должны решить уравнение: $B = ABA^T$, где $A\colon \mathbf{R}_1^2 \to \mathbf{R}_1^2$ — линейное преобразование. Записав его в виде: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, получаем систему уравнений на a, b, c, d: $a^2 - b^2 = 1$; $ac = bd$; $d^2 - c^2 = 1$. Решая систему, получаем:

$$A = \begin{pmatrix} \pm \operatorname{ch}\psi & \pm \operatorname{sh}\psi \\ \pm \operatorname{sh}\psi & \pm \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}; \text{ где } \frac{b}{a} = \beta,\ \beta = \operatorname{th}\psi;$$

и допустимыми являются следующие комбинации знаков:

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \in G_1. \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \in G_2; \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \in G_3; \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \in G_4.$$

Здесь представлены все возможные варианты. Например, $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ принадлежит G_1, так как заменив ψ на $-\psi$, мы превращаем $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$ (напомним, что $\operatorname{sh}(-\psi) = -\operatorname{sh}\psi$, $\operatorname{ch}(-\psi) = \operatorname{ch}\psi$). Тем самым $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$ (проверьте!) и $G_i \cap G_j = \varnothing$, если $i \neq j$. В самом деле, допустим, например, что $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$; тогда $\operatorname{ch}\varphi = -\operatorname{ch}\psi$, $\operatorname{sh}\varphi = -\operatorname{sh}\psi$, что невозможно, поскольку $\operatorname{ch}\varphi > 0$ при любом φ. Аналогично устанавливается, что $G_i \cap G_j = \varnothing$.

Так как группа G является группой однородных изометрий $\mathbf{R}_1^2$, то ее преобразования переводят в себя множество $\{-x^2 + y^2 = 1\} \cup \{-x^2 + y^2 = -1\}$, т. е. пару псевдоокружностей вещественного и мнимого радиусов. В случае евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$ каждое вращение определялось углом поворота φ орторепера; аналогичный параметр мы введем и в случае псевдоевклидовой плоскости $\mathbf{R}_1^2$. Рассмотрим орторепер: $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Тогда, под действием изометрии A этот репер преобразуется так, как показано на рис. 2. Введем вместо обычного евклидова угла пово-

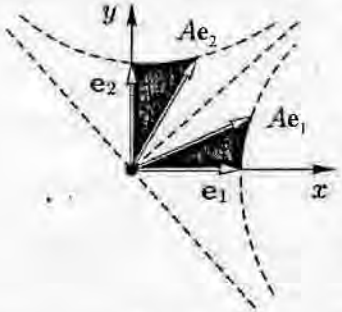

Рис. 2

рота φ угол гиперболического поворота ψ, положив $\beta = \operatorname{th}\psi$ (см. выше); при этом группа G превращается в группу гиперболических поворотов. Напомним, что группа ортогональных преобразований евклидовой плоскости состояла из двух связных компонент. Группа гиперболических поворотов устроена более сложно: она состоит из четырех компонент связности. Это — множества G_1, G_2, G_3, G_4, т. е.

$$\left\{ \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \right\};$$

$-\infty < \psi < +\infty$. Поскольку мы реализовали группу G в виде группы матриц, то группа G вкладывается как подмножество в четырехмерное вещественное евклидово пространство всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$, а поэтому наследует топологию, превращающую группу G в топологическое пространство. Относительно этой топологии каждое из подмножеств G_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, является линейно связным. В самом деле, рассмотрим, например, матрицы типа G_1. Тогда для любой пары матриц: $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi_1 & \operatorname{sh}\psi_1 \\ \operatorname{sh}\psi_1 & \operatorname{ch}\psi_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi_2 & \operatorname{sh}\psi_2 \\ \operatorname{sh}\psi_2 & \operatorname{ch}\psi_2 \end{pmatrix}$ можно указать непрерывный путь $\gamma(t)$, соединяющий их в множестве G_1, это: $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \gamma(t)$; $\psi_1 \leqslant t \leqslant \psi_2$. Совершенно аналогично проверяется линейная связность и остальных подмножеств: G_2, G_3, G_4. Из этих четырех связных компонент подгруппой является только G_1, т. е. $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$ (проверьте!). Остальные компоненты подгруппами не являются. Например, произведение двух матриц вида $\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$ дает $\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$, т. е., если $\alpha, \beta \in G_2$, то $\alpha \cdot \beta \in G_1$, $\alpha \cdot \beta \notin G_2$. Единичная матрица принадлежит G_1. Группа G является подмножеством в четырехмерном пространстве матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; при этом каждое G_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, гомеоморфно вещественной прямой. Этот гомеоморфизм (например, для G_1) устанавливается соотнесением каждой матрице $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$ значения угла ψ. Это соответствие взаимнооднозначно и непрерывно (см. рис. 3). Группа G переводит в себя псевдоокружность мнимого радиуса $-x^2 + y^2 = -1$. На рис. 4 показано действие четырех преобразований — представителей G_1, G_2, G_3, G_4. Аналогичные события происходят и с псевдоокружностью вещественного радиуса.

Группа G некоммутативна (проверьте!). Подгруппа G_1 — нормальный делитель в G, поскольку $g^{-1}qg$, где $q \in G_1$, $g \in G$, является по-прежнему преобразованием типа 1, так как получается из преобразования типа 1 заменой координат с помощью гиперболического поворота. Итак, определена фактор-группа G/G_1, порядок которой равен числу связных компонент в G, т. е. 4. Хотя группа G некоммутативна, группа G/G_1 коммутативна. Существуют только две коммутативные группы 4-го порядка: $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_4$. Какой именно группе изоморфна G/G_1? Составим таблицу умножения g_1, g_2, g_3, g_4, являющихся представителями в своих компонентах связности (см. выше). Вычисление дает:

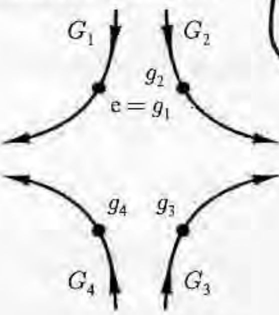

Рис. 3

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

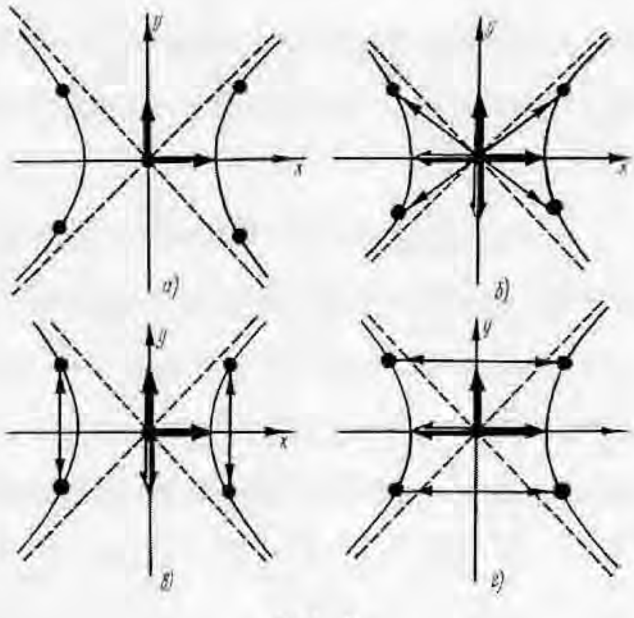

Рис. 4

Итак, G/G_1 изоморфна $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$. В этом — отличие группы вращений псевдоокружности от группы вращений обычной окружности. 76

✍ ***Пример 5.*** Рассмотрим группу изометрий двумерной сферы, рассматриваемой как риманово многообразие с метрикой, индуцированной стандартным вложением в $\mathbf{R}^3$. Сначала рассмотрим $\mathbf{R}^n$ и найдем группу линейных однородных преобразований A, сохраняющих евклидову метрику $ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$. Так как матрица (g_{ij}) имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, то имеем: $E = AA^T$; решениями этого уравнения являются ортогональные матрицы, образующие группу $O(n)$. В ней содержится подгруппа $SO(n)$, состоящая из собственных (с определителем, равным $+1$) вращений; остальные вращения (несобственные) подгруппы не образуют. Подгруппа $SO(n)$ — нормальный делитель в $O(n)$, и фактор-группа $O(n)/SO(n)$ изоморфна $\mathbf{Z}_2$. Пусть $n = 3$; тогда $O(3)$ сохраняет евклидову метрику в $\mathbf{R}^3$; следовательно, переводит в себя $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \mathrm{const}$. Итак, $O(3)$ — подгруппа в $\mathrm{Iso}\,(S^2)$. Далее мы покажем, что $O(3) \equiv \mathrm{Iso}\,(S^2)$. Рассмотрим $SO(3) \subset O(3)$. Так как $SO(3)$ реализована как подмножество в пространстве всех матриц (3×3) с вещественными коэффициентами, отождествляемом с $\mathbf{R}^9$, то она снабжается индуцированной топологией, превращаясь в топологическое пространство.

Лемма 3. *Группа $SO(3)$, как топологическое пространство, гомеоморфна трехмерному проективному пространству $\mathbf{RP}^3$.*

Доказательство. Пусть A — элемент $SO(3)$; тогда в $\mathbf{R}^3$ существует неподвижная ось $l(A)$ такая, что действие A в $\mathbf{R}^3$ сводится к повороту вокруг $l(A)$ на некоторый угол $\varphi(A)$. Если $A \neq E$, то $l(A)$ определена однозначно. Рассмотрим плоскость $\Pi(A)$, ортогональную оси $l(A)$ и проходящую через O; в $\Pi(A)$ выберем произвольный вектор $\mathbf{e}_1$, и пусть $\mathbf{e}_2$ — вектор, получающийся из $\mathbf{e}_1$ при повороте на угол $\varphi(A)$ (см. рис. 5). Дополним $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ третьим вектором $\mathbf{e}_3$ до репера $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ так, чтобы ориентация репера $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ совпала с ориентацией репера $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, где $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ — некоторый фиксированный репер в $\mathbf{R}^3$. Ось $l(A)$ превращается в вещественную прямую, если на ней задать направление с помощью $\mathbf{e}_3$ и отложить значение $\varphi(A)$. Мы однозначно сопоставили каждому $A \in SO(3)$ точку в $\mathbf{R}^3$, обозначим ее $P(l, \varphi)$. Ясно, что $P(l, \pi) = P(l, -\pi)$, так как повороты вокруг $l(A)$ на π и на $-\pi$ совпадают. Если же $|\varphi(A)| < \pi$, то $P(l, \varphi)$ соответствует одному и только одному вращению A. Непрерывно меняя A, мы непрерывно меняем $P(l, \varphi)$; верно и обратное. Итак,

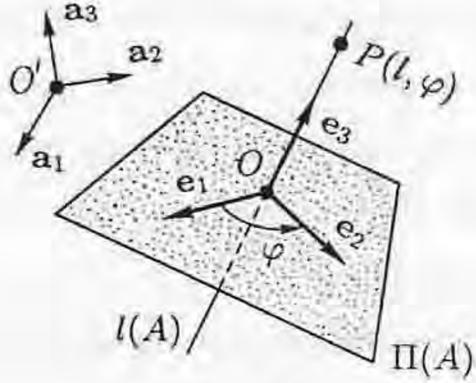

Рис. 5

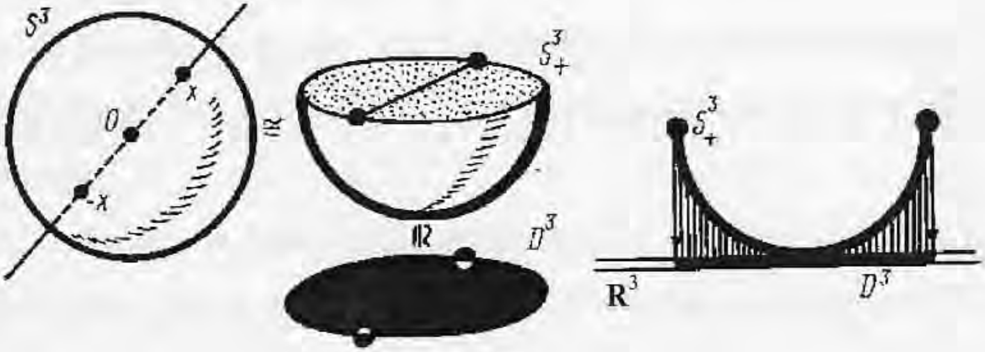

Рис. 6

мы взаимно-однозначно и непрерывно в обе стороны отождествили ортогональные преобразования A с точками трехмерного шара радиуса π, на границе которого (т. е. на сфере радиуса π) склеены диаметрально противоположные точки $P(l, \pi)$ и $P(l, -\pi)$. Осталось доказать, что этот «шар со склейками на границе» гомеоморфен $\mathbf{RP}^3$. Одно из определений $\mathbf{RP}^3$ реализует его как пучок прямых в $\mathbf{R}^4$, проходящих через O; эта модель эквивалентна следующей: нужно взять S^3 и отождествить у нее диаметрально противоположные точки. Затем нужно взять полусферу S^3_+ и отождествить диаметрально противоположные точки на ее границе, т. е. — на экваторе S^2 (см. рис. 6). Полусфера диффеоморфна трехмерному диску; диффеоморфизм можно осуществить ортогональным проектированием S^3_+ на D^3 (см. рис. 6). Итак, $\mathbf{RP}^3$ гомеоморфно D^3 с отождествленными диаметрально противоположными граничными точками. Лемма доказана. □

Так как $\mathbf{RP}^3$ — линейно связно, то $O(3)$ состоит из двух компонент линейной связности.

✍ ***Пример 6.*** Рассмотрим группу изометрий плоскости Лобачевского со стандартной римановой метрикой. Рассмотрим реализацию плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости с метрикой $\frac{-dz\,d\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}$. Будем искать группу изометрий этой метрики среди дробно-линейных преобразований комплексной плоскости $\frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, $d \in \mathbf{C}$. Изучим действие преобразований $w = \frac{az+b}{cz+d}$ на евклидову метрику $dz\,d\bar{z}$. Так как $dw = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\,dz$ (проверьте!), то

$$dw\,d\overline{w} = \frac{|ad-bc|^2}{|cz+d|^4}\,dz\,d\bar{z}.$$

Итак, метрика домножается на скалярный переменный множитель, т. е. дробно-линейные преобразования конформны. Эти преобразования сохраняют косинусы углов между пересекающимися кривыми; осталось проверить, что сохраняются сами ориентированные углы.

Подсчитаем якобиан $J\left(w = \frac{az+b}{z+d}\right)$ и убедимся, что он положителен. Пусть $z \in \mathbf{R}^2$; $w \in \mathbf{R}^2$; $w = \frac{az+b}{cz+d}$; $dw = \lambda(z)\,dz$; $\lambda(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$; $T_z(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$; $T_w(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$ (см. рис. 7). Следовательно, действие df отображения $f\colon\ z \to w$ записывается так: $df(z) = \lambda \cdot z$, где $\lambda \in \mathbf{C}$. Пусть $\lambda = u + iv$, u, $v \in \mathbf{R}$, тогда матрица Якоби в вещественной записи имеет вид: $\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$, т. е. якобиан равен u^2+v^2 и положителен. Отберем из всех дробно-линейных преобразований те и только те, которые переводят в себя верхнюю полуплоскость.

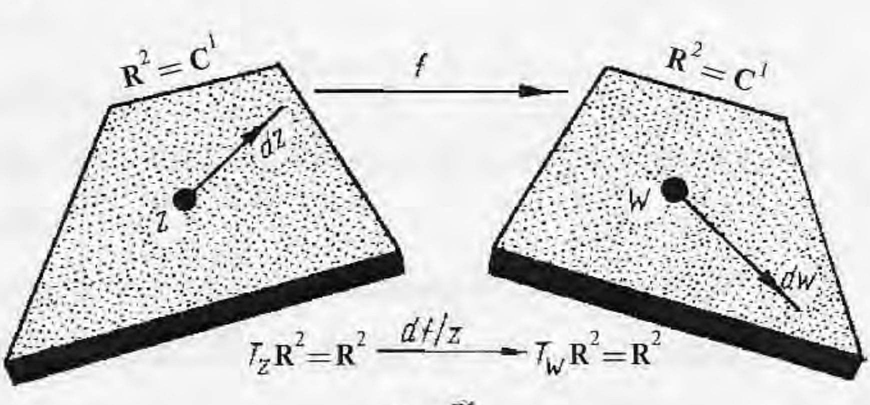

Рис. 7

Лемма 4. *Преобразование* $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *переводит в себя верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда* $(a, b, c, d) = \rho(a', b', c', d')$, *где* $a', b', c', d' \in \mathbf{R}$, $\rho \in \mathbf{C}$, $\rho \neq 0$; *т. е. когда все коэффициенты* (a, b, c, d) *пропорциональны четверке вещественных чисел* (a', b', c', d'); *и, кроме того,* $ad - bc > 0$.

Доказательство. Пусть четверка коэффициентов пропорциональна вещественной четверке (которую сразу обозначим через a, b, c, d). Ясно, что вещественная ось переходит в себя. Докажем, что если точка z принадлежит верхней полуплоскости, то ее образ $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ тоже принадлежит верхней полуплоскости, т. е. что $\operatorname{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) > 0$. В самом деле

$$w = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac(z\bar{z})+bd}{|cz+d|^2} + \frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2};$$

$$\operatorname{Im} w = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \cdot \operatorname{Im} z > 0,$$

так как $ad - bc > 0$; $\operatorname{Im} z > 0$.

Обратно. Пусть $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ переводит в себя верхнюю полуплоскость.

Требуется доказать, что существует общий множитель ρ, такой, что (a, b, c, d) пропорциональны вещественным (a', b', c', d'). Если $\bar{z} = z$, то $\overline{w} = w$. Следовательно, при произвольном $x \in \mathbf{R}$ имеем:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\bar{a}x+\bar{b}}{\bar{c}x+\bar{d}}$$

При $x = 0$: $\dfrac{b}{d} = \dfrac{\bar{b}}{\bar{d}} = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$. При $x \to \infty$:

$$\frac{a}{c} = \frac{\bar{a}}{\bar{c}} = \mu \in \mathbf{R},\ b = \lambda d,\ a = \mu c;$$

при $x = 1$:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{\bar{c}+\bar{d}} = \rho \in \mathbf{R};\ \mu c + \lambda d = \rho c + \rho d;\ (\mu - \rho)c = (\rho - \lambda)d.$$

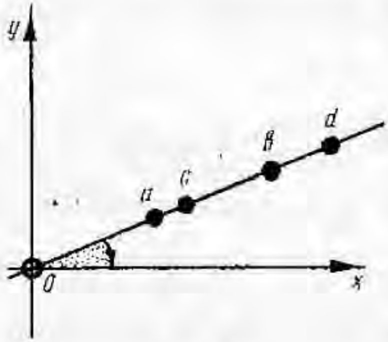

Рис. 8

Рассматривая случай общего положения, т. е. когда $\mu - \rho \neq 0$, $\rho - \lambda \neq 0$, получаем: $c = \xi d$, $\xi \in \mathbf{R}$. Итак, все четыре комплексных числа a, b, c, d расположены на одной прямой (рис. 8). Домножая на общий комплексный множитель, можем повернуть эту прямую на вещественную ось. Из того, что верхняя полуплоскость переходит в себя, следует, что определитель этого дробно-линейного преобразования положителен. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. *Любое преобразование* $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, *такое, что* $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc > 0$, *является изометрией плоскости Лобачевского.*

Доказательство. Имеем:

$$dw = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\,dz;\ \ \frac{dw\,d\overline{w}}{(w-\overline{w})^2} = \frac{dz\,d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2},$$

что и требовалось.

Так как $ad - bc > 0$, то можно считать, что $ad - bc = 1$. $\square$

Предложение 1. *Группа изометрий плоскости Лобачевского* $\operatorname{Iso}(L_2)$ *содержит подгруппу, изоморфную группе* $SL(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$, *т. е. фактор-группе* $SL(2,\mathbf{R})$ *матриц* (2×2) *с вещественными коэффициентами и определителем* $+1$ *по подгруппе* $\mathbf{Z}_2$, *состоящей из преобразований* E *и* $-E$.

Доказательство. Рассмотрим $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ и $ad-bc = 1$. В силу леммы 5, это — изометрии. Их совокупность образует группу. В самом деле:

$$\left(a'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+b'\right)\Big/\left(c'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+d'\right) = \frac{(a'a+cb')z+(a'b+db')}{(c'a+cd')z+(c'b+dd')}$$

— снова преобразование с вещественными коэффициентами и определителем, равным 1. Так как $ad - bc \neq 0$, то существует обратное преобразование того же типа. Рассмотрим теперь матричную группу $SL(2,\mathbf{R})$ — группу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ и $ad - bc = 1$. Построим отображение $\varphi\colon\ SL(2,\mathbf{R}) \to G_1$, где G_1 — группа преобразований $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, a, b, c,

$d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$. Положим $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Ясно, что φ — гомоморфизм (проверьте!). Эпиморфность φ очевидна. Найдем $\operatorname{Ker}\varphi$. Ясно, что $\varphi(g) = \varphi(-g)$, а потому $\operatorname{Ker}\varphi \supset \mathbf{Z}_2 = (E, -E)$. Докажем, что $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbf{Z}_2$. Пусть $\varphi(g) = \varphi(g')$, т. е. $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$; отсюда:

$$\frac{b}{b'} = \frac{d}{d'} = \lambda;\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} = \mu;\ \frac{a+b}{c+d} = \frac{a'+b'}{c'+d'};\ b = \lambda b';\ d = \lambda d';$$
$$a = \mu a';\ c = \mu c';\ \mu a'd' + \lambda b'c' = \mu c'b' + \lambda d'a';$$
$$(\mu - \lambda)(a'd' - b'c') = 0;\ \mu = \lambda,\ a'd' - b'c' = 1.$$

81

Итак, $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{d}{d'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'} = \lambda$, т. е. $g' = \lambda g$, т. е. $\lambda = \pm 1$, $g' = \pm g$, что и требовалось. □

Задача 2. Докажите, что $SL(2, \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ — связное топологическое пространство.

Не следует думать, что преобразования $SL(2, \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ исчерпывают $\operatorname{Iso}(L_2)$. В самом деле, рассмотрим $g_0\colon z \to -\bar{z}$; это отображение переводит верхнюю полуплоскость в себя и сохраняет метрику Лобачевского (отражение относительно оси Oy). В то же время g_0 не имеет вида $\dfrac{az+b}{cz+d}$. В самом деле, $\dfrac{az+b}{cz+d}$ конформны (см. выше), т. е. сохраняют ориентированные углы. Преобразование $g_0\colon z \to -\bar{z}$ конформным не является (см. рис. 9).

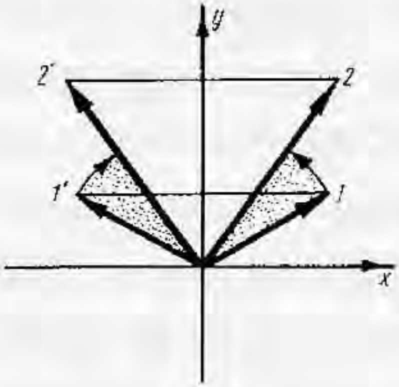

Рис. 9

Итак, мы должны еще рассмотреть преобразования $g(z)$ вида $w = g(z) = -\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$. Другими словами: $w = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = -1$. Обозначим множество всех таких преобразований через G_2. Множества G_1 и G_2 гомеоморфны, так как любое $g \in G_2$ имеет вид: $g = g_0 f$, где $f \in G_1$, и так как g_0 и f — изометрии, то и $g_0 f$ — изометрия. Гомеоморфизм устанавливается путем умножения множества G_1 на $g_0 \in G_2$. Далее, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, так как $\dfrac{az+b}{cz+d} \not\equiv \dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$. В самом деле, $\dfrac{az+b}{cz+d}$ сохраняет ориентированные углы, а $\dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$ — не сохраняет.

Лемма 6. *Множество $G = G_1 \cup G_2 = \{f\} \cup \{g_0 f\}$ является группой в которой G_1 — подгруппа, а G_2 — не подгруппа.*

82

Доказательство. Рассмотрим совокупность всех вещественных матриц (2×2) с определителем ± 1; это, очевидно, группа, которую мы обозначим через $L(2, \mathbf{R})$: $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ ad - bc = \pm 1 \right\}$. Эта группа, как топологическое пространство, несвязна: в ней две компоненты связности: $L(2, \mathbf{R}) = L_1 \cup L_2$, где

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ ad - bc = 1 \right\}, L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ ad - bc = -1 \right\}.$$

Подгруппа L_1 ранее нами обозначалась $SL(2, \mathbf{R})$. Построим $\varphi\colon\ L \to G$; если

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L_1, \text{ то } \varphi(A) = f \in G_1; f(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ ad - bc = 1;$$

если

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L_2, \text{ то } \varphi(B) = f \in G_2; g(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},\ ad - bc = -1.$$

Ясно, что φ — гомоморфизм (проверьте!). Далее: φ — эпиморфизм; φ не взаимно-однозначно и имеет ядро. Для нахождения ядра достаточно найти прообраз единичного элемента группы G. Как и в предложении 1, доказывается, что $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbf{Z}_2$, где $\mathbf{Z}_2 = (+E, -E)$; эта подгруппа — центр в $L(2, \mathbf{R})$. Лемма доказана. □

Фактически доказана следующая лемма.

Лемма 7. *Группа $G = G_1 \cup G_2 = \{f\} \cup \{g\}$ изоморфна $L(2, \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$, где*

$$L(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ ad - bc = \pm 1 \right\},\ \mathbf{Z}_2 = (E, -E).$$

Итак, мы предъявили в группе изометрий плоскости Лобачевского подгруппу, состоящую из двух компонент линейной связности, а именно: $G \cong L(2, \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$. Сколькими параметрами описываются элементы этой группы? Так как $L(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ ad - bc = 1 \right\}$, то элемент $g \in G$ задается тремя независимыми параметрами.

Лемма 8. *Группа $SL(2, \mathbf{R})$, как топологическое пространство, гомеоморфна прямому произведению окружности на евклидову плоскость, а поэтому может быть снабжена структурой гладкого трехмерного многообразия (некомпактного). Соответственно, $L(2, \mathbf{R})$ гомеоморфна прямому произведению двух экземпляров окружности на евклидову плоскость.*

Доказательство. Из курса алгебры следует, что любое линейное однородное преобразование евклидовой плоскости с определителем $+1$ может быть однозначно представлено в виде композиции собственного вращения и треугольного преобразования (теорема об ортогонализации базиса). Итак, любая матрица $g \in SL(2, \mathbf{R})$ допускает (однозначно) представление в виде произведения матриц: $g = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$, где $\alpha > 0$. Так как матрицы $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ образуют окружность, а матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$ — евклидову плоскость, то лемма доказана. $\square$

Как будет показано, подгруппа $L(2, \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ полностью исчерпывает собою всю группу $\mathrm{Iso}\,(L_2)$. Отметим также, что группы изометрий сферы и плоскости Лобачевского имеют одинаковую размерность и могут быть снабжены структурой гладких трехмерных многообразий.

Замечание о группе изометрий псевдоевклидова пространства $\mathbf{R}^3_1$. Напомним, что группа изометрий двумерной сферы совпала с группой изометрий $\mathbf{R}^3$, оставляющих на месте точку 0, т. е. с группой $O(3)$. Совершенно аналогично плоскость Лобачевского может быть реализована в $\mathbf{R}^3_1$ в виде одной из полостей двуполостного гиперболоида (псевдосферы мнимого радиуса), и любое движение плоскости Лобачевского будет индуцировано некоторой изометрией $\mathbf{R}^3_1$. Поскольку псевдосфера мнимого радиуса состоит из двух связных компонент, то $\mathrm{Iso}\,(L_2)$ не исчерпывает собою всю группу $\mathrm{Iso}\,(\mathbf{R}^3_1)_0$, где через $\mathrm{Iso}\,(\mathbf{R}^3_1)_0$ обозначены все изометрии $\mathbf{R}^3_1$, оставляющие неподвижной точку 0. Следует добавить еще преобразования, порожденные отражениями, переставляющими две полости гиперболоида. Итак, группа $\mathrm{Iso}\,(\mathbf{R}^3_1)_0$ состоит из четырех связных компонент. На рис. 10 показаны четыре преобразования g_1, g_2, g_3, g_4, сохраняющие псевдосферу $S^2_1 \supset L_2$ и принадлежащие к различным компонентам связности группы $\mathrm{Iso}\,(\mathbf{R}^3_1)_0$.

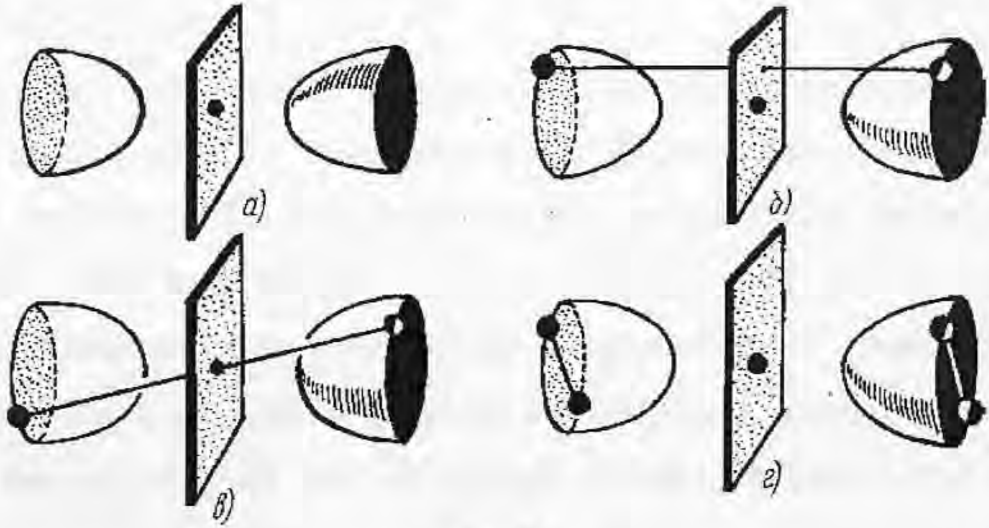

Рис. 10

✍ ***Пример 7.*** Еще раз вернемся к группе движений евклидовой плоскости. Найденные нами преобразования вида $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, где $A \in O(2)$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$, можно записать в комплексной форме: $w = az+b$, где $b \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{C}$, $|a| = 1$, т. е. $w = e^{i\varphi} \cdot z + b$. Эта группа преобразований изоморфна матричной группе, состоящей из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a = e^{i\varphi}$. Сохранение евклидовой метрики следует из тождества: $dw = a\,dz$; $dw\,d\overline{w} = |a|^2 dz\,d\overline{z}$.

Как и в случае плоскости, легко проверяется, что группа линейных изометрий $\mathrm{Iso}\,(\mathbf{R}^n)$ евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ может быть представлена как группа преобразований $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, где матрица A принадлежит ортогональной группе $O(n)$, а вектор $\mathbf{b}$ задает сдвиг. Группа $\mathrm{Iso}\,(\mathbf{R}^n)$ изоморфна матричной группе, состоящей из матриц вида: $\left(\begin{array}{ccc|c} A & & & \mathbf{b} \\ \hline & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right)$. Итак, группа $\mathrm{Iso}\,(\mathbf{R}^n)$, как топологическое пространство, гомеоморфна прямому произведению $O(n) \times \mathbf{R}^n$, где $O(n)$ и $\mathbf{R}^n$ рассматриваются как топологические пространства. Это разложение, впрочем, не является групповым.