Понятие римановой метрики в области евклидова пространства

Мы сопоставили каждой криволинейной системе координат z в области C гладкую матричную функцию $G(z)$, преобразующуюся при замене координат как квадратичная форма (в каждой точке). Роль этого набора матричных функций заключается в том, что его задание позволяет вычислить длины кривых в криволинейных координатах. Выделим из всех свойств этого набора матричных функций свойство преобразовываться как квадратичная форма.

Определение. Мы скажем, что задана *риманова метрика* в области C евклидова пространства, если в каждой регулярной системе координат $z^1, \ldots, z^n$ определен набор гладких функций $g_{mp}(z^1, \ldots, z^n)$ таких, что:

1) $g_{mp}(z) = g_{pm}(z)$ (т. е. матрица $G(z)$ симметрична);
2) матрица $G(z) = (g_{mp})$ невырожденна и положительно определена;
3) при замене системы координат $z \to y$ матрица $G(z)$ преобразуется по правилу: $G(y) = d\psi G(z)(d\psi)^T$ (напомним, что мы рассматриваем только регулярные замены координат). Здесь через $d\psi$ обозначена матрица Якоби замены координат $d\psi_{y,z}$.

Замечание. В дальнейшем договоримся о следующем полезном обозначении. Если появляется суммирование вида $\sum\limits_i a_i b^i$ где один индекс i — нижний, а второй индекс i — верхний, то знак суммы будем опускать и писать так: $a_i b^i$. Это же правило распространим и на все аналогичные алгебраические выражения, где встречается несколько повторяющихся верхних и нижних индексов. Например, вместо $\sum\limits_{i,j} g_{ij} a^i b^j$ будем писать $g_{ij} a^i b^j$. Подлинный смысл верхних и нижних индексов мы обсудим в разделе «Тензоры».

Определение. Если в области C задана риманова метрика $G(z) = (g_{ij})$, и в системе координат (z^i) задана гладкая кривая $\gamma(t) = \{z^i(t)\}$, то ее *длиной* от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ называется число

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}(z)\frac{dz^i}{dt} \cdot \frac{dz^j}{dt}}\,dt.$$

Если в некоторой точке $P \in C$ пересекаются две гладкие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ (такие, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$; $\dot\gamma_1(0) \neq 0$, $\dot\gamma_2(0) \neq 0$), то углом между ними (в данной римановой метрике) называется число φ такое, 44

что

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij}(z)\dfrac{dz_1^i(t)}{dt}\dfrac{dz_2^j(t)}{dt}}{\sqrt{g_{ij}(z)\dfrac{dz_1^i(t)}{dt}\dfrac{dz_1^j(t)}{dt}}\sqrt{g_{ij}(z)\dfrac{dz_2^i(t)}{dt}\dfrac{dz_2^j(t)}{dt}}}.$$

Данное выше определение римановой метрики можно сформулировать в инвариантных терминах, не апеллируя к координатной записи метрики. А именно, задание римановой метрики позволяет определить квадратичную форму $\langle\, ,\, \rangle_g$, определенную (в каждой точке области) на множестве всех векторов, касательных к гладким траекториям, проходящим через эту точку. В самом деле, если $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$, где $P \in C$, то для векторов $\boldsymbol{\xi} = \dot\gamma_1(0)$ и $\boldsymbol{\eta} = \dot\gamma_2(0)$, где $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta^1, \dots, \eta^n)$, можно положить: $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle_g = g_{ij}\xi^i\eta^j$. Отметим, что координаты векторов $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ вычисляются в системе координат $z^1, \dots, z^n$.

Лемма. *Отображение $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \to \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle_g$ задает невырожденную, положительно определенную квадратичную форму, гладко зависящую от точки.*

Доказательство. Симметрия и билинейность построенного отображения следует из определения 2.

Убедимся в том, что это соответствие определяет билинейную форму. Сделаем регулярную замену координат $\{z^i\} \to \{z^{i'}\}$. Тогда

$$\gamma_1(t) = \{z_1^1(t), \dots, z_1^n(t)\}; \quad \gamma_2(t) = \{z_2^1(t), \dots, z_2^n(t)\};$$

$$\xi^{i'} = \frac{dz_1^{i'}}{dt} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\frac{dz_1^i}{dt} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\xi^i; \quad \eta^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\eta^i; \quad g_{i'j'} = \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}g_{ij}.$$

Отсюда:

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle_{g'} = g_{i'j'}\xi^{i'}\eta^{j'} = \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}g_{ij}\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k}\xi^k\frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p}\eta^p =$$

$$= \left(\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k}\right)\left(\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}\frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p}\right)g_{ij}\xi^k\eta^p = \delta_k^i\delta_p^j g_{ij}\xi^k\eta^p = g_{ij}\xi^i\eta^j = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle_g,$$

т. е. $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle_g$, действительно, является билинейной формой. При доказательстве мы воспользовались тем, что $\dfrac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\dfrac{\partial z^{i'}}{\partial z^k} = \delta_k^i$. Это вытекает из того, что $(d\psi)(d\psi)^{-1} = E$. Лемма доказана. □

Таким образом, определение римановой метрики можно давать в следующих терминах: будем говорить, что в области C евклидова пространства задана риманова метрика, если в каждой точке области задана билинейная форма (скалярное произведение), определенная на векторах, касательных к гладким кривым, проходящим через эту точку, причем форма невырожденная и положительно определенная. предыдущего

Из леммы вытекает эквивалентность этого определения и определения . В частности, из леммы вытекает независимость длины гладкой кривой от выбора криволинейной системы координат (если риманова метрика фиксирована, т. е. если она задана в какой-то одной системе координат и преобразуется при заменах координат по указанному выше правилу).

Существуют ли римановы метрики? Пример мы привели выше. В самом деле, если в области C в декартовой системе координат задать матрицу $G(x) = (\delta_{ij})$ (где $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в области C), то тогда в любой другой криволинейной системе координат z, получающейся из декартовой системы регулярной заменой, можно, по определению, положить $G(z) = d\psi G(x)(d\psi)^T = (d\psi)(d\psi)^T$, где $d\psi$ — матрица Якоби данной замены. Поскольку любая регулярная система координат z получается из декартовых координат регулярной заменой (см. выше определение регулярных координат), то мы определили в произвольной регулярной системе координат матричную функцию $G(z)$. Из проведенных рассуждений вытекает, что все условия 1)–3), которым должна удовлетворять риманова метрика, выполнены. В самом деле, свойства 1 и 2 проверяются непосредственно из определения $G(z)$; свойство 3 следует из того, что матрица Якоби композиции двух замен координат равна произведению матриц Якоби каждой из этих замен $d\psi_{z_1,z_2} = d\psi_{z_1,z_3} \cdot d\psi_{z_3,z_2}$. Тем самым мы определим риманову метрику, заданную в области евклидова пространства. Эта метрика является евклидовой и квадрат дифференциала дуги гладкой кривой в декартовых координатах записывается так: $(dl)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(dx^i)^2$. Однако, если задана произвольная риманова метрика, то не следует думать, что путем подходящей замены координат в области C, эту метрику можно привести к виду $\sum\limits_{i=1}^{n}(dx^i)^2$.

Определение . Риманова метрика G, заданная в области C, называется *евклидовой*, если в C существует такая (вообще говоря, криволинейная) система координат y, в которой матрица $G(y)$ становится единичной.

Если задана евклидова метрика (относительно некоторой системы координат), то можно описать все другие системы координат, в которых эта метрика также является евклидовой (таких систем много). Это описание мы дадим позже, поскольку не располагаем в данный момент аппаратом для решения этой задачи. Здесь отметим только, что все такие системы координат можно получить из одной системы путем вращений, сдвигов и отражений в евклидовом пространстве. 96

Существование «неевклидовых метрик», т. е. таких, которые не могут быть приведены к виду $\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ ни в какой системе координат, пока ниоткуда не следует. В данный момент мы не можем указать такую риманову метрику, о которой можно было бы утверждать, что она — не евклидова. Интуитивно ясно, что для обнаружения такой метрики следует найти какие-то инварианты метрик, сохраняющиеся при регулярных заменах координат. Тогда мы могли бы обнаруживать неэквивалентность метрик, сравнив их инварианты и обнаружив, что они различны. Такие инварианты действительно существуют, и вскоре мы их определим. Только тогда мы сможем строго доказать существование неевклидовых метрик, определенных в области евклидова пространства.

Как было отмечено ранее, евклидова метрика, записанная в произвольной системе координат z, теряет свой простой евклидов вид и задается матрицей $G(z)$, распознать в которой евклидову метрику не просто, особенно если мы не располагаем инвариантами, различающими различные метрики (т. е. не переходящие друг в друга при подходящей замене координат). Посмотрим, как записывается евклидова метрика в простейших криволинейных координатах, указанных выше. Часто бывает удобно записывать не матрицу $G(z)$ римановой метрики, а квадрат дифференциала длины дуги гладкой кривой: $(dl)^2 = g_{ij}(z)dz^i dz^j$.

1. Полярная система координат на плоскости: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.
2. Цилиндрические координаты в трехмерном пространстве: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$.
3. Сферические координаты в трехмерном пространстве: $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.

Индефинитные метрики

До сих пор мы имели дело только с положительно определенными метриками, которые мы называли римановыми. В частности, все разобранные нами примеры являются положительно определенными метриками. Однако в приложениях часто встречаются так называемые индефинитные метрики.

Определение . Мы скажем, что задана *индефинитная метрика* в области C евклидова пространства, если в каждой регулярной системе координат $z^1, \ldots, z^n$ определен набор гладких функций $\{g_{mp}(z^1, \ldots, z^n)\}$, удовлетворяющих всем требованиям, наложенным на риманову метрику (см. определение), кроме требования положительной определенности, т. е. соответствующая квадратичная форма является индефинитной.

В качестве примера индефинитной метрики рассмотрим так называемые псевдоевклидовы метрики индекса s в псевдоевклидовых пространствах $\mathbf{R}^n_s$. Для построения этой метрики рассмотрим евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, отнесенное к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$ и зададим в каждой точке $P \in \mathbf{R}^n$ следующую билинейную форму (с постоянными, т. е. не зависящими от точки коэффициентами):

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle_s = -\sum_{i=1}^{s} \xi^i \eta^i + \sum_{j=s+1}^{n} \xi^j \eta^j.$$

Тогда для любой гладкой кривой $\gamma(t) = \{x^i(t)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, длина дуги выражается по формуле:

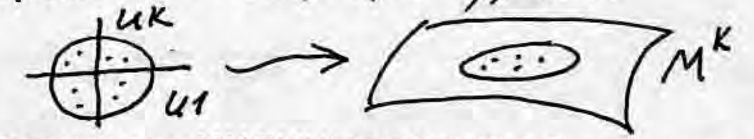
$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{-\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 + \sum_{j=s+1}^{n} \left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2}\, dt.$$

При $n = 4$ псевдоевклидово пространство индекса 1 называется иногда *пространством Минковского* (в специальной теории относительности); мы также будем рассматривать пространства $\mathbf{R}^3_1$ и $\mathbf{R}^2_1$. Отметим, что псевдоевклидово пространство индекса 0 совпадает с обычным евклидовым пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ, ИНДУЦИРОВАННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ (МНОГООБРАЗИИ). РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ.

Рассмотрим в области n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ риманову метрику (не обязательно евклидову) $g_{ij}(x)$. Пусть далее в области задана какая-то гладкая k-мерная поверхность (многообразие) M. Пусть M задано (например, локально) каким-то радиус-вектором $r = r(u^1, \dots, u^k)$, т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} x^i = x^i(u^1, \dots, u^k) \\ 1 \le i \le n \end{array} \right\}$$



Тогда на поверхности M возникает ИНДУЦИРОВАННАЯ риманова метрика. А именно, ограничим объемлющую риманову метрику на поверхность M. То есть $ds^2(M^k) =$

$$= g_{ij}\, dx^i(u) dx^j(u) = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta =$$

$$= \varphi_{\alpha\beta}(u)\, du^\alpha du^\beta, \text{ где } \varphi_{\alpha\beta}(u) = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}.$$

Таким образом, объемлющая n-мерная риманова метрика $g_{ij}(x)$ индуцирует k-мерную риманову метрику $\varphi_{\alpha\beta}(u)$ на M^k, т.е. на поверхности (многообразии) M^k.

Поверхности (многообразия) M, снабженные римановой метрикой, называются римановыми многообразиями. Их можно рассматривать «отдельно», то есть безотносительно к какому-то вложению многообразия в евклидово пространство. В качестве примеров мы далее рассмотрим римановы метрики, индуцированные на двумерных поверхностях в евклидовом (или псевдоевклидовом) пространстве.

Два римановых многообразия называются изометричными, если существует диффеоморфизм одного многообразия на другое, переводящий одну риманову метрику в другую. Подробнее об этом мы скажем ниже.