Лекция 2

1. Длина кривой в евклидовой системе координат

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^n$ и зададим в нем евклидово скалярное произведение: $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \sum \xi^i \eta^i$; $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n$. Тогда каждому вектору $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n$ можно сопоставить вещественное число, называемое его модулем, или длиной, и определяемое формулой: $|\boldsymbol{\xi}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle}$. Эта формула задает длины векторов, идущих из точки O в некоторую точку $\xi \in \mathbf{R}^n$. Если же мы хотим определить расстояние между двумя точками $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$, то следует вычислить длину вектора $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}$. Как известно из аналитической геометрии, угол φ между векторами $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n$, также можно выразить через скалярные произведения по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle}{|\boldsymbol{\xi}| \cdot |\boldsymbol{\eta}|}$. Мы видим, что такие важные метрические понятия, как длины векторов и углы между ними, тесно связаны со скалярным произведением в евклидовом пространстве. При построении других понятий геометрии мы будем часто класть в основу именно скалярное произведение векторов.

16

Кроме длин прямолинейных отрезков в евклидовом пространстве полезно уметь вычислять длины гладких кривых. Дадим определение длины гладкой кривой. Для этого зададим кривую $\gamma(t)$ в параметрическом виде, т. е. будем считать, что *гладкая кривая* задана в евклидовом пространстве набором n гладких функций $x^1(t), \ldots, x^n(t)$, где параметр (время) пробегает либо всю вещественную ось, либо отрезок $[a, b]$. При этом мы считаем, что $x^1, \ldots, x^n$ являются декартовыми координатами в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1. *Длиной кривой* $\gamma(t)$ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ (или от значения параметра $t = a$ до значения параметра $t = b$) называется число $l(\gamma)_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle}\,dt$, где $\dot\gamma(t)$ — вектор с координатами $\left(\dfrac{dx^1(t)}{dt}, \ldots, \dfrac{dx^n(t)}{dt}\right)$, называемый иногда *вектором скорости* кривой $\gamma(t)$ в точке t, или *касательным вектором* к кривой $\gamma(t)$.

Таким образом, мы назвали длиной кривой интеграл от длины ее вектора скорости. В явном виде формула для длины кривой приобретает вид:

$$l(\gamma)_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(t)}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Лемма 1. *Пусть задана гладкая кривая $\gamma(t)$, и на ней фиксированы две точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, отвечающие значениям параметра $t = a$ и $t = b$. Пусть $t = t(\tau)$ — произвольная гладкая замена параметра t на новый параметр τ, причем $\dfrac{dt}{d\tau} > 0$. Тогда длина кривой $l(\gamma(t))_a^b$ не изменится, т. е. имеет место равенство: $l(\gamma(t))_a^b = l(\gamma(\tau))_\alpha^\beta$, где $a = t(\alpha)$, $b = t(\beta)$.*

Доказательство. Прямое вычисление дает:

17

$$l(\gamma(t))_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{\langle\dot\gamma_t,\dot\gamma_t\rangle}dt = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\langle\dot\gamma_\tau,\dot\gamma_\tau\rangle\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}\frac{dt}{d\tau}d\tau =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\langle\dot\gamma_\tau,\dot\gamma_\tau\rangle}\frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\langle\dot\gamma_\tau,\dot\gamma_\tau\rangle}d\tau,$$

что и требовалось. □

Пусть заданы две гладкие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(\tau)$, пересекающиеся в некоторой точке P евклидова пространства, т. е. существуют такие значения параметров $t = a$ и $\tau = b$, что $P = \gamma_1(a) = \gamma_2(b)$. Определим угол между двумя кривыми в точке их пересечения.

Определение 2. *Углом* между пересекающимися гладкими траекториями $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(\tau)$ в точке их пересечения $P = \gamma_1(a) = \gamma_2(b)$ называется угол φ, определяемый равенством: $\cos\varphi = \dfrac{\langle\dot\gamma_1(a),\dot\gamma_2(b)\rangle}{|\dot\gamma_1(a)|\cdot|\dot\gamma_2(b)|}$, если только оба вектора скорости $\dot\gamma_1(a)$ и $\dot\gamma_2(b)$ отличны от нуля в точке P.

Замечание. Строго говоря, это равенство определяет не один угол, а два угла, дающих в сумме угол, равный π; однако, если считать, что кривые занумерованы, то возникает понятие ориентированного угла, который уже определяется приведенной формулой однозначно. Остановимся также на требовании, чтобы оба вектора скорости были отличны от нуля в точке пересечения.

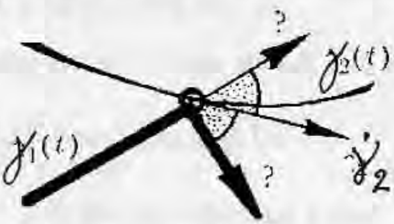


Рис. 1

Дело в том, что в точках, где вектор скорости гладкой кривой обращается в нуль, кривая может претерпевать излом, скачком меняя направление движения. При попытке определить угол в точке пересечения с такой кривой, возникает неопределенность в выборе одного из двух гладких кусков кривой, которые разделяет точка излома (рис. 1). Отметим также, что наличие на гладкой кривой точки излома (в тех значениях параметра, для которых вектор скорости аннулируется), отнюдь не противоречит гладкости кривой. Пример гладкой кривой, имеющей излом, показан на рис. 2; здесь «угол излома» гладкой кривой в особой точке равен $\pi/2$.

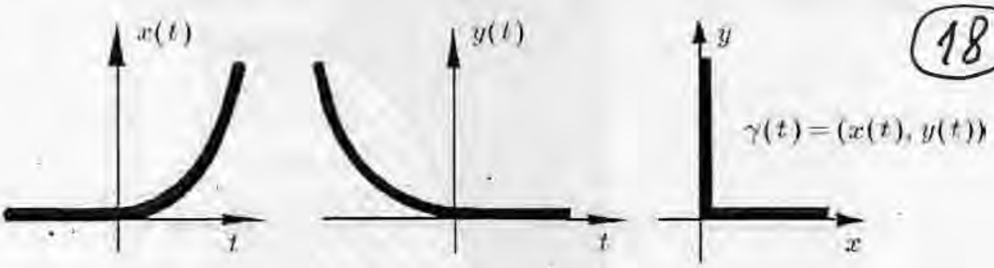


Рис. 2

Легко построить пример гладкой кривой, имеющей в особой точке угол излома, равный π (см. рис. 3).

Рис. 3

(*Задание читателю*: напишите параметрическое уравнение кривой, изображенной на рис. 3. *Вопрос*: может ли кривая, изображенная на рис. 3 быть задана аналитическими функциями $x(t)$, $y(t)$?)

В дальнейшем, чтобы избежать подобных изломов, будем рассматривать только такие гладкие кривые, у которых вектор скорости всюду отличен от нуля. Такие кривые называются регулярными. Они не имеют изломов. Обсудим вопрос: насколько данное выше определение длины кривой удовлетворяет наглядным представлениям о длине, базирующимся на понятии евклидовой длины отрезков и на понятии тонкой нерастяжимой нити, с помощью которой можно измерять длины более сложных, чем отрезок, кривых. Кроме того, нам известны определения длины окружности, которая иногда вводится как предел периметров вписанных (или описанных) многоугольников при стремлении к бесконечности числа сторон выпуклого многоугольника, аппроксимирующего окружность. Начнем с отрезка.

1) Пусть кривая $\gamma(t)$ задается линейными функциями $x^i(t) = \alpha^i t$, где $\alpha^i = \mathrm{const}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $a \leqslant t \leqslant b$. Вычисляя длину этой гладкой кривой от значения параметра $t = a$ до $t = b$, получаем:

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha^i)^2} dt = (b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha^i)^2}.$$

Поскольку начальной точкой отрезка является точка с координатами $\{\alpha^i \cdot a\}$, а его конечной точкой — точка $\{\alpha^i b\}$, то обычная длина отрезка равна: $(b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha^i)^2}$, что совпадает со значением интеграла $l(\gamma)_a^b$.

2) Пусть окружность задается на плоскости $\mathbf{R}^2(x, y)$ параметрическими уравнениями: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Подсчет интеграла дает $l(\gamma)_a^b = 2\pi R$ (где $a = 0$, $b = 2\pi$), что совпадает с известным выражением для длины окружности радиуса R.

2 . Криволинейные системы координат. Простейшие примеры

19

Мотивировка

Рассмотрим евклидово пространство размерности n, которое мы в дальнейшем будем обозначать через $\mathbf{R}^n$. Будем считать, что в нем выбраны и фиксированы декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, с помощью которых можно однозначно определить положение произвольной точки в $\mathbf{R}^n$, сопоставив ей набор вещественных чисел — ее координаты относительно выбранного и фиксированного ортобазиса, векторы которого (единичной длины и ортогональные друг другу) будем обозначать через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Идея описывать точки евклидова пространства с помощью набора вещественных чисел (которые также можно понимать как координаты радиус-вектора, идущего из начала координат в эту точку) лежит в основе аналитической геометрии, позволяющей решать многие геометрические задачи с помощью чисто алгебраических методов. Эта важная идея была впервые (в явном виде) введена в математику Декартом, имя которого и закрепилось в названии «декартовых координат». Алгебраизация геометрии сыграла чрезвычайно важную роль в развитии не только геометрии, но и математики в целом. Мы не будем здесь приводить известные примеры задач, просто и изящно решаемых с помощью алгебро-аналитических методов (например, задача о классификации поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве), отсылая читателя к курсам алгебры и аналитической геометрии. Напомним только, что с декартовыми координатами в $\mathbf{R}^n$ тесно связано понятие евклидова скалярного произведения — билинейной формы, сопоставляющей каждой паре векторов $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n$ вещественное число, обычно обозначаемое $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle$, причем эта операция является симметричной, линейной по каждому аргументу, а сама форма — положительно определенной. В декартовой системе координат

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \xi^1 \eta^1 + \ldots + \xi^n \eta^n, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n), \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta^1, \ldots, \eta^n).$$

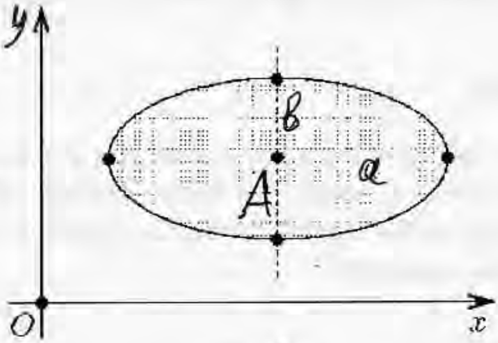


Рис. 4

Однако, как показывают уже простейшие примеры, декартовых координат недостаточно для удобной аналитической записи многих конкретных задач. Продемонстрируем это, например, на примере уравнений кривых на плоскости, снабженной декартовыми координатами x, y. Конечно, когда мы имеем дело с довольно простыми кривыми, например, с окружностью или эллипсом, то их аналитическое выражение в декартовых координатах является весьма простым. В самом деле, уравнение окружности радиуса R и с центром в точке A записывается так: $(x-A^1)^2+(y-A^2)^2=R^2$, где $A=(A^1,A^2)$.

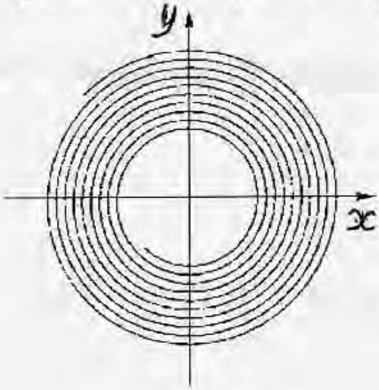


Рис. 5

Просто записывается и уравнение эллипса: $\dfrac{(x-A^1)^2}{a^2}+\dfrac{(y-A^2)^2}{b^2}=R^2$, где числа a и b являются величинами главных полуосей эллипса (рис. 4).

Однако часто в различных механических и физических задачах встречаются гладкие кривые (скажем, траектории движения материальных точек в поле каких-либо сил), явное выражение которых в декартовых координатах затруднительно. Так, например, следующее уравнение определяет в декартовых координатах спираль: $\sqrt{x^2+y^2}-e^{\lambda\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)}=0$ (рис. 5). Конечно, запись этой кривой в декартовых координатах не слишком сложна, но тем не менее эта кривая запишется значительно проще в другой, так называемой полярной, системе координат на плоскости — в координатах (r,φ), связанных с декартовыми координатами x, y соотношениями: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (рис. 6). В этих координатах уравнение спирали принимает вид: $r=e^{\lambda\varphi}$, что позволяет сразу оценить характер движения точки по траектории. Ниже мы еще вернемся к полярной системе коорди-

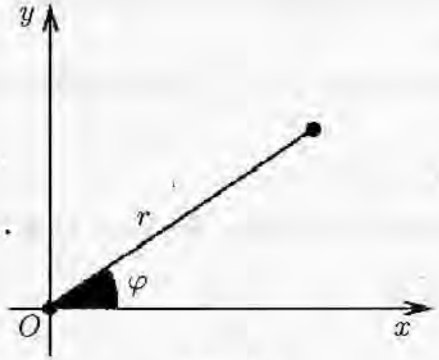


Рис. 6

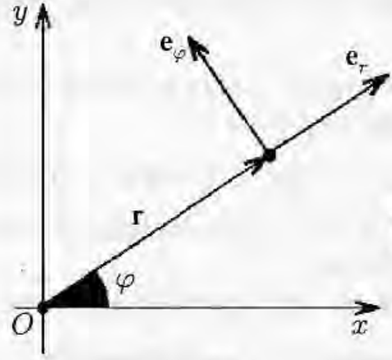


Рис. 7

нат, а здесь только отметим, что появление таких координат (называемых криволинейными) является не прихотью математиков, стремящихся ввести новые объекты, а, в некотором смысле, практической необходимостью. Укажем (не вдаваясь пока в подробности) на задачу, в которой использование полярных координат является полезным (рис. 6).

Рассмотрим движение материальной точки на плоскости в центральном поле сил; пусть центр находится в точке O, и на плоскости введены полярные координаты (r, φ). Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор движущейся точки (радиус-вектор выходит из точки O), r — его длина, t — время (параметр движения), тогда координаты r и φ будут функциями времени. Рассмотрим в точке $\mathbf{r}(t)$, имеющей полярные координаты $r = |\mathbf{r}|$, φ, два единичных ортогональных вектора: вектор $\mathbf{e}_r$, направленный по радиус-вектору точки (отметим, что при этом выполнено соотношение: $\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{e}_r$), и вектор $\mathbf{e}_\varphi$, ортогональный вектору $\mathbf{e}_r$ и направленный в сторону увеличения координаты φ (рис. 7). Точкой будем обозначать дифференцирование радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ по времени t. Тогда, как известно из механики, движение материальной точки (будем считать для простоты, что ее масса равна 1) в центральном поле сил на плоскости определяется следующим дифференциальным уравнением: $\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\mathbf{e}_r$, где f — некоторая гладкая функция от аргумента r. Сформулируем полезную задачу: перепишите это дифференциальное уравнение в декартовых координатах на плоскости.

Движение материальной точки можно задать в виде двух функций: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, т. е. в полярной системе координат. Довольно легко убедиться в том, что при движении материальной точки в центральном поле сил сохраняется величина $r^2\dot{\varphi}$. Это есть один из законов Кеплера, которые он открыл, изучая движение планет в солнечной системе (в его распоряжении уже были таблицы, указывающие координаты планет на небесной сфере, как функции времени). Этой сохраняющейся величине можно придать прозрачный геометрический смысл. Сам Кеплер ввел для этого удобное понятие: он назвал секториальной скоростью v скорость изменения площади $s(t)$, заметаемой радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$ (радиус-вектор есть функция времени), т. е. $v = \dfrac{ds(t)}{dt}$. В терминах секториальной скорости закон Кеплера формулируется так: «В равные времена радиус-вектор заметает равные площади, иными словами секториальная скорость постоянна: $\dfrac{ds(t)}{dt} = \mathrm{const}$». Можно показать (мы не будем на этом останавливаться), что это — одна из формулировок закона сохранения момента импульса. Читатель может убедиться в том, что вывод этого закона в полярных координатах значительно проще, чем в декартовых.

Аналогичным образом при решении задач механики и физики возникли и другие «криволинейные» координаты — цилиндрические, сферические и т. д. Внимательно изучая все эти различные способы сопоставления точкам пространства вещественных чисел (называемых координатами этих точек), можно заметить, что в основе лежит некая общая идея, частными случаями которой и будут все перечисленные выше «криволинейные» координаты (мы пока заключаем слово «криволинейные» в кавычки, так как не определили строго это понятие, апеллируя только к наглядным образам).

Декартовы и криволинейные координаты в области в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим произвольную область в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Напомним, что как и в курсе анализа, мы называем областью произвольное множество C в евклидовом пространстве, каждая точка P которого входит в это множество вместе с некоторым шаром достаточно малого радиуса, имеющим точку P своим центром. Рассмотрим второй экземпляр евклидова пространства, который обозначим через $\mathbf{R}^n_1$. Задать координаты точки P в области C — это означает сопоставить этой точке набор чисел, которые и можно будет назвать координатами. Ясно, что, задавая это соответствие произвольно, мы ничего хорошего не получим в том смысле, что это соответствие может оказаться бессодержательным. Пример такого бессодержательного соответствия: сопоставить каждой точке P области C один и тот же набор чисел, скажем $(0, 0, 0, \ldots, 0)$. Таким образом, вырисовывается первое требование, которому должно удовлетворять соответствие: нужно, чтобы различным точкам области отвечали и различные наборы чисел (координат).

Таким образом, мы хотим сопоставить каждой точке P области C набор n вещественных чисел. Ясно, что это задает набор из n функций $x^1(P), \ldots, x^n(P)$, имеющих областью определения область C; здесь $x^1, \ldots, x^n$ — координаты в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n_1$.

Обычно требуют, чтобы они были непрерывны и даже гладки (по крайней мере для почти всех точек области C), т. е. чтобы при малом изменении положения точки P ее координаты также менялись мало, и чтобы гладкая деформация точки P порождала также гладкое изменение ее координат.

23

Итак, рассмотрим два экземпляра евклидова пространства: $\mathbf{R}^n$ с декартовыми координатами $y^1, \ldots, y^n$ и $\mathbf{R}_1^n$ с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$; пусть C — область в $\mathbf{R}^n$.

Замечание. Евклидово пространство $\mathbf{R}_1^n$ можно считать «арифметическим пространством», отождествив его точки с последовательностями длины n, составленными из вещественных чисел.

Определение 1. *Непрерывной системой координат* в области C евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ называется система функций $x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)$, задающих взаимно-однозначное и непрерывное в обе стороны отображение области C на некоторую область A в евклидовом пространстве $\mathbf{R}_1^n$. Иными словами, эта система функций $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ задает отображение, называемое гомеоморфизмом области C на область A (о понятии гомеоморфизма мы подробнее будем говорить позже).

Определение 1 формализует наше желание, чтобы при непрерывном изменении точки P из области C набор ее координат также менялся бы непрерывно. Функции $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ будем называть *координатами* точки P относительно координатного отображения $f\colon C \to A$.

Например, в качестве координатного отображения $f\colon C \to A$ можно взять тождественное отображение, задаваемое линейными функциями: $x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n$.

Иногда будем записывать точку P с ее координатами $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ в виде $P(x^1, \ldots, x^n)$, предполагая, что уже задано и фиксировано координатное отображение $f\colon C \to A$.

Среди всех непрерывных координатных отображений выделены такие, которые задают гладкое отображение области C на область A, т. е. все функции $x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)$ являются гладкими функциями от аргументов $y^1, \ldots, y^n$. Однако гладкость координатного отображения f без предположения гладкости ему обратного отображения f^{-1} не дает содержательных примеров координат, а потому мы сразу перейдем к определению таких координатных систем, у которых гладкими являются оба отображения: как f, так и f^{-1}. Для этого нам потребуется определить новое понятие — матрицу Якоби гладкого отображения.

Пусть $f\colon C \to A$ — гладкое отображение, задаваемое набором функций: $x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)$.

24

Определение 2. *Матрицей Якоби* отображения f называется функциональная матрица

$$df = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} \cdots \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} \cdots \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix},$$

составленная из частных производных от координат $x^1(P), \ldots, x^n(P)$. Определитель этой матрицы будем обозначать через $J(f)$ и называть *якобианом* отображения f.

Замечание. Введенное нами обозначение df для матрицы Якоби не вызовет путаницы с обозначением дифференциала гладкой функции f по той причине, что дифференциал гладкой функции f (при соответствующем истолковании этого дифференциала) как раз и совпадает с матрицей Якоби в этом частном случае. Отметим еще раз, что матрица Якоби является переменной матрицей, т. е. зависящей от точки P из области C; точно так же якобиан отображения f является гладкой функцией на области $C : J(f)(P), P \in C$.

Определение 3. *Регулярной системой координат* в области C евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ называется система гладких функций $x^1(y^1,\ldots,y^n)$, $\ldots,x^n(y^1,\ldots,y^n)$, задающих взаимно-однозначное отображение области C на некоторую область A в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n_1$, причем таких, что якобиан отображения $J(f)(P)$ отличен от нуля во всех точках области C.

Отметим, что требование отличия от нуля якобиана отображения f во всех точках области C автоматически означает, что отображение f^{-1}, обратное к отображению f, является не только непрерывным, но и гладким. Это следует из теоремы о неявных функциях. Таким образом, регулярная система координат задается двумя гладкими, взаимно-обратными отображениями, устанавливающими гомеоморфизм между областями C и A. Такие отображения называются диффеоморфизмами. Определение 3 формализует наше желание, чтобы при гладком изменении точки P из области C набор ее координат менялся бы гладко; более того, при гладком изменении «координатной точки» B в области A гладко меняется соответствующая ей (при отображении f^{-1}) точка P. Как видно из приведенных выше определений, понятие «гладкой и регулярной системы координат» предполагает задание двух экземпляров евклидова пространства, некоторые области которых отождествлены с помощью непрерывного и взаимно-однозначного отображения, на которое дополнительно наложены требования гладкости (в обе стороны).

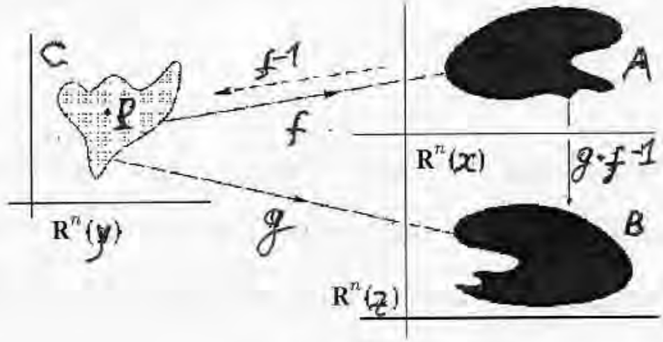
Данные определения можно интерпретировать и с иной точки зрения. Можно считать, что с самого начала в области C евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ введена декартова система координат (с помощью тождественного отображения C на A при естественном отождествлении обоих экземпляров евклидовых пространств: $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}_1^n$). Тогда введение в области C еще одной системы координат, задаваемой регулярным отображением f (т. е. гладким, взаимно-однозначным отображением с ненулевым якобианом), можно рассматривать как замену координат: мы перешли от исходной, декартовой системы координат к некоторой новой системе координат, заданной в той же области C.

Определение 4. Регулярную систему координат в области C будем называть также *криволинейной системой координат*.

Рассмотрим в области C две криволинейные системы координат: $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ и $z^1(P), \ldots, z^n(P)$. Это означает, что заданы два регулярных отображения: f и g, где $f\colon C \to A \subset \mathbf{R}_1^n(x^1, \ldots, x^n)$; $g\colon C \to B \subset$ $\subset \mathbf{R}_2^n(z^1, \ldots, z^n)$, т. е. отображения f и g устанавливают взаимно-однозначные и гладкие в обе стороны соответствия между областями C, A и C, B соответственно. Иными словами, каждой точке P из области C сопоставлены два набора ее криволинейных координат $\{x^i(P)\}$ и $\{z^i(P)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку соответствие взаимно-однозначно, то можно рассмотреть соответствие, сопоставляющее координатам $\{x^i(P)\}$ точки P ее координаты $\{z^i(P)\}$, что определяет отображение $\psi_{x,z}\colon A \to B$, т. е. $\psi_{x,z}\colon x^i(P) \to z^i(P)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Определенное таким образом отображение $\psi_{x,z}$ мы будем называть *заменой координат* в области C. При этой замене точка P получает вместо исходных криволинейных координат $\{x^i(P)\}$ новые криволинейные координаты $\{z^i(P)\}$.

Лемма 1. *Отображение $\psi_{x,z}$ является взаимно-однозначным, гладким в обе стороны отображением области A на область B, с ненулевым якобианом.*

Доказательство. Взаимная однозначность отображения $\psi_{x,z}$ следует из определения 3. Гладкость отображения $\psi_{x,z}$ следует из того, что композиция двух гладких отображений также является гладким отображением. Осталось проверить, что отображение $\psi_{x,z}$ имеет ненулевой (в каждой точке области B) якобиан $J(\psi_{x,z})$.



26

Рис. 8

В самом деле, отображение $\psi_{x,z}$ распадается в композицию двух отображений: $\psi_{x,z} = g \circ f^{-1} : A \to B$ (рис. 8). Матрица Якоби отображения $\psi_{x,z}$ распадается в произведение матриц Якоби отображения f^{-1} и отображения g. В самом деле, $d\psi_{x,z} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$. Рассмотрим $\dfrac{\partial z^i}{\partial x^j}$; так как $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n) = z^i(y^1(x^1, \ldots, x^n); \ldots; y^n(x^1, \ldots, x^n))$, где функции $\{y^\alpha(x^1, \ldots, x^n), 1 \leqslant \alpha \leqslant n\}$ задают гладкое отображение $f^{-1} : A \to C$, то по формуле дифференцирования сложной функции получаем: $\dfrac{\partial z^i}{\partial x^j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$, то есть матрица Якоби $d\psi_{x,z}$ распалась в произведение двух матриц: dg и df^{-1}. Мы воспользовались формулой, выражающей элементы произведения двух матриц через элементы этих матриц. Осталось выяснить, как связаны матрицы Якоби: df и $d(f^{-1})$. Так как композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением области C на себя (см. определение регулярной системы координат), то, по только что доказанной формуле, мы получаем, что $d(f^{-1} \circ f) = df^{-1} \circ df = E$, где E — единичная матрица порядка n, т. е., окончательно, $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$. Тем самым доказано, что для матрицы $d\psi_{x,z}$ выполнено тождество: $d\psi_{x,z} = (dg) \cdot (df)^{-1}$, т. е. $J(\psi_{x,z}) = J(g)/J(f)$, и так как оба якобиана $J(g)$ и $J(f)$ отличны от нуля, то и якобиан $J(\psi_{x,z})$ отличен от нуля. Лемма доказана. □

Если задано отображение f области C в область A, устанавливающее в области C криволинейные координаты, то отображение f^{-1}, отображающее область A на область C, можно считать устанавливающим криволинейные координаты в области A (с помощью декартовых координат из области C). Этим замечанием мы будем часто пользоваться, переходя от отображения f к обратному f^{-1}.

Пусть на области C задан набор гладких функций: $\{x^i(P)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Как узнать: задает ли этот набор регулярную систему координат в C?

Лемма 2. *Пусть набор гладких функций $\{x^i(P)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обладает тем свойством, что якобиан этой системы функций J ($f = \{x^i(P),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$) отличен от нуля в области C. Тогда для каждой точки P из области C существует такая открытая окрестность, что в ней набор функций $\{x^i(P)\}$ задает регулярную систему координат (такую систему можно назвать «локальной системой координат»).*

Доказательство. В условии леммы не было предположено, что набор функций $\{x^i(P)\}$ определяет (хотя бы локально) взаимно-однозначное отображение области C на область A евклидова пространства $\mathbf{R}^n_1$. Однако, по теореме о системе неявных функций (и теореме о существовании обратного отображения) из отличия от нуля якобиана вытекает существование (по крайней мере в некоторой открытой окрестности) обратного отображения, которое, кроме того, будет гладким. Утверждение леммы следует теперь из определения регулярной системы координат. □

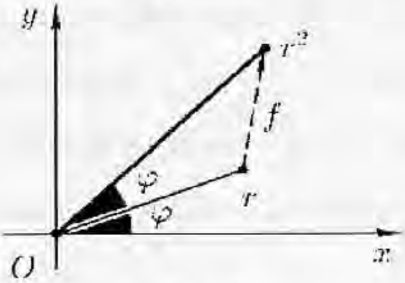


Рис. 9

Отметим, что набор функций, удовлетворяющих условию леммы 2, отнюдь не обязан определять регулярную систему координат сразу во всей области C, т. е. гладкое отображение f^{-1} области A на область C может и не существовать. Действительно, рассмотрим простой пример. Возьмем в качестве области C двумерную декартову плоскость, из которой выколота одна точка — начало координат O, а в качестве отображения f (задаваемого здесь двумя функциями: $x^1(P)$, $x^2(P)$) рассмотрим гладкое отображение $f(y^1, y^2) = (x^1(y), x^2(y))$, где $x^1(y^1, y^2) = (y^1)^2 - (y^2)^2$; $x^2(y^1, y^2) = 2y^1y^2$; т. е. если положить $z = y^1 + iy^2$, $w = x^1 + ix^2$ (где i — мнимая единица), то $w = z^2$. Это отображение переводит комплексное число z в его квадрат (можно считать, что оба экземпляра евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2(y)$ и $\mathbf{R}^2(x)$ отождествлены между собой). Это же отражение удобно записать в полярных координатах на плоскости (r, φ); тогда получим: $f(r, \varphi) = (r^2, 2\varphi)$; геометрически действие отображения f показано на рис. 9. Найдем якобиан $J(f)$ отображения f (подсчитаем его, например, в исходной декартовой системе координат y^1, y^2 на $\mathbf{R}^2(y)$). Матрица Якоби df имеет вид:

$$df = \begin{pmatrix} 2y^1 & 2y^2 \\ -2y^2 & 2y^1 \end{pmatrix}, \quad J(f) = 4((y^1)^2 + (y^2)^2) > 0.$$

Мы видим, что якобиан положителен во всех точках области C (так как начало координат выколото). Следовательно, по лемме 2 отображение

28

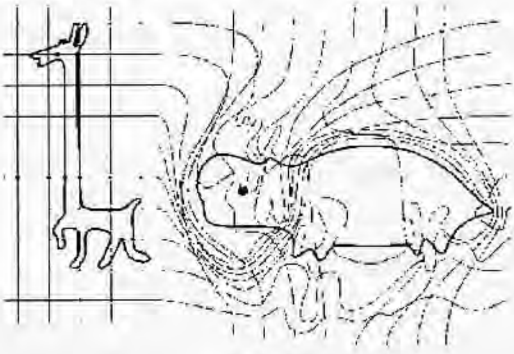


Рис. 10

устанавливает локальную (регулярную) систему координат в некоторой открытой окрестности каждой точки из области C. В то же время в целом отображение f не имеет обратного отображения f^{-1}, поскольку f не взаимно-однозначно. В самом деле, каждая точка $w = x^1 + ix^2 \in \mathbf{R}^2(x)$, не являющаяся началом координат, имеет всегда ровно два прообраза при отображении f, это — точки (r, φ) и $(r, \varphi + \pi)$, являющиеся различными точками области C. Таким образом, если задан набор функций, претендующих на роль регулярной системы координат в области C евклидова пространства, то для проверки этого следует не только убедиться в том, что якобиан системы отличен от нуля (во всех точках области C), но и проверить взаимную однозначность отображения, задаваемого этим набором. Отметим также, что в приведенном примере якобиан системы функций стремился к нулю, когда точка P приближалась к нулю. В геометрии известен следующий вопрос: будет ли взаимно-однозначным такое гладкое отображение f евклидова пространства на себя, при котором на якобиан $J(f)$ наложено условие: $0 < \epsilon \leqslant J(f) \leqslant N < \infty$? Здесь ϵ и N — постоянные. Мы не будем здесь заниматься этим вопросом.

Каждая система криволинейных координат в области C определяет семейства так называемых координатных линий, определяемых так: i-я координатная линия задается уравнением: $x^1(P) = c_1$, $x^2(P) = c_2, \ldots$, $x^{i-1}(P) = c_{i-1}$, $x^i(P) = t$, $x^{i+1}(P) = c_{i+1}, \ldots$, $x^n(P) = c_n$, где все c_i — постоянные, а t — непрерывный параметр.

С изменением t точка P пробегает некоторую гладкую траекторию в области C. Таким образом, из каждой точки P области C выходит n гладких траекторий, которые и называются координатными линиями данной системы координат (в точке P). Для другой точки P будет другая система координатных линий, и это семейство линий гладко деформируется при изменении точки P. Например, если система координат — декартова, то ее координатные линии являются прямыми, проходящими через точку P параллельно координатным осям. При изображении криволинейных систем координат полезно изображать координатные линии; так можно визуализировать криволинейные замены координат (см., например, рис. 10).

Простейшие примеры криволинейных систем координат

Мы начнем этот пункт со следующего замечания: полярная система координат (r, φ) на евклидовой плоскости не является регулярной системой координат, определенной на всей плоскости $\mathbf{R}^2$. В самом деле, рассмотрим функции замены координат от полярных к декартовым. Эти функции таковы: $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$. Найдем якобиан $J(\psi)$ этой замены. Вычисление дает:

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad J(\psi) = r.$$

Таким образом, якобиан равен нулю в начале координат. Так как декартова система координат x^1, x^2, очевидно, регулярна на плоскости $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$, то отсюда следует, что полярная система координат не является регулярной (в смысле определения 3). Однако на этом неприятности, связанные с полярной системой координат, не кончаются. Эта «система координат» не является взаимно-однозначным отображением всей двумерной евклидовой плоскости на себя, так как точки вида (r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi)$ переходят в одну и ту же точку. Следует выделить ту область C, в которой полярная система координат является регулярной. Разберем этот пример подробно.

Рассмотрим плоскость $\mathbf{R}^2(r, \varphi)$, где $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, и в качестве области C рассматривается бесконечная полоса, определяемая неравенствами: $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < r < +\infty$. Тогда в качестве области A в плоскости $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$ следует взять всю двумерную плоскость, за исключением луча: $x^1 \geqslant 0$, $x^2 = 0$. Отображение $f\colon C \to A$ задается формулами: $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$. На рис. 11 показано, что происходит с координатными линиями при отображении f. Прямоугольная сетка декартовых координат превращается в полярную сетку. Взаимная однозначность и регулярность отображения f очевидны.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство и изучим так называемую цилиндрическую систему координат. Формулы замены следующие: $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$, $x^3 = z$. Рассмотрим $\mathbf{R}^3(y^1, y^2, y^3)$, где $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = z$, и в качестве C возьмем область $(0 < r;\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$. Приведенные формулы определяют гладкое отображение $f\colon C \to A \subset \mathbf{R}^3(x^1, x^2, x^3)$, где область A получается из $\mathbf{R}^3(x^1, x^2, x^3)$

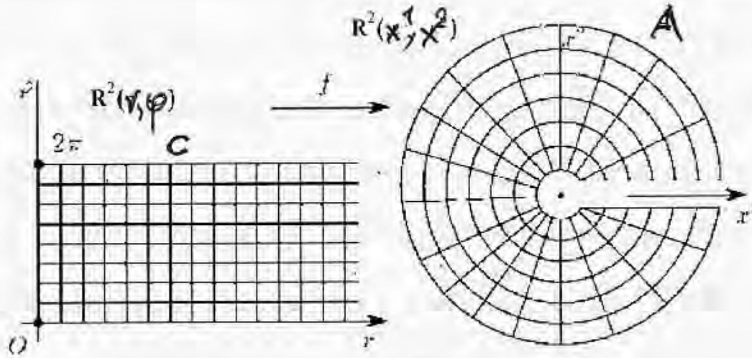


Рис. 11

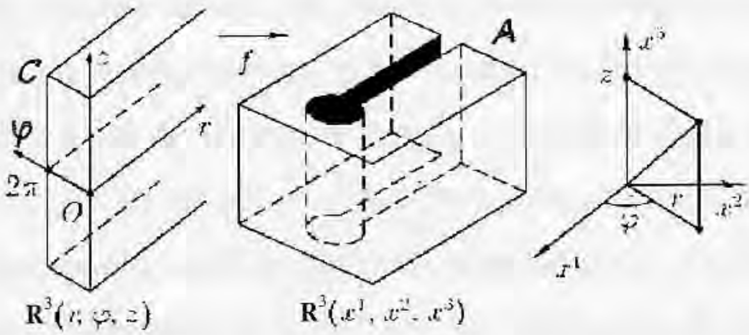


Рис. 12

выбрасыванием полуплоскости (рис. 12). Матрица Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан замены равен r. Таким образом, в области A цилиндрическая система координат регулярна (якобиан равен нулю только в точках оси z); полуплоскость $(\varphi = 0, r \geqslant 0)$ исключена для взаимно-однозначного соответствия.

Теперь рассмотрим n-мерное евклидово пространство и введем в нем сферическую систему координат. Формулы замены, вычисление матрицы Якоби и якобиана мы предъявим в n-мерном случае, а анализ областей C и A проведем только для трехмерного евклидова пространства. Формулы замены таковы:

$$f_n : C(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) \to A(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

31

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\theta_1 \\ x^2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x^3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \quad\vdots \\ x^{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x^n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

Замечание. Структура формул ясна: удобно считать, что все строки имеют одно и то же происхождение, но только параметры θ_i, начиная с номера $i = n$, равны нулю. Матрица Якоби имеет вид:

$$df_n = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & \ldots \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & -r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2} & \ldots \\ \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\ldots\cos\theta_{n-1} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_n = {} & (-1)^n r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}J_{n-1} + \\ & +(-1)^n r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-1}J_{n-1} = \\ = {} & (-1)^n r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}J_{n-1}. \end{aligned}$$

$$J_2 = r; \quad J_3 = -r^2\sin\theta_1; \quad J_4 = r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2;$$

$$J_5 = r^4\sin^3\theta_1\sin^2\theta_2\sin\theta_3 \quad \text{и т.д.}$$

Для трехмерного пространства сферические координаты обычно обозначаются через (r, θ, φ); в этих обозначениях формулы замены приобретают вид: $x^1 = r\sin\theta\cos\varphi$; $x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$; $x^3 = r\cos\theta$ $(0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, $r \geqslant 0)$. В этих координатах $J = r^2\sin\theta$. Рассмотрим структуру областей C и A (см. рис. 13). Якобиан замены равен нулю только в точках оси x^3; остальные точки, принадлежащие полуплоскости $(x^2 = 0,\ x^1 \geqslant 0)$, удалены для того, чтобы обеспечить взаимную однозначность координатной системы. При фиксированном r координатные линии параметров θ, φ имеют вид, показанный на рис. 14. Эти параметры иногда называются широтой и долготой (дают координатную сетку на глобусе). Матрица Якоби (в трехмерном случае) имеет вид:

$$d\psi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

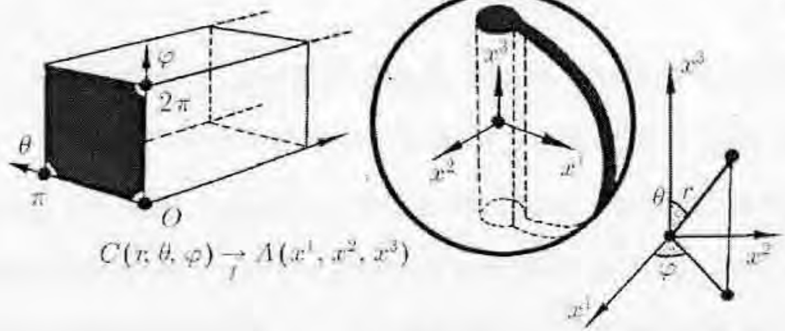


Рис. 13

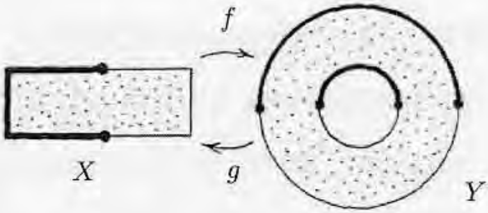


Рис. 15

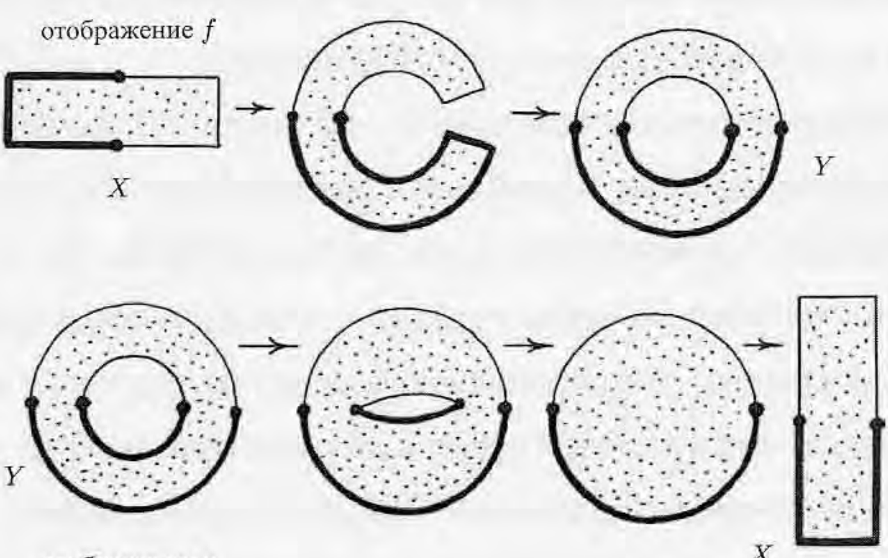


Рис. 16

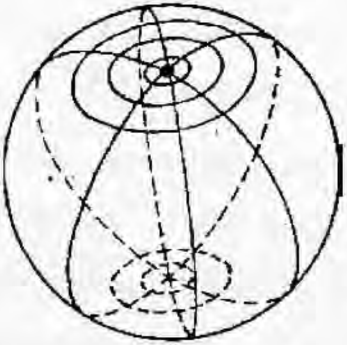


Рис. 14

В заключение вернемся к понятию гомеоморфизма f и поясним, почему важно требовать непрерывности как f, так и обратного отображения f^{-1}. Приведем пример двух топологических и негомеоморфных пространств X и Y для которых существует два отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, которые оба непрерывны и взаимно-однозначны (но $g \neq f^{-1}$). В качестве X возьмем пространство, получающееся из открытого прямоугольника на плоскости путем присоединения к нему «половины его границы», как показано на рис. 15. В качестве Y возьмем пространство, получающееся из открытого плоского кольца присоединением «половины его границы», как показано на рис. 15. Отображения f и g, показанные на рис. 16, очевидно непрерывны и взаимно-однозначны. Но они не взаимно-обратны. Пространство X и Y — негомеоморфны (докажите!).

Задачи

1. Доказать, что система функций $u = x + \sin y$, $v = y - \dfrac{1}{2}\sin x$ на плоскости является регулярной системой координат.
2. Показать, что на окружности S^1 нельзя задать единой системы координат.
3. Записать уравнение Лапласа $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в полярной системе координат.

3. Длина кривой в криволинейной системе координат в области в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь произвольную криволинейную систему координат в области C пространства, и пусть $\gamma(t)$ — произвольная гладкая кривая в этой области. Как запишется длина кривой $\gamma(t)$ в криволинейной системе координат? Проследим, что происходит с компонентами вектора скорости кривой при замене координат. Обозначим криволинейные координаты через $z^1, \ldots, z^n$, т. е. $x^i = x^i(z)$; тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем: 34

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \frac{dx^i(z(t))}{dt} = \sum_{(k)} \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{dz^k}{dt}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(z(t))}{dt}\right)^2}\, dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{(k)} \frac{\partial x^i(z(t))}{\partial z^k}\frac{dz^k}{dt}\right)^2}\, dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{m,p} \frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{dz^m}{dt}\frac{dz^p}{dt}}\, dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p} g_{mp}(z)\frac{dz^m}{dt}\frac{dz^p}{dt}}\, dt, \end{aligned}$$

где функции $g_{mp}(z)$ имеют следующий вид: $g_{mp}(z) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}$. Очевидно, они симметричны по индексам m и p, т. е. $g_{mp} = g_{pm}$; следовательно, набор функций g_{mp} может быть организован в симметричную матрицу, которую мы будем обозначать через $G = (g_{mp})$. В полученной формуле коэффициенты матрицы G представлены в виде сумм произведений элементов матрицы Якоби. В самом деле, $d\psi_{z,x} = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$, следовательно, матрица G представляется в виде произведения двух матриц: $G = A \cdot A^T$, где $A = d\psi_{z,x}$. Ясно, что матрица G зависит от криволинейной системы координат z и будет, вообще говоря, изменяться при заменах координат. Каков закон изменения матрицы $G(z)$? Сделаем еще одну замену переменных, перейдя от $\{z^i\}$ к переменным $\{y^k\}$, т. е. рассмотрим регулярную замену координат вида: $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом мы считаем $\{y^k\}$ снова криволинейными координатами в области C.

35

Тогда коэффициенты $g_{mp}(z)$ меняются по закону

$$g_{kl}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^l} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{m,p} \frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial z^m}{\partial y^k}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial z^p}{\partial y^l} =$$

$$= \sum_{m,p} \frac{\partial z^m}{\partial y^k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\right)\frac{\partial z^p}{\partial y^l} = \sum_{m,p} \frac{\partial z^m}{\partial y^k} g_{mp}(z) \frac{\partial z^p}{\partial y^l},$$

т. е. $\quad G(y) = d\psi_{y,z} G(z) (d\psi_{y,z})^T$.

Замечание. Иногда мы будем обозначать новые координаты так: $z^{i'}$, ставя «штрих» у индексов, записанных в новой системе координат, например, $g_{i'j'}$.

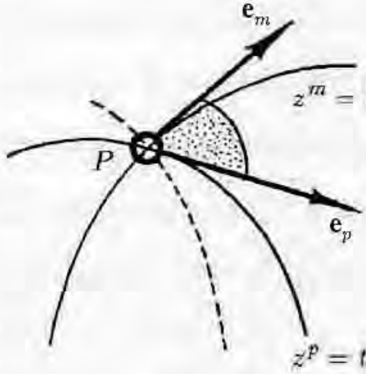
Функции $g_{mp}(z)$ имеют прозрачный геометрический смысл. Рассмотрим точку P в области C и координатные линии криволинейной системы координат $z^1, \ldots, z^n$, проходящие через точку P. Каждая из них может быть задана параметрическими уравнениями:

$$z^1 = c_1, \ \ldots, \quad z^{i-1} = c_{i-1}, \quad z^i = t; \quad z^{i+1} = c_{i+1}, \ \ldots, \quad z^n = c_n,$$

где c_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, $\alpha \neq i$, — постоянные такие, что точка P имеет следующие координаты (в системе z): $P : \{z^\alpha = c_\alpha;\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n\}$. Обозначим m-ю координатную линию через $\gamma_m(t)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда в системе координат x m-я координатная линия системы z запишется так: $\{x^i(c_1, \ldots, c_{m-1}, z^m = t, c_{m+1}, \ldots, c_n)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Вектор скорости этой гладкой кривой в точке P имеет координаты $\mathbf{e}_m = \left\{\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\right\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как $g_{mp}(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}$, то это выражение можно записать в виде: $g_{mp}(z) = \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_p \rangle$, т. е. функции g_{mp} являются скалярными произведениями векторов, касательных к соответствующим координатным линиям (рис. 17). Мы видим, что матрица $G(z)$ при заменах координат преобразуется как матрица квадратичной формы. В частности, если исходные координаты были декартовыми, то матрица G является единичной и, следовательно, в любой другой (криволинейной) системе координат ее можно записать так: $G(z) = AEA^T$, где $A = d\psi_{z,x}$, если $\{x^i\}$ — декартовы координаты (тогда $G(x) = E$).

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим простейшие примеры формул для длины кривой в различных криволинейных системах координат. Попутно мы вычислим в явном виде матрицу G для этих криволинейных систем координат.



36

Рис. 17

1) Полярные координаты на двумерной плоскости $\mathbf{R}^2(r, \varphi)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x^1, x^2) имеет вид:

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Матрица Якоби, уже вычисленная выше, имеет вид:

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix};$$

отсюда

$$G(r, \varphi) = d\psi(d\psi)^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в полярной системе координат длина кривой, заданной в виде: $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$, выражается по формуле:

$$l(\gamma)_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

2) Цилиндрические координаты в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3(r, \varphi, z)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид: $G(x) = E$. Матрица Якоби вычислена нами выше, она имеет вид:

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

отсюда $\quad G(r,\varphi,z) = (d\psi)(d\psi)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Следовательно, в цилиндрической системе координат длина кривой, заданной в виде: $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$, выражается по формуле:

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

В качестве примера рассмотрим вычисление длины винтовой линии на прямом круговом цилиндре, задаваемой параметрически так: $r(t) = R = \mathrm{const}$; $\varphi(t) = \omega t$; $z = qt$. Тогда

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{R^2\omega^2 + q^2}\,dt = (R^2\omega^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}(b-a).$$

3) Сферические координаты в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3(r,\theta,\varphi)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид $G(x) = E$. Матрица Якоби вычислена нами выше, она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

отсюда:

$$G(r,\theta,\varphi) = (d\psi)(d\psi)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в сферических координатах длина кривой, заданной в виде: $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), \varphi(t))$, выражается по формуле:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt.$$

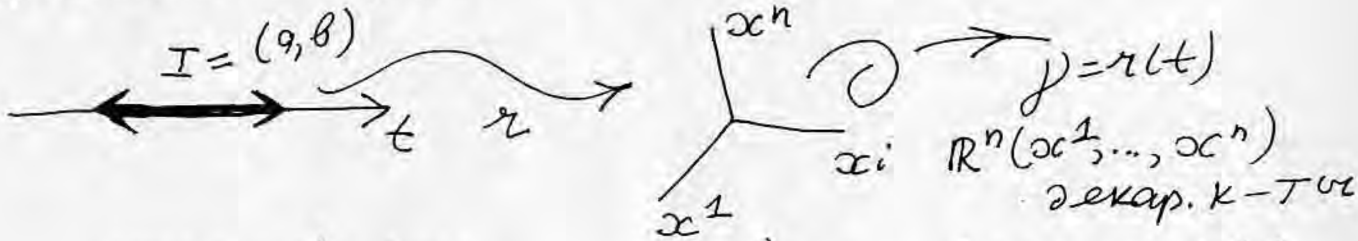
Иногда удобно вместо полной длины дуги выписывать только формулу для дифференциала длины дуги dl. В частности, в разобранных примерах эти дифференциалы (в соответствующих координатах) имеют вид: $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$ — в полярной системе координат на плоскости; $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$ — в цилиндрической системе координат в $\mathbf{R}^3$; $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$ — в сферической системе координат в $\mathbf{R}^3$.

4. Многомерные поверхности (многообразия) в $\mathbb{R}^n$.

В примере выше в точке O в-р $\dot{r} = 0$,
и в это мгновение кривая резко повернула.

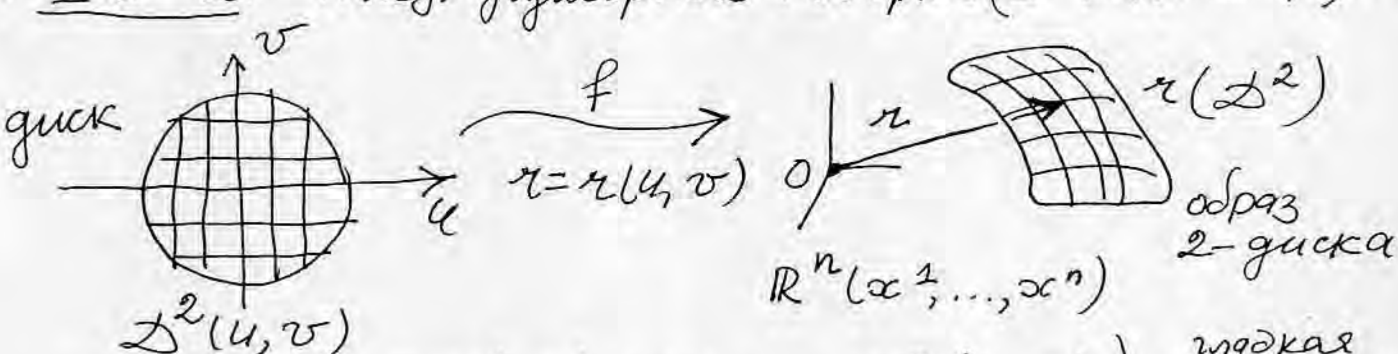
- Отсюда видно: нужно запретить $\dot{r}(t_0) = 0$.
  Итак:
- Определ. Гладкая кривая назыв. <u>регулярной</u>, если $\dot{r}(t) \neq 0 \ \forall t$.
- Из определения $\dot{r}(t)$ $\Longrightarrow$ на такой кривой нет изломов. В-р скорости (касат. в-р) поворачивается гладко.
- В дальнейшем считаем глад. кривые — регулярными.

<u>Шаг 1.</u>
- Аналогичное определение для кривой в $\mathbb{R}^n$.



$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), \text{ где } \dot{r}(t) \neq 0 \ \forall t.$$

- <u>Шаг 2</u>. Глад. двумерные поверхн. (2-многообр.) в $\mathbb{R}^n$.

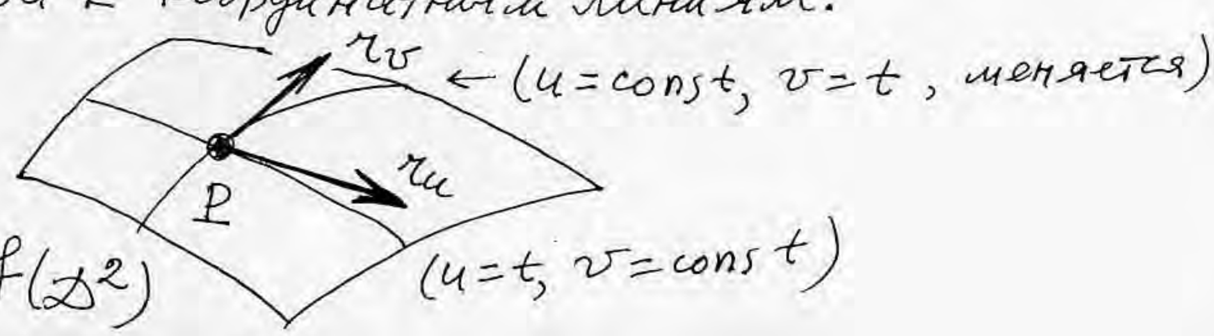


$$r = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v)) \quad \text{гладкая в-р функция}$$

Рассм. в-ры: $r_u = \dfrac{\partial r(u,v)}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial x^1}{\partial u}, \dots, \dfrac{\partial x^n}{\partial u}\right)$ и

$r_v = \dfrac{\partial r(u,v)}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial x^1}{\partial v}, \dots, \dfrac{\partial x^n}{\partial v}\right)$. частные производные.

- Геомет. смысл в-ров r_u и r_v: это касательные в-ра к координатным линиям.



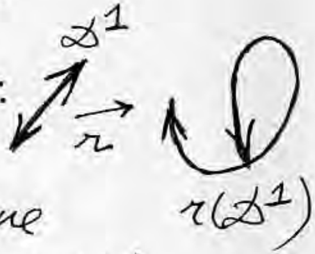
- Касат. плоскость $T_P(r_u, r_v)$ — натянута на векторы r_u и r_v, если они лин. независимы.
- По теор. о неявной функции (см. анализ), если в-ры r_u и r_v лин. незав. в точке P, то локально, около точки P образ $r(\mathcal{D}^2)$ явл. гладкой 2-поверхн. в $\mathbb{R}^n$, в том смысле, что касат. плоскость гладко меняется от точки к точке.
- На этом основании дадим формал. определение.

<u>Опред</u>. Локальной гладкой 2-мерной поверхностью (или локальным 2-мерным многообразием) M^2 в $\mathbb{R}^n$ назыв. мн-во точек в $\mathbb{R}^n$, допускающее представление в виде:

1) $M^2 = \{ r = r(u,v)$, где r_u и r_v лин. незав. всюду на $\mathcal{D}^2(u,v)$, здесь $r: \mathcal{D}^2(u,v) \to \mathbb{R}^n \}$, $r \in C^\infty$, (в частности, $r_u \neq 0$ и $r_v \neq 0$ всюду на $\mathcal{D}^2$).

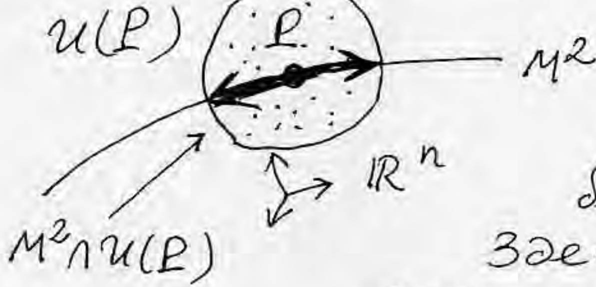
2) $r: \mathcal{D}^2 \to r(\mathcal{D}^2)$ гомеоморфно образу, т.е. r — это гомеомор. $\mathcal{D}^2$ и $r(\mathcal{D}^2)$.

- Коммент. Условие 2 запрещает, например:



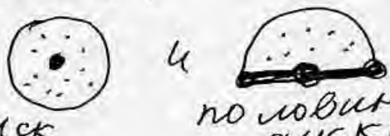
- Касат. плоскость $T_P M^2 \subset \mathbb{R}^n$ и натянута на в-ры r_u и r_v.
- По теор. о неявн. функциях такое отображение r задает гомеоморфизм между $\mathcal{D}^2$ и $r(\mathcal{D}^2)$, и более того, диффеоморфизм: $\mathcal{D}^2 \approx r(\mathcal{D}^2)$.
- Напоминание: $f: X \to Y$ назыв. гомеоморф., если f и f^{-1} оба взаимно-однозн., и оба непрерывны.

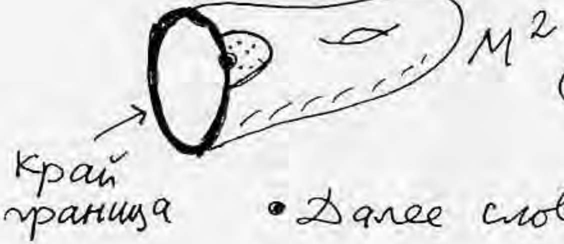
• Опред. Глобальной гладкой 2-мерн. поверхностью M^2 в $\mathbb{R}^n$ (или глобал. 2-многообразием в $\mathbb{R}^n$) назовем мн-во в $\mathbb{R}^n$ такое, что для $\forall$ точки $P \in M^2$ $\exists$ откр. окрестн. (шар) $U(P)$ в $\mathbb{R}^n$: $U(P) \cap M^2$ допускает представление вида # (см. опред. выше). т.е. является локал. гладк. 2-поверхностью.



• Такие 2-поверхн. назовем замкнутыми, = без края = без границы. Здесь $\forall$ точка $P \in M^2$ имеет откр. окрестн., гомеоморф. 2-диску D^2.

• Опред. Поверхн. (2-многообр.) имеет край (границу), если в ней есть точки двух типов:



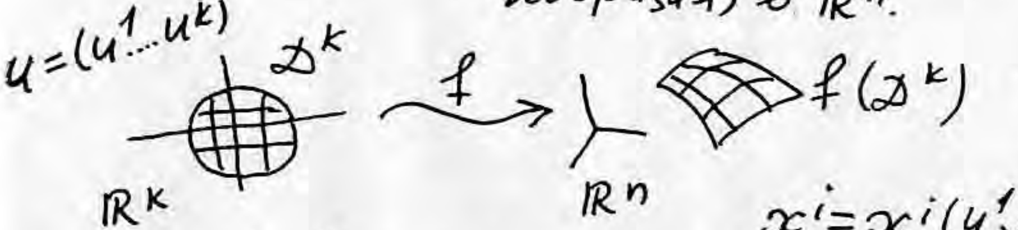


(более подробное опред. см. в учебнике Мищенко, Фоменко, или ниже)

• Далее слово "глобальная" будем опускать.

• Будем говорить, что такое M^2 гладко вложено в $\mathbb{R}^n$.

• Следующ. шаг. Многомерные k-мерн. поверхн. (мног.) $M^k \subset \mathbb{R}^n$ ... а) локальные k-мерн. многообр. (подмногообразия) в $\mathbb{R}^n$.



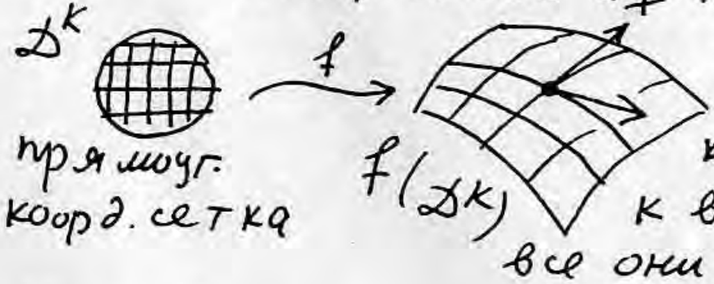
$f: \mathcal{D}^k(u^1, \dots, u^k) \to$
$\to (x^1, \dots, x^n)$, т.е.

$x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, $1 \le i \le n$

1) f — гладко (C^∞) и задает гомеоморфизм $\mathcal{D}^k$ на образ $f(\mathcal{D}^k)$

2) ранг $(df) = k$ ($=\max$), т.е. ранг $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right) = k$

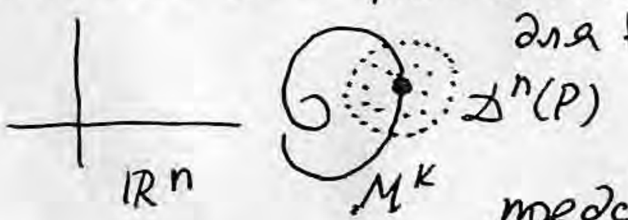
матр. Якоби df: $k \times n$ (размер)



k векторов скоростей: $a_1, \dots, a_k$

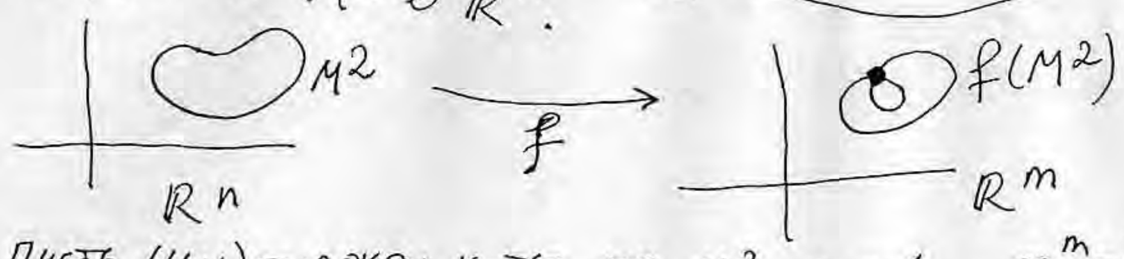
все они линей. незав. т.к. ранг $= k$

б) Глобал. k-мерн. мног. (поверхн.) в $\mathbb{R}^n$.



для $\forall$ точки $\underline{P} \in M$ $\exists$ шар (окрест.) $\mathcal{D}^n(P)$ в $\mathbb{R}^n$ такой, что: $\mathcal{D}^n(\underline{P}) \cap M^k$ = допускает представление в виде локальн. мног. (см. выше).

• Теперь — понятие погружения поверхности M^2 в $\mathbb{R}^m$.



Пусть (u,v) — локал. к-ты на M^2, а $x^1, \dots, x^m$ — декарт. к-ты в $\mathbb{R}^m$.

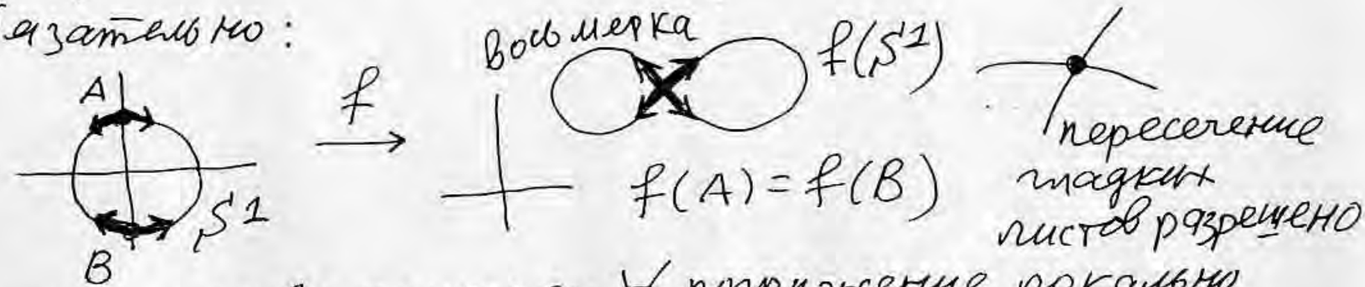
Тогда $f: (x^i = x^i(u,v), 1 \le i \le m)$. Рассмотрим функц. матрицу $df = \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u^1 & \dots & x_u^m \\ \dots & \dots & \dots \\ x_v^1 & \dots & x_v^m \end{pmatrix}$, где $x_u^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}$, $x_v^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}$.

Это — матрица Якоби.

Она задает дифференциал df отображения f.

• <u>Опред.</u> $f: M^2 \to \mathbb{R}^m$ назыв. погружением, если f — гладко (C^∞) и ранг $(df)=2$ в $\forall P\in M^2$.
т.е. векторы r_u и r_v лин. незав. в $\forall$ точке $P\in M^2$.

• Коммент. Не требуется гомеоморфизма M^2 с образом $f(M^2)$. $\forall$ вложение — это погружение. Обратно — не обязательно:

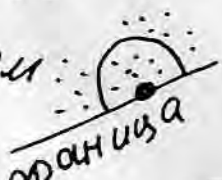


• По теор. о неявн. функциях $\forall$ погружение <u>локально</u> является вложением. Т.е. локально есть гомеоморфизм (и диффеоморф.) на образ.

• <u>Опред.</u> Две поверхн. (два 2-мног.) назыв. гомеом. (диффеом.), если $\exists f: M_1 \to M_2$, где f — гомеоморфизм (соотв. диффеоморфизм).

• Как и в dim = 2 определено вложение и погружение многообразий любой размерности.

• Аналогич. опред. и k-мерное мног. с краем:



• <u>Теор. (Уитни).</u> "слабая".
Пусть дано вложен. M^n в $\mathbb{R}^N$, $N<\infty$.
Тогда $\exists$ погружение $M^n \to \mathbb{R}^{2n}$ и
$\exists$ вложение $M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

Эти теоремы мы здесь не доказываем.

• <u>Теор. (Уитни).</u> "Сильная". Пусть M^n вложено в $\mathbb{R}^N$.
Тогда $\exists$ погружение $M^n \to \mathbb{R}^{2n-1}$ и
$\exists$ вложение $M^n \to \mathbb{R}^{2n}$, при $n>1$.
(без д-ва).