Лекция 4

Геометрия на сфере, плоскости

Рассмотрим евклидову плоскость, отнесенную к декартовым координатам x, y и снабженную евклидовой метрикой $dl^2 = dx^2 + dy^2$ (отметим, что иногда для обозначения бесконечно малого элемента длины дуги гладкой кривой используют, наряду с dl^2, также символ ds^2. Мы будем пользоваться обоими этими обозначениями). Эта риманова метрика порождает соответствующее скалярное произведение $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2$. Задание скалярного произведения порождает понятие окружности как множества точек, являющихся концами векторов длины R, выходящих из одной точки. Если ввести полярные координаты на плоскости, то окружности с центром в точке O окажутся координатными линиями вида $r(t) = \text{const}$. В полярной системе координат бесконечно малый элемент дуги окружности равен $Rd\varphi$.

Рассмотрим стандартное вложение двумерной сферы в трехмерное пространство, отнесенное к декартовым координатам x, y, z в виде множества точек, являющихся концами векторов длины R, выходящих из точки O. Прежде чем переходить к более подробному изучению геометрии двумерной сферы, остановимся на следующем вопросе. Допустим, что на сфере S^2 расположена кривая $\gamma(t)$, и пусть нас интересует вычисление длины этой кривой. Поскольку события происходят в евклидовом пространстве, то можно рассмотреть объемлющую евклидову метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, записать кривую в параметрическом виде $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и вычислить интересующую нас величину по рецептам, изложенным ранее. Точно также можно поступить, если мы хотим измерить угол между двумя пересекающимися на сфере S^2 кривыми $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ (когда обе кривые целиком лежат в сфере S^2). Для этого нужно найти декартовы координаты векторов $\dot\gamma_1$ и $\dot\gamma_2$ (в трехмерном евклидовом пространстве) и, снова используя объемлющую евклидову метрику, вычислить этот угол.

50

Однако все эти вычисления используют только свойства евклидовой метрики, сосредоточенной в непосредственной близости от сферы S^2. Иными словами, можно с самого начала рассмотреть евклидову метрику, сосредоточенную только в точках двумерной сферы, и записать метрику в координатах на сфере. Поскольку сфера S^2 задается в $\mathbf{R}^3$ одним уравнением, то число параметров, описывающих положение точки на сфере, равно двум. Особенно наглядно это видно, если в $\mathbf{R}^3$ введены сферические координаты (r, θ, φ). Тогда двумерная сфера радиуса R задается одним уравнением: $r = R = \text{const}$. Вычислим скалярное произведение векторов, касательных к кривым, целиком лежащим на сфере S^2 (и тем самым являющихся касательными к сфере). Пусть

$$\gamma_1(t) = (R, \theta_1(t), \varphi_1(t)); \quad \gamma_2(t) = (R, \theta_2(t), \varphi_2(t)),$$

тогда

$$\dot\gamma_1(t) = (0, \dot\theta_1, \dot\varphi_1), \quad \dot\gamma_2(t) = (0, \dot\theta_2, \dot\varphi_2),$$
$$\text{т. е.} \quad \langle\dot\gamma_1, \dot\gamma_2\rangle = R^2(\dot\theta_1\dot\theta_2 + \sin^2\theta(t)\dot\varphi_1\dot\varphi_2),$$

где $(\theta(t), \varphi(t))$ — координаты точки пересечения кривых $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$. Отсюда видно, что вычисленное нами скалярное произведение совпадает со скалярным произведением векторов: $(\dot\theta_1, \dot\varphi_1)$ и $(\dot\theta_2, \dot\varphi_2)$ относительно новой билинейной формы: $R^2(\dot\theta_1\dot\theta_2 + \sin^2\theta(t)\dot\varphi_1\dot\varphi_2)$. Эта билинейная форма определяет квадратичную форму $R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, получающуюся из соответствующей квадратичной формы в евклидовом пространстве $dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ путем подстановки в нее вместо переменных r, θ, φ новых функций от θ, φ вида: $r = R = \text{const}$, $\theta = \theta$, $\varphi = \varphi$. Будем говорить, что полученная риманова метрика на сфере $S^2 : R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, является *индуцированной* на сфере объемлющей евклидовой метрикой трехмерного пространства.

Поскольку на сфере S^2 положение точки задается двумя параметрами θ и φ (широта и долгота), то радиус-вектор точки на сфере можно представить в виде: $x = R\cos\theta\cos\varphi$, $y = R\cos\theta\sin\varphi$, $z = R\sin\varphi$. Подставляя эти три функции (от двух параметров) в выражение для квадрата дифференциала длины дуги в трехмерном пространстве $dx^2 + dy^2 + dz^2$, мы и получаем:

$$(dx(\theta, \varphi))^2 + (dy(\theta, \varphi))^2 + (dz(\theta, \varphi))^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Этот пример будет в дальнейшем обобщен и окажется частным случаем индуцированных римановых метрик. Для этого в последующих главах будет введено понятие поверхности, на которую мы будем ограничивать объемлющую риманову метрику. Двумерная сфера, стандартно вложенная в трехмерное пространство, как раз и является поверхностью. Вскоре мы приведем и другие примеры поверхностей, которые

(См. также предыдущую лекцию)

будем в основном задавать вектор-функциями от нескольких переменных. Например, если в трехмерном евклидовом пространстве задана вектор-функция $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где параметры u, v меняются в какой-то области на плоскости, то этот радиус-вектор будет заметать некоторое множество, которое $\Bigg($в предположении, что векторы $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ и $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ линейно независимы в каждой точке $(u, v)\Bigg)$, мы и будем называть двумерной поверхностью в трехмерном пространстве. (Общее определение будет дано позже.) Если нам задана такая поверхность, то на ней возникает квадратичная форма, индуцированная евклидовой римановой метрикой: $(dx(u, v))^2 + (dy(u, v))^2 + (dz(u, v))^2$.

Итак, рассмотрим двумерную сферу S^2, стандартно вложенную в $\mathbf{R}^3$ и снабженную индуцированной римановой метрикой. Как было вычислено ранее, явный вид этой метрики такой: $R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, где θ, φ — сферические координаты. На сфере S^2 можно ввести также и другие криволинейные координаты. Приведем основные примеры.

Рассмотрим стереографическую проекцию сферы S^2 на плоскость $\mathbf{R}^2$. Для этого поместим центр сферы радиуса R в начало координат O и рассмотрим координатную плоскость $\mathbf{R}^2(x, y)$, проходящую через точку O; отметим на сфере S^2 северный полюс N и южный полюс S. Пусть P — произвольная точка сферы, отличная от N; соединим северный полюс N с точкой P и продолжим отрезок NP до пересечения с плоскостью $\mathbf{R}^2(x, y)$ в точке Q. Сопоставим точке P точку Q. Мы получим некоторое отображение $h : S^2 \to \mathbf{R}^2$, которое и называется *стереографической проекцией* сферы на плоскость. Отображение h определено во всех точках сферы

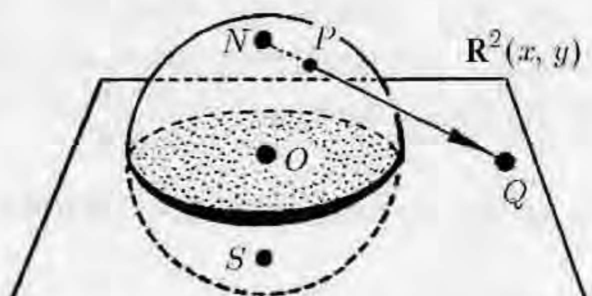

Рис. 1

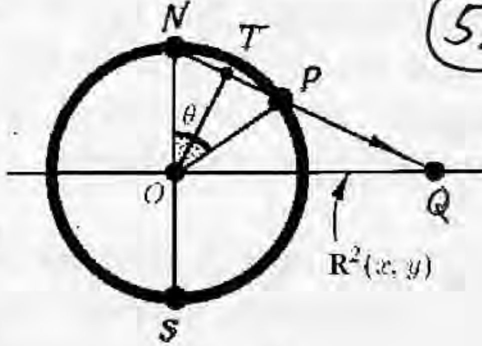

Рис. 2

за исключением северного полюса N. Можно условно считать, что северный полюс «изображает» бесконечно удаленные точки двумерной плоскости (см. рис. 1). Запишем отображение h аналитически. Для этого следует ввести координаты как на сфере, так и на плоскости. Рассмотрим, например, сферические координаты r, θ, φ в $\mathbf{R}^3$. Тогда они индуцируют координаты на сфере S^2 и на плоскости $\mathbf{R}^2(x, y)$. В самом деле, на сфере возникают координаты (θ, φ), а на $\mathbf{R}^2$ — координаты (r, φ) (полярные координаты). Так как отображение h сохраняет координату φ, то для определения h достаточно найти зависимость радиуса r от угла θ. Рассмотрим плоское сечение S^2 плоскостью, проходящей через точки P, O, N (рис. 2). Так как угол ONT равен $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$, то из прямоугольного треугольника ONQ получаем: $r = OQ = R\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right) = R\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}$. Таким образом, формулы замены координат выглядят так: $\varphi = \varphi$; $r = R\operatorname{ctg}(\theta/2)$.

Найдем матрицу Якоби этой замены. Она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{R}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad J = -\frac{R}{2\sin^2\frac{\theta}{2}};$$

таким образом, замена является регулярной во всех точках, за исключением северного полюса. Тем самым на сфере S^2 можно ввести координаты, заимствованные с полярных координат на евклидовой плоскости. Какой вид принимает метрика сферы в этих координатах? Имеем:

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2); \quad dr = \frac{-R}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta;$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{R^2 + r^2}; \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{r^2}{R^2 + r^2};$$

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Полученный нами вид метрики на сфере отличается от евклидовой метрики на плоскости, записанной в полярных координатах, а именно,

$(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$, только переменным множителем: $\dfrac{4R^4}{R^2 + r^2}$. Такие метрики и такие координаты называются конформными.

Определение 1. Риманова метрика $g_{ij}(z)$, заданная в области C евклидова пространства в криволинейных координатах $z^1, \ldots, z^n$, называется *конформно-евклидовой*, если она имеет вид: $g_{ij}(z) = \lambda(z) g^l_{ij}(z)$, где $\lambda(z)$ — гладкая функция на C, а $g^l_{ij}(z)$ — компоненты евклидовой метрики, записанной в координатах $z^1, \ldots, z^n$. Иными словами, метрика $g_{ij}(z)$ называется конформно-евклидовой, если существует такая система координат x, в которой $g_{ij}(x) = \lambda(x) \sum\limits_{k=1}^{n} (dx^k)^2$.

Таким образом, на евклидовой плоскости (отнесенной к полярным координатам), можно рассмотреть две римановы метрики: $dr^2 + r^2 d\varphi^2$ (евклидова) и $\dfrac{4R^4}{R^2 + r^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$ (метрика сферы). Обе метрики можно считать заданными на одной и той же области определения. Вернемся к вопросу, затронутому выше, — вопросу об эквивалентности метрик. Существует ли такая регулярная замена координат на плоскости $\mathbf{R}^2$, при которой метрика $dr^2 + r^2 d\varphi^2$ перейдет в метрику $\dfrac{4R^4}{R^2 + r^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$? Мы предъявим интуитивное обоснование того факта, что эти метрики неэквивалентны. Для этого подсчитаем длину окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в двух метриках: в евклидовой и в сферической. Мы понимаем здесь окружность как гладкую траекторию на плоскости $\mathbf{R}^2$, длину которой можно вычислять в различных метриках. Найдем интересующую нас величину как функцию от радиуса окружности. Евклидова формула нам известна: $l_e = 2\pi a$, где a — радиус (подсчитанный в евклидовой метрике). Найдем длину окружности в сферической метрике. Сначала найдем соотношение между евклидовой величиной радиуса a и его величиной ρ в сферической метрике. Имеем:

$$\rho = 2 \int\limits_0^a \frac{R^2}{R^2 + r^2} dr = 2R \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{R}\right);$$

$$l_c = 2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 \cdot a d\varphi}{R^2 + a^2} = \frac{4\pi a R^2}{R^2 + a^2} = 2\pi R \sin \frac{\rho}{R}$$

(см. рис. 3). Геометрически величина ρ изображается как длина меридиана, соединяющего северный полюс с переменной точкой на окружности.

Вычисления, выполненные нами, на языке римановых метрик, можно произвести, используя элементарные геометрические соотношения. Таким образом, если бы мы смогли дать внутреннее определение окружности радиуса a с центром в некоторой точке, в терминах, не зависимых от выбора координат, то формула длины окружности тоже не зависела бы от выбора координат. Такое определение имеется. Назовем расстоянием между двумя точками P и Q минимальную длину кривой, соединяющей эти точки (минимум берется по всем гладким кривым, соединяющим точки). Тогда окружностью радиуса a с центром в точке P назовем множество всех точек Q, расстояние от которых до точки P равно a. Для того чтобы применить это определение к сфере, необходимо доказать, что расстояние между двумя точками P и Q на сфере S^2 равняется длине дуги большой окружности, проходящей через точки P и Q.

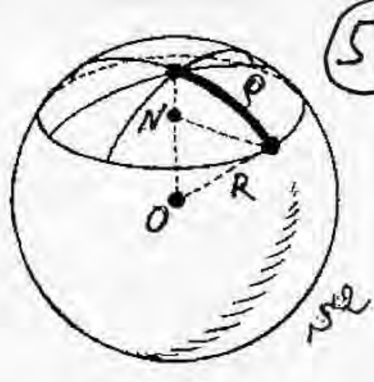

Рис. 3

В частности, при $\rho \to 0$ (т. е. для окружностей малого радиуса по сравнению с R) получаем, что $l_c \sim 2\pi\rho$, т. е. полученная формула переходит в евклидово выражение для длины окружности. Сопоставляя две формулы: «евклидова длина окружности радиуса ρ равна $2\pi\rho$ » и «сферическая длина окружности радиуса ρ равна $2\pi R \sin \dfrac{\rho}{R}$», мы видим, что эти функции существенно различны; в частности, одна линейная, а вторая периодическая.

Тот факт, что выпуклая поверхность сферы не может быть деформирована с сохранением длин кривых на ней в область на евклидовой плоскости, можно представить себе, если вспомнить, какое требуется усилие, чтобы сплющить сферический сегмент на плоскость, по сравнению с усилием, которое мы прикладываем при изгибании, например, прямого кругового цилиндра, помещающем его на плоскость.

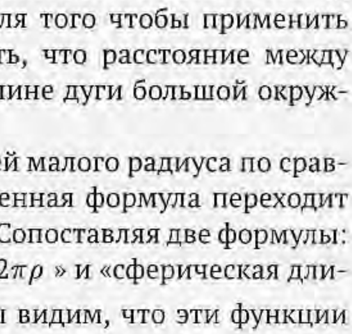

Рис. 4

Проведенные вычисления длины окружности на сфере можно провести и в сферических координатах (θ, φ), в которых метрика сферы имеет вид: $R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Областью определения этой метрики можно считать диск радиуса π на евклидовой плоскости переменных θ, φ. В этих координатах очевидно, что длина окружности радиуса θ равна $2\pi R \sin\theta$ (рис. 4). При этом точка O отождествляется с северным полюсом сферы, а граничная окружность (радиуса π) имеет длину 0, так как $d\theta = 0$, $\sin(\pi) = 0$, а потому вся эта окружность склеивается в точку, которая и отождествляется с южным полюсом сферы.

Рассмотрим вопрос о вычислении длин кривых на сфере. Разберем для примера так называемую локсодрому — траекторию, пересекающую каждый меридиан сферы под одним и тем же углом α. Задача: найти длину этой кривой от какой-нибудь точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$. Эта кривая хорошо известна в теории навигации, по ней удобно прокладывать маршруты самолетов между фиксированными точками. Дело в том, что угол α легко поддается измерению: он равен углу между вектором скорости самолета и вектором, определяемым стрелкой компаса. Тем самым достаточно следить только за одним этим параметром (при этом мы огрубляем реальную ситуацию), чтобы двигаться по заранее проложенной локсодроме, соединяющей начальный и конечный пункты полета.

Найдем параметрическое задание локсодромы. Для этого удобно применить к сфере (и, следовательно, к локсодроме) стереографическую проекцию, после чего мы получим некоторую траекторию на плоскости, отнесенной для удобства к полярным координатам (r, φ). Как мы уже вычисляли, метрика сферы в этих координатах имеет вид: $\dfrac{4R^4}{R^2 + r^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$. При стереографической проекции меридианы перейдут в лучи, выходящие из начала координат на плоскости. Мы утверждаем, что образом локсодромы будет такая кривая на плоскости, которая пересекает все эти лучи под тем же углом α (и тем самым однозначно, с точностью до поворота, определяется этим углом). Это следует из более общего факта: стереографическая проекция сохраняет углы между пересекающимися кривыми. Такие преобразования называются *конформными*. Более точно рассмотрим на сфере сферическую метрику, индуцированную объемлющей евклидовой метрикой, и пусть две пересекающиеся кривые образуют в точке пересечения угол $\alpha(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2)$ (мы предполагаем углы ориентированными) (см. рис. 5). Число $\alpha(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2)$ определено в п. 2. Кривые γ_1 и γ_2 переходят после отображения h (стереографическая проекция) в некоторые кривые q_1 и q_2, угол между которыми, подсчитанный в евклидовой метрике dl^2 на плоскости, мы обозначим через $\beta(\dot q_1, \dot q_2)$.

Лемма 1. *Для любых пересекающихся кривых γ_1 и γ_2 имеет место равенство:* $\alpha(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) = \beta(\dot q_1, \dot q_2)$.

Доказательство. Достаточно сравнить формулы для углов α и β, а также использовать запись сферической метрики после отображения h в поляр-

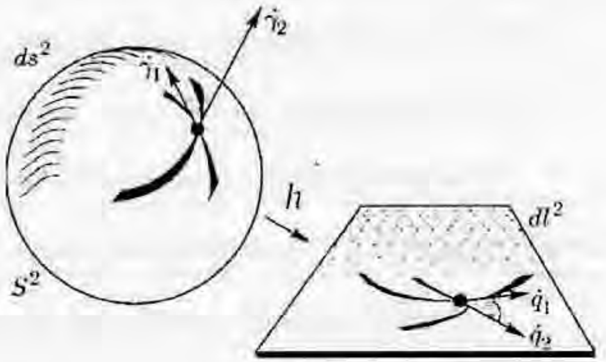

Рис. 5

ных координатах на плоскости $\mathbf{R}^2$. Имеем: $ds^2(r,\varphi) = \dfrac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + {}$ $+ r^2 d\varphi^2)$, $dl^2(r,\varphi) = (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$. Ясно, что $ds^2(r,\varphi) = \lambda^2(r) dl^2(r,\varphi)$. Тогда:

$$\alpha(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) = \frac{\lambda^2(\dot r_1 \dot r_2 + r^2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2)}{\sqrt{\lambda^2(\dot r_1^2 + r^2\dot\varphi_1^2)\lambda^2(\dot r_2^2 + r^2\dot\varphi_2^2)}} = \beta(\dot q_1, \dot q_2).$$

Лемма доказана. $\square$

Имеет место более общее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $g_{ij}(z)$ и $q_{ij}(z)$ — две метрики, заданные в области C евклидова пространства в криволинейных координатах $(z^1, \ldots, z^n)$. Если в каждой точке $z \in C$ выполнено тождество: $g_{ij} = \lambda q_{ij}$, где $\lambda = \lambda(z)$ — гладкая функция, то углы между пересекающимися кривыми, вычисленные в этих метриках, совпадают.*

Доказательство дословно повторяет рассуждение в лемме 1.

Вернемся к локсодроме. В силу леммы 1 достаточно найти ее уравнение на евклидовой плоскости. Условие сохранения угла α означает, что $\langle(\dot r, \dot\varphi), (1,0)\rangle = \cos\alpha = \mathrm{const}$, где $(\dot r, \dot\varphi) = \dot\gamma$ — касательный вектор к локсодроме, $(1,0)$ — вектор скорости луча: $(\varphi = \mathrm{const}, r = t)$. Отсюда: $\dfrac{\dot r}{\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}} = \cos\alpha = \mathrm{const}$. Далее, $\dot r^2 \sin^2\alpha = r^2\dot\varphi^2\cos^2\alpha$; $\dot r / r = \dot\varphi \operatorname{ctg}\alpha$; $(\ln \dot r)' = \dot\varphi \operatorname{ctg}\alpha$, $r = c \cdot e^{\varphi} \operatorname{ctg}\alpha$, где $c = \mathrm{const}$. Положив $\varphi = t$, имеем $\dot r = c \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot e^{\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$; $\dot\varphi = 1$. Вычисляя длину дуги, получаем $l(\gamma) = c' \cdot e^{\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha} + c''$, где c'', $c' = \mathrm{const}$. Задача: найдите значение постоянных c', c''.

Перейдем к вычислению римановой метрики, индуцированной на псевдосфере мнимого радиуса объемлющей индефинитной метрикой. Поступим по аналогии с обычной сферой, введя в пространстве $\mathbf{R}_1^3$ аналог сферических координат, с помощью которых запишем в удобной для нас форме уравнение псевдосферы. В плоскости YOZ введем полярные координаты (r, φ), где φ — угол с осью y. Кроме того, введем еще параметр θ' — аналог соответствующего параметра в обычных сферических координатах. Сделаем теперь замену: $y = \alpha \operatorname{sh} \theta' \cos \varphi$; $z = \alpha \operatorname{sh} \theta' \sin \varphi$; $x = \alpha \operatorname{ch} \theta$. В этой «псевдосферической» системе координат уравнение псевдосферы запишется так: $\alpha = \mathrm{const}$. Это непосредственно вытекает из уравнения псевдосферы мнимого радиуса. 57

Вычислим вид римановой метрики на псевдосфере в координатах u^1, u^2 на модели Пуанкаре. Используя формулы для стереографической проекции и подставляя их в выражение для квадрата дифференциала длины дуги в $\mathbf{R}^3_1$, получаем (проверьте!):

$$-(dx(u^1,u^2))^2 + (dy(u^1,u^2))^2 + (dz(u^1,u^2))^2 = \frac{4((du^1)^2 + (du^2)^2)}{(\alpha^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2}.$$

Следовательно, в полярных координатах (пусть $\alpha = 1$) на модели Пуанкаре эта же метрика запишется так: $ds^2 = 4\dfrac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$. Получившаяся метрика является конформной, т. е. отличается от евклидовой на переменный множитель $\lambda(r) = 4(1-r^2)^{-2}$. Перепишем эту метрику в псевдосферических координатах. Для этого сделаем замену (r,φ) на новые параметры (χ,φ) по формулам: $r = \operatorname{cth}(\chi/2)$, $\varphi = \varphi$. Непосредственное вычисление дает (проверьте!): $ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi d\varphi^2$. Этот вид метрики аналогичен записи метрики сферы в координатах (θ,φ), но только обычные тригонометрические функции заменены здесь на гиперболические.

Найдем геометрический смысл параметра χ. Рассмотрим, например, плоскость XOZ, тогда на ней возникает индуцированная псевдоевклидова метрика $ds^2 = -dx^2 + dz^2$. Псевдосфера пересекает эту плоскость по гиперболе, параметрическое задание которой в псевдосферических координатах имеет вид (мы считаем, что $\alpha = 1$) : $x = \operatorname{ch}\theta'$, $z = \operatorname{sh}\theta'$ (рис. 6). В качестве параметра θ' возьмем евклидово значение угла POS; тогда, очевидно, $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{th}\theta'$. Найдем длину отрезка гиперболы в псевдоевклидовой метрике от значения 0 до θ'. Имеем: $l = \displaystyle\int_0^{\theta'} \sqrt{-\operatorname{sh}^2\theta + \operatorname{ch}^2\theta}\, d\theta = \theta'$.

Таким образом, θ' совпадает с длиной «меридиана» на псевдосфере, идущего из южного полюса S в переменную точку P, т. е. этот параметр

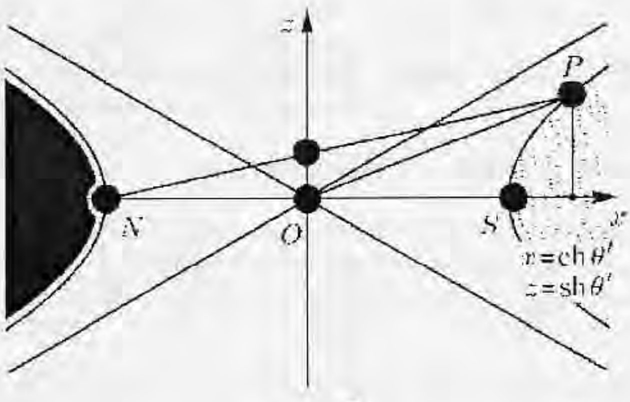

Рис. 6

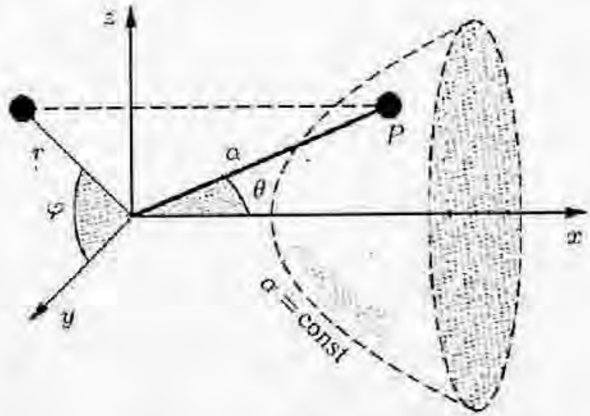

Рис. 7

аналогичен обычному параметру θ на сфере. В частности, мы прояснили геометрический смысл псевдоевклидовых координат (см. рис. 7). Как видно, псевдосферические координаты аналогичны сферическим координатам. Если $\alpha \neq 1$, то длина «меридиана» равна $\alpha\theta'$.

Рассмотрим стереографическую проекцию (для простоты, по-прежнему рассматриваем только плоскость XOZ, так как все наши вычисления сохраняются при вращениях плоскости XOZ вокруг оси OX). Так как $z = \dfrac{2u^2\alpha}{\alpha^2 - r^2}$, то получаем: $z = \dfrac{2r}{1-r^2}$ (так как $u^2 = r$ в плоскости XOZ). Так как $z = \operatorname{sh}\theta' \sin\varphi = \operatorname{sh}\theta'$ $\left(\text{так как } \varphi = \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\dfrac{2r}{1-r^2} = \operatorname{sh}\theta'$, откуда $r = \operatorname{cth}\left(\dfrac{\theta'}{2}\right)$. Тем самым, доказано, что $\chi = \theta'$. Итак, мы получили на модели Пуанкаре риманову метрику $4\dfrac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$.

Отметим, что эта метрика является положительно определенной, хотя объемлющая метрика была псевдоевклидовой, а потому индефинитной. Таким образом, некоторые поверхности (например, псевдосфера мнимого радиуса) могут нести на себе положительно определенную метрику и быть, в то же время, вложены в пространство с индефинитной метрикой. То обстоятельство, что на псевдосфере индуцируется положительно определенная метрика, можно усмотреть из наглядных геометрических соображений. Рассмотрим сечение псевдосферы плоскостью XOZ, и пусть $\boldsymbol{\xi}$ — вектор скорости гиперболы в точке P. Мы хотим убедиться в том, что его псевдоевклидова длина вещественна. Это следует из рис. 8 на котором видно, что вектор $\boldsymbol{\xi}$ расположен вне светового конуса (с вершиной в точке P), а потому является пространственно-подобным.

Полученная выше риманова метрика называется *метрикой Лобачевского* (в ее записи на модели Пуанкаре). Эту метрику можно трактовать

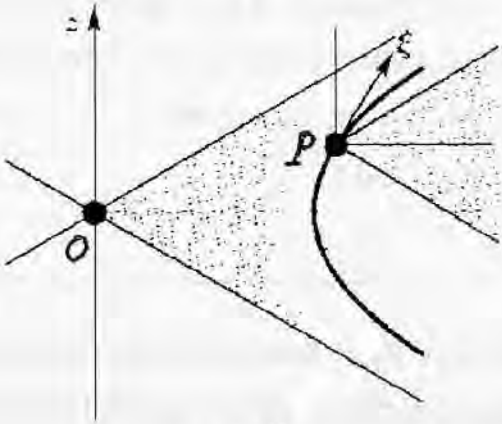

Рис. 8

как новую метрику, заданную на круге в евклидовой плоскости, отнесенном *к обычным* полярным координатам. Раньше мы познакомились с двумя другими примерами римановых метрик, заданных в единичном круге (для простоты считаем, что радиус круга равен 1): это евклидова и сферическая метрики. Было доказано, что эти метрики не эквивалентны. Докажем, что метрика Лобачевского не эквивалентна ни одной из двух предыдущих метрик. Применим уже использованный выше прием: найдем длину окружности на плоскости Лобачевского и выразим ее как функцию от радиуса (вычисленного в метрике Лобачевского). Будем считать для простоты, что окружность имеет своим центром точку O и ее евклидов радиус равен a. Найдем его длину в метрике Лобачевского.

По определению длины кривой, получаем $\chi = \int\limits_0^a \frac{dr}{1-r^2} = 2\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$,

т. е. $a = \operatorname{th}\left(\frac{\chi}{2}\right)$. Длина окружности $\quad l = \int\limits_0^{2\pi} \frac{a\,d\varphi}{1-a^2} = \frac{2\pi a}{1-a^2} = 2\pi \operatorname{sh}(\chi)$.

Если χ достаточно мало, то приближенно можно считать, что $l \sim 2\pi\chi$, т. е. получаем формулу для длины окружности в евклидовой метрике. Поскольку, как и в случае двумерной сферы, мы выразили длину окружности (в метрике Лобачевского) в инвариантных (относительно замен координат) терминах, т. е. через величину радиуса, также подсчитанную в метрике Лобачевского, то приведенная формула для длины окружности инвариантна относительно замен координат, а потому метрика Лобачевского не эквивалентна ни одной из двух предыдущих метрик. На рис. 9 приведена сравнительная таблица метрик сферы и псевдосферы.

Укажем еще две полезные формы записи перечисленных метрик, — так называемые комплексные формы. Рассмотрим евклидову плоскость и введем на ней «комплексную координату» $z = x + iy$. Тогда в качестве $\bar{z}$ возьмем $x - iy$. Будем рассматривать замену $(x, y) \to (z, \bar{z})$ как формальную замену. Матрица Якоби имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. Якобиан $J = -2i \neq 0$; а потому замену можно считать регулярной. Так как $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, то евклидова метрика в этих координатах принимает вид: $ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + idy)(dx - idy) = dzd\bar{z}$. Метрика сферы, следовательно, принимает вид: $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \dfrac{dzd\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$, где $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$. Совершенно аналогично получаем комплексную форму метрики Лобачевского: $ds^2 = \dfrac{dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$.

Для метрики Лобачевского существует еще одна полезная форма записи на верхней полуплоскости. Рассмотрим еще один экземпляр евклидовой плоскости, на которой введем комплексную координату w и выделим верхнюю полуплоскость (т. е. множество всех точек, для которых $\operatorname{Im}(w) > 0$, где $w = u + iv$; $v = \operatorname{Im}(w)$). Рассмотрим отображение $\mathbf{R}^2(w) \to \mathbf{R}^2(z)$, задаваемое формулой: $z = \dfrac{aw + b}{cw + d}$, где a, b, c, d — ком-

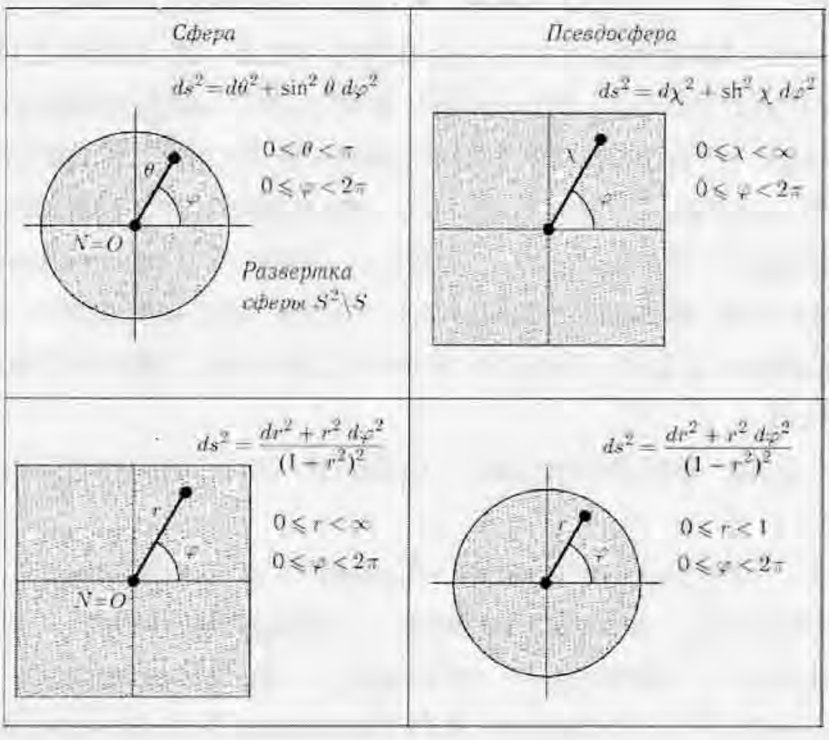

Рис. 9

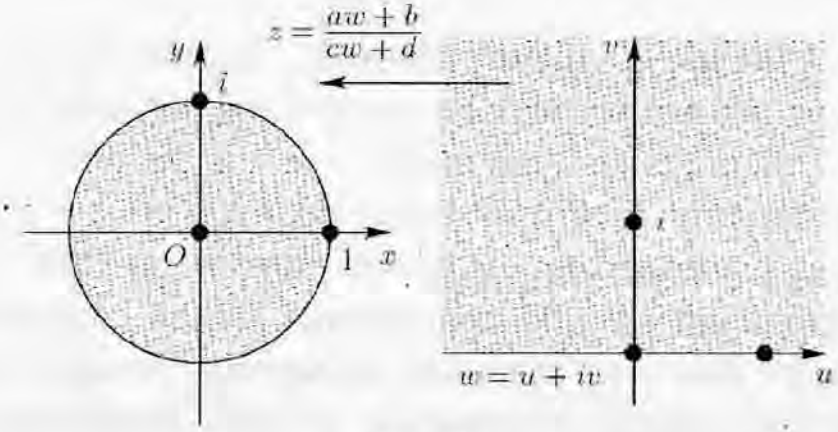

Рис. 10

плексные числа такие, что $ad - bc \neq 0$. Такие отображения называются дробно-линейными. Отметим, что если $ad - bc = 0$, то это отображение переводит всю плоскость $\mathbf{R}^2(w)$ в одну точку, а потому мы и исключили этот тривиальный случай.

Наша цель: найти такое отображение $z = \dfrac{aw+b}{cw+d}$, которое перевело бы всю верхнюю полуплоскость во внутренность единичного круга $|z| < 1$ на плоскости z. При этом вещественная прямая $\mathrm{Im}\,(w) = 0$ должна перейти в граничную окружность $|z| = 1$. Оказывается, любое невырожденное дробно-линейное отображение (т. е. такое, для которого $ad - bc \neq 0$) однозначно определяется образом любых трех точек w_1, w_2, w_3, не лежащих на одной прямой в плоскости w. Мы не будем здесь доказывать это утверждение, поскольку в таком виде оно нам не потребуется, а продемонстрируем это свойство дробно-линейных отображений на конкретном примере, который и окажется искомым отображением полуплоскости на единичный круг. Найдем такое отображение $z = \dfrac{aw+b}{cw+d}$, чтобы $0 \to 1$, $i \to 0$, $1 \to i$ (циклическая перестановка) (см. рис. 10). Получаем следующую систему уравнений для a, b, c, d: $1 = \dfrac{b}{a}$; $i = \dfrac{a+b}{c+d}$; $0 = \dfrac{ai+b}{ci+d}$. Решая эту систему (проверьте!), получаем: $z = \dfrac{1+iw}{1-iw}$. Итак, мы нашли одно дробно-линейное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный круг. (Таких преобразований имеется много!) Докажем, что преобразование $z = \dfrac{1+iw}{1-iw}$ определяет регулярную замену координат. В самом деле, сначала представим преобразование $z = \dfrac{1+iw}{1-iw}$ в виде: $z = -1 - \dfrac{2}{iw-1}$; получаем, что для доказательства регулярности замены достаточно доказать, что преобразование: $z = \frac{1}{w}$ является регулярной заменой координат (поскольку искомое преобразование является композицией преобразований: $z = \frac{1}{w}$, сдвига на постоянный вектор, поворота и растяжения). Записав отображение $z = \frac{1}{w}$ в терминах вещественной и мнимой части, получаем: $x = \frac{u}{u^2+v^2}$; $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$. Матрица Якоби равна (с точностью до положительного множителя): $\begin{pmatrix} v^2-u^2 & 2uv \\ 2uv & v^2-u^2 \end{pmatrix}$. Отсюда: $J = (u^2+v^2)^2 > 0$. Утверждение доказано.

Найдем dz. Имеем: $dz = \frac{idw(1-iw)+idw(1+iw)}{(1-iw)^2} = \frac{2idw}{(1-iw)^2}$. Отсюда: $dzd\overline{z} = \frac{4dwd\overline{w}}{|1-iw|^4}$. Производя замену в выражении: $ds^2 = \frac{dzd\overline{z}}{(1-|z|^2)^2}$, получаем: $ds^2 = \frac{4dwd\overline{w}}{(w-\overline{w})^2} = \frac{du^2+dv^2}{v^2}$. Отсюда еще раз видно, что точки вещественной оси (образ абсолюта модели Пуанкаре) являются бесконечно удаленными точками на плоскости Лобачевского (на этот раз смоделированной на верхней полуплоскости). В самом деле, если мы захотим подсчитать длину отрезка оси Ov, от точки i до точки O (уже не принадлежащей плоскости Лобачевского), то получим $l = \int\limits_0^1 \frac{dv}{v} = \ln v\Big|_0^1 = -\ln(0) \to \infty$.

В какие кривые перейдут при отображении на верхнюю полуплоскость «прямые» плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре)? Сначала решим аналогичный вопрос для эллиптической геометрии. Напомним, что в качестве «прямых» этой геометрии мы рассматривали всевозможные экваторы на сфере S^2. Рассмотрим стереографическую проекцию S^2 на плоскость $\mathbf{R}^2$. В какие кривые перейдут экваторы?

Лемма 4. *При стереографической проекции экваторы переходят либо в окружности на плоскости $\mathbf{R}^2$, либо в прямые, причем, экватор переходит в прямую тогда и только тогда, когда он проходит через северный полюс сферы.*

Доказательство. Сначала запишем стереографическую проекцию в декартовых координатах. Пусть x, y, z — координаты точки P на сфере, а x', y' — координаты ее образа на плоскости (после стереографической проекции). Тогда из рис. 11 получаем соотношения: $x' = \frac{x}{1-z}$; $y' = \frac{y}{1-z}$.

64

Уравнение окружности на сфере радиуса 1 запишем в виде: $\{ax+by+$ $+cz=d;\ x^2+y^2+z^2=1\}$. Имеем:

$$z=\frac{d-ax-by}{c};\quad z=\frac{d-ax'-by'}{c-ax'-by'};\quad 1-z=\frac{c-d}{c-ax'-by'};$$

$$(x')^2(1-z)^2+(y')^2(1-z)^2+z^2=1.$$

Так как $1-z>0$, то $(x')^2+(y')^2=\dfrac{1+z}{1-z}=1+\dfrac{2z}{1-z}=1+\dfrac{2(d-ax'-by')}{c-d}$, т. е.

$$(x')^2+(y')^2+\frac{2a}{c-d}x'+\frac{2b}{c-d}y'=1+\frac{2d}{c-d}.$$

Как известно из аналитической геометрии, это уравнение второго порядка определяет либо прямую, либо окружность на плоскости, в зависимости от соотношений между параметрами a, b, c, d. Лемма доказана. □

Аналогичное утверждение имеет место и для плоскости Лобачевского.

Лемма 5. *Невырожденное дробно-линейное преобразование* $z=\dfrac{aw+b}{cw+d}$ *(т. е. такое, что* $ad-bc\neq 0$*, где* a, b, c, d *— комплексные числа), переводящее двумерную плоскость в себя, отображает прямые и окружности снова в прямые и окружности, причем прямая может перейти в окружность и наоборот.*

Доказательство. Если $c=0$, то утверждение очевидно, так как преобразование $z=\dfrac{a}{d}w+\dfrac{b}{d}$ представляет из себя параллельный сдвиг на вектор

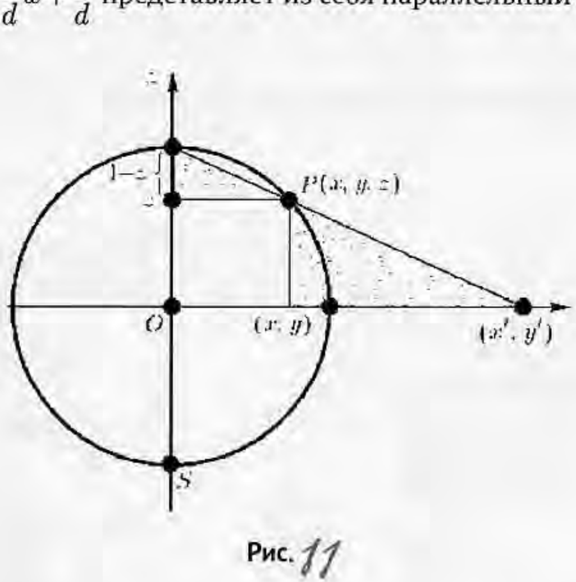

Рис. 11

b/d и умножение на комплексное число a/d (растяжение с поворотом). Пусть $c \neq 0$. Тогда: $z = \dfrac{a}{c} - \dfrac{(ad - bc)}{c(cw + d)}$, т. е. утверждение леммы осталось доказать только для дробно-линейного преобразования $z = \dfrac{1}{w}$.

Рассмотрим произвольную окружность на плоскости z и запишем ее в виде: $|z - z_0|^2 = \varepsilon^2$, т. е. $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \varepsilon^2$. Делая замену: $z = 1/w$, получаем: $(1 - z_0 z)(1 - \bar{z}\bar{z}_0) = \varepsilon^2 - z\bar{z}$, т. е. $z\bar{z}(\varepsilon^2 - z_0\bar{z}_0) + z_0 z + \bar{z}_0 z - 1 = 0$. Ясно, что это уравнение (в зависимости от выбора параметров ε, z_0) определяет либо окружность, либо прямую. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Рассмотрим отображение $z = \dfrac{1 + iw}{1 - iw}$, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный круг. Тогда при этой замене координат «прямые» модели Пуанкаре, т. е. дуги окружностей, ортогональных абсолюту, переходят либо в прямые на плоскости w, ортогональные вещественной оси u (где $w = u + iv$), либо в полуокружности, ортогональные вещественной оси u (см. рис. 12).*

Доказательство. Будем считать, что единичный круг вложен в плоскость комплексной переменной z, а верхняя полуплоскость — в плоскость комплексной переменной w. Тогда отображение $z = \dfrac{1 + iw}{1 - iw}$ можно считать определенным всюду на плоскости w. В силу леммы 5 это отображение переводит прямые либо в прямые, либо в окружности (аналогично и окружности переходят либо в прямые, либо в окружности). Поскольку преобразование $z = \dfrac{1 + iw}{1 - iw}$ имеет обратное: $w = \dfrac{z - 1}{i(z + 1)}$ (напомним, что $ad - bc \neq 0$), то это же самое утверждение верно и для обратного

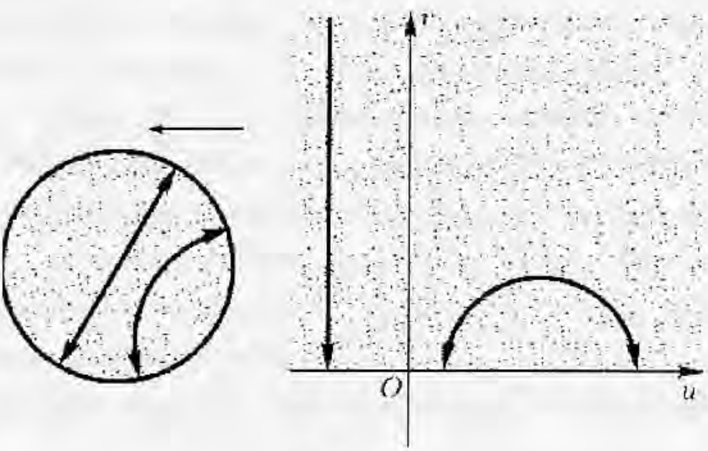

Рис. 12

отображения: $w = \dfrac{z-1}{i(z+1)}$. Следовательно, «прямые» модели Пуанкаре (если их дополнить до прямых и до окружностей на плоскости z) переходят либо в прямые, либо в окружности на плоскости w. Осталось доказать, что они должны быть ортогональны вещественной оси (в точках пересечения с этой осью). Это следует из леммы 6.

Лемма 6. *Любое невырожденное дробно-линейное преобразование* $z = \dfrac{aw+b}{cw+d}$, *отображающее плоскость w на плоскость z, сохраняет углы между гладкими кривыми в точках их пересечения.*

Доказательство леммы 6. Достаточно вычислить евклидову метрику $dzd\bar{z}$ в новых координатах $w = u + iv$. Проверка того факта, что отображение $z = \dfrac{aw+b}{cw+d}$, где $ad - bc \neq 0$, определяет регулярную систему координат, проводится так же, как и проведенное выше рассуждение о регулярности замены: $z = \dfrac{1+iw}{1-iw}$. Прямое вычисление показывает, что

$$dz = \frac{adw(cw+d) - cdw(aw+d)}{(cw+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cw+d)^2}dw,$$

т. е. $dzd\bar{z} = \dfrac{|ad-bc|^2}{|cw+d|^4}dwd\bar{w}$; в координатах (x, y) и (u, v) имеем: $dx^2 + dy^2 = \dfrac{|ad-bc|^2}{|cw+d|^2}(du^2 + dv^2)$. Таким образом, отображение оказалось конформным, т. е. умножающим евклидову метрику на положительный (переменный) множитель и, как было доказано ранее, сохраняет углы между пересекающимися кривыми. Лемма доказана.

Тем самым полностью доказано и следствие 1. □

Рассмотрим более детально свойства отображения $w = \dfrac{z-1}{i(z+1)}$. Точка -1 переходит в бесконечность, следовательно, диаметр на модели Пуанкаре, проходящий через точки 0 и -1, переходит в прямую ортогональную вещественной оси u в точке 0 (см. рис. 13). При отображении $w = \dfrac{z-1}{i(z+1)}$ окружность $|z| = 1$ переходит в вещественную ось u. В самом деле, если $\lambda = \dfrac{e^{i\varphi}-1}{i(e^{i\varphi}+1)}$, то $\bar{\lambda} = \dfrac{e^{i\varphi}-1}{i(e^{i\varphi}+1)} = \lambda$, т. е. λ вещественно.

Рассмотрим плоскость Лобачевского в ее реализации на верхней полуплоскости. Пусть P_1 и P_2 — две произвольные точки в верхней полуплоскости. Тогда они всегда могут быть соединены единственной «прямой»

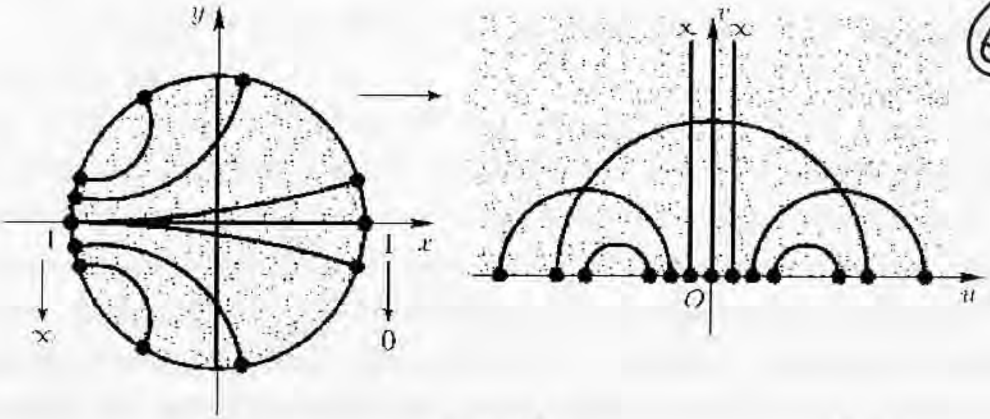

Рис. 13

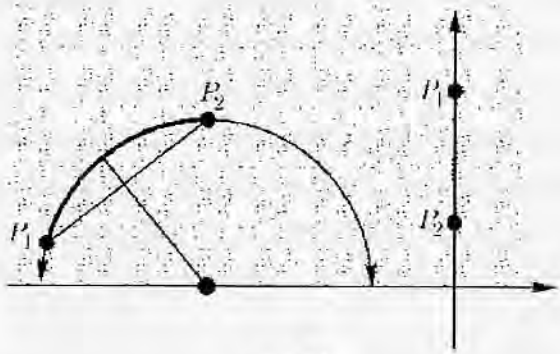

Рис. 14

в плоскости Лобачевского. Построение показано на рис. 14. В том случае, когда обе точки расположены на прямой, ортогональной вещественной оси, «прямая» плоскости Лобачевского совпадает с этой прямой. Найдем явную формулу для длины отрезка «прямой» от точки P_1 до точки P_2 (в метрике Лобачевского). Сначала сделаем простое преобразование «прямой», не меняющее длину ее дуг, — рассмотрим параллельный перенос вдоль оси u. Так как метрика Лобачевского имеет вид $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, то она инвариантна (сохраняется) относительно таких параллельных переносов (или, как иногда говорят, «трансляционно инвариантна» относительно вещественных сдвигов, т. е. сдвигов вдоль оси x). Пусть P_1 и P_2 не лежат на прямой, ортогональной вещественной оси. В частности, можно считать, что центр окружности, изображающей «прямую», проходящую через точки P_1 и P_2, находится в точке O. Уравнение этой «прямой» имеет вид: $r = r_0$, где (r, φ) — полярные координаты. Пусть точки P_1 и P_2 задаются координатами (r_0, φ_1) и (r_0, φ_2), соответственно. Тогда длина дуги от P_1

до P_2 имеет вид:

68

$$l(P_1, P_2) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r_0 d\varphi}{r_0 \sin\varphi} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t}\right) \Bigg|_{\cos\varphi_1}^{\cos\varphi_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\cos\varphi_2)(1-\cos\varphi_1)}{(1-\cos\varphi_2)(1+\cos\varphi_1)} = \ln \left(\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_2}{2}}\right).$$

Пусть теперь точки P_1 и P_2 лежат на прямой, ортогональной вещественной оси. Тогда, очевидно, $l(P_1, P_2) = \ln\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)$, где (x, y_1) и (x, y_2) — координаты точек P_1 и P_2 соответственно. В том случае, когда точки P_1 и P_2 расположены на окружности (с центром на вещественной оси), следует отметить полезное обстоятельство: расстояние между точками P_1 и P_2 не меняется при преобразовании подобия с центром в точке O. Мы считаем, что центр окружности совмещен с началом координат.

Исходя из полученной формулы для длины дуги, можно доказать, что на плоскости Лобачевского для любого треугольника, составленного из отрезков «прямых», выполнено неравенство треугольника, т. е. если P_1, P_2, P_3 — вершины треугольника, то $l(P_1, P_2) + l(P_2, P_3) \geqslant l(P_1, P_3)$.