

Здравствуйте, коллеги!

Меня зовут Фоменко Анатолий Тимофеевич.

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений.

Аудитория 16-19 Главного Здания МГУ, 16 этаж. Сайт кафедры:
dfgm.math.msu.su.

Я буду читать Вам полугодовой курс под названием «Классическая дифференциальная геометрия». Для математиков 2 курса, весенний семестр. Вторую часть нашего курса под названием «Дифференциальная геометрия и топология» я прочту в осеннем семестре, для математиков 3 курса.

Рекомендую следующие книги по нашему курсу:

1. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. «Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии». Было несколько изданий.

2. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. «Курс дифференциальной геометрии и топологии». Было несколько изданий. Рекомендую Изд-во Лань, 2010 год. Скоро должно выйти новое переработанное издание и изд-ве УРСС.

3. А.С. Мищенко, Ю.П.Соловьев, А.Т.Фоменко. «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии». Было несколько изданий.

4. Для более подробного изучения рекомендую книгу: Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. «Современная геометрия». Несколько изданий. А также книгу: А.Т.Фоменко «Дополнительные главы дифференциальной геометрии и топологии». Несколько изданий.

На сайте кафедры дифференциальной геометрии и приложений много информации по этому курсу лекций.

Задавайте вопросы сразу, по ходу лекции. Я сразу объясню, чтобы не оставалось неясностей.

2

Начнем с напоминания о свойствах евклидова пространства \mathbb{R}^n .
 Базисные векторы обозначим e_1, \dots, e_n , координаты векторов обозначим $a = (a^1, \dots, a^n)$, $b = (b^1, \dots, b^n)$.
 Сразу договоримся, что индексы у векторов пишем внизу, а индексы у координат векторов пишем наверху. В дальнейшем это соглашение будет нам удобно при записи формул и тензорных законов.

Евклидовым скалярным произведением называется билинейная форма: $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i$.

Свойства этой формы:

1. Билинейность: $\langle \lambda a + \mu b, c \rangle = \lambda \langle a, c \rangle + \mu \langle b, c \rangle$.
2. Симметричность: $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
3. Невырожденность и положительная определенность: $\langle a, a \rangle \geq 0$ и $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

По аналогии, определим новый объект – псевдоевклидово n -мерное пространство индекса s . Обозначим его через \mathbb{R}_s^n .

Оно задается следующей билинейной формой:

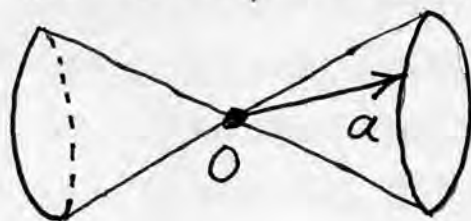
$$\langle a, b \rangle_s = - \sum_{i=1}^s a^i b^i + \sum_{j=s+1}^n a^j b^j ; 0 \leq s \leq n.$$

Ясно, что $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n$. Свойства этой новой формы таковы:

1. Билинейность.
2. Симметричность.
3. Невырожденность, но положительной определенности уже нет, если $s \neq 0, n$. Эта форма индефинитна.

$$\langle a, a \rangle_s = - \sum_{i=1}^s (a^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (a^j)^2.$$

\exists векторы $a \neq 0$, для которых $\langle a, a \rangle_s = 0$,



они образуют "конус" в \mathbb{R}_s^n

В качестве примера индефинитной метрики рассмотрим так называемые псевдоевклидовы метрики индекса s в псевдоевклидовых пространствах \mathbf{R}_s^n . Для построения этой метрики рассмотрим евклидово пространство \mathbf{R}^n , отнесенное к декартовым координатам x^1, \dots, x^n и зададим в каждой точке $P \in \mathbf{R}^n$ следующую билинейную форму (с постоянными, т. е. не зависящими от точки коэффициентами):

$$\langle \xi, \eta \rangle_s = - \sum_{i=1}^s \xi^i \eta^i + \sum_{j=s+1}^n \xi^j \eta^j.$$

Тогда для любой гладкой кривой $\gamma(t) = \{x^i(t)\}$, $1 \leq i \leq n$, длина дуги выражается по формуле:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{- \sum_{i=1}^s \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 + \sum_{j=s+1}^n \left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2} dt.$$

При $n = 4$ псевдоевклидово пространство индекса 1 называется иногда *пространством Минковского* (в специальной теории относительности); мы также будем рассматривать пространства \mathbf{R}_1^3 и \mathbf{R}_1^2 . Отметим, что псевдоевклидово пространство индекса 0 совпадает с обычным евклидовым пространством.

Замечание. Изучение пространств \mathbf{R}_{n-s}^n сводится, в некотором смысле, к изучению пространств \mathbf{R}_s^n , поскольку все длины в \mathbf{R}_{n-s}^n можно умножить на i (мнимая единица); тогда форма \langle , \rangle_{n-s} превращается в форму \langle , \rangle_s . Поэтому будем для простоты считать, что выполнено неравенство: $s \leq [n/2]$ (целая часть).

Как и в обычном евклидовом пространстве длина вектора ξ в пространстве \mathbf{R}_s^n определяется по формуле: $|\xi|_s = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_s}$, однако в \mathbf{R}_s^n , в отличие от \mathbf{R}^n , длины векторов могут быть нулевыми и мнимыми. В самом деле, так как форма \langle , \rangle_s не является положительно определенной, то множество всех векторов $\xi \in \mathbf{R}_s^n$, выходящих, например, из начала координат, разбивается на следующие три непересекающиеся подмножества: $\langle \xi, \xi \rangle_s < 0$ (*времени-подобные векторы*), $\langle \xi, \xi \rangle_s = 0$ (*световые или изотропные векторы*), $\langle \xi, \xi \rangle_s > 0$ (*пространственно-подобные векторы*). Это

обстоятельство вызывает появление векторов, имеющих нулевую, вещественную и чисто мнимую длину. В самом деле, времени-подобные векторы имеют чисто мнимую длину, световые (изотропные) — нулевую, а пространственно-подобные — вещественную длину. Эти три типа векторов отделены друг от друга и с точки зрения их расположения в пространстве. Опишем это распределение для векторов, выходящих из начала координат. Из определения видно, что изотропные векторы заполняют конус:

$$-\sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = 0$$

с вершиной в начале координат; времени-подобные векторы расположены «внутри» конуса, т. е. в его полости, определяемой координатной плоскостью (x^1, \dots, x^s) , а пространственно-подобные векторы расположены «снаружи» светового конуса (рис. 1). Уже одно это обстоятельство показывает, что индефинитная метрика определяет более разнообразную геометрию, чем евклидова метрика.

Замечание. В пространстве Минковского (в специальной теории относительности) \mathbf{R}_1^4 изотропный конус целиком состоит из так называемых «световых векторов» ξ (т. е. $\langle \xi, \xi \rangle_1 = 0$) и называется световым конусом, так как луч света, выпущенный из начала координат, будет распространяться по одной из образующих этого конуса (в предположении, что в качестве координаты x^1 выбран параметр ct , где c — постоянная, обозначающая скорость света).

Как и в евклидовом пространстве, мы можем теперь определить длину любой гладкой кривой в псевдоевклидовом пространстве \mathbf{R}_s^n индекса s , положив $l_s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_s} dt$. Отличие от евклидова случая в том, что некоторые кривые ^a могут иметь нулевую, чисто мнимую и комплексную длину. В самом деле, в силу аддитивности интеграла вдоль кривой, его можно разбить в сумму нескольких слагаемых (допустим, для простоты, что число слагаемых конечно), каждое из которых характеризуется тем, что в каждой точке выделенного отрезка кривой скалярное произведение

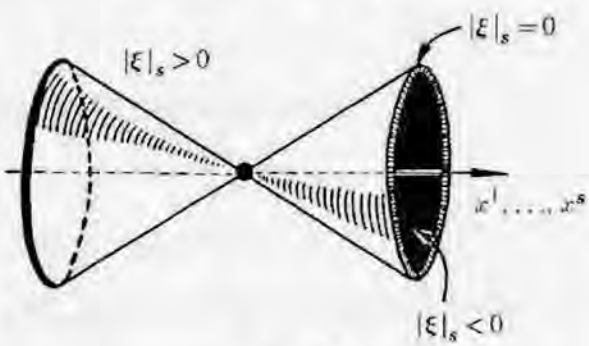


Рис. 1

$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_s$ не меняет знака (можно выделить также отрезки, имеющие нулевую длину). Тогда, в общем случае, длина кривой может быть записана комплексным числом.

Большую роль в развитии науки сыграло пространство R_1^4 , введенное для более удобной записи некоторых эффектов специальной теории относительности. Отнесем пространство R_1^4 к координатам $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, т. е. $dl^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Здесь t — время, c — скорость света. Рассмотрим в R_1^4 орторепер e_1, e_2, e_3, e_4 (относительно евклидовой метрики R^4 , которой снабжена модель пространства R_1^4 , совмещенная в целях наглядности с евклидовым четырехмерным пространством). Рассмотрим так называемую «мировую линию» материальной частицы $\gamma(\tau)$, эта линия является траекторией в пространстве R_1^4 .

Если координаты x, y, z трактовать как пространственные координаты, то движение частицы по траектории $\gamma(\tau)$ можно интерпретировать как эволюцию в пространстве и во времени материальной точки, перемещающейся в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть $\dot{\gamma}$, как и раньше, касательный вектор к траектории $\gamma(\tau)$ в точке τ . Поскольку в специальной теории относительности принимается постулат, что никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света c , то $cdt > \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, где (cdt, dx, dy, dz) — координаты бесконечно малого вектора смещения вдоль траектории $\gamma(\tau)$ в направлении касательного вектора $\dot{\gamma}(\tau)$. Иными словами, длина любого пути оценивается сверху тем расстоянием, которое успеет за данный промежуток времени пройти луч света.

Отсюда мы получаем, что вдоль мировой линии $\gamma(\tau)$ любой материальной частицы всегда выполнено соотношение: $-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0$, т. е. $\langle \dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau) \rangle_1 < 0$. Это означает, что каждый касательный вектор к мировой линии является времени-подобным вектором. Отсюда следует, что мировая линия материальной частицы всегда имеет чисто мнимую длину. В частности, мировая линия целиком распространяется строго внутри светового (изотропного) конуса, имеющего своей осью прямую, параллельную оси t . Это условие должно выполняться в каждой точке мировой линии (см. рис. 2). Напомним, что изотропный конус определен в каждой точке псевдоевклидова пространства. К более подробному изучению геометрии пространства Минковского мы вернемся в следующих параграфах.



Рис. 2. Мировой линии, изображенной в нижней части рисунка, быть не может

Псевдосфера и геометрия Лобачевского

Рассмотрим псевдоевклидово пространство \mathbf{R}_s^n индекса s . В евклидовом пространстве \mathbf{R}^n сфера S^{n-1} (гиперсфера) определена как множество точек, удаленных от начала координат на расстояние ρ . В псевдоевклидовом пространстве также можно рассмотреть множество точек, удаленных от начала координат на расстояние ρ (но только теперь ρ может быть не только вещественным, но чисто мнимым или нулем). Это множество точек мы будем называть *псевдосферой* индекса s и обозначать через S_s^{n-1} . Ясно, что $S_0^{n-1} = S^{n-1}$. В дальнейшем будем различать псевдосферы вещественного, мнимого и нулевого радиусов. Псевдосфера нулевого радиуса

описывается уравнением второго порядка:
$$-\sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = 0,$$

где x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в \mathbf{R}^n , на котором мы моделируем псевдоевклидово пространство \mathbf{R}_s^n . Очевидно, что псевдосфера нулевого радиуса совпадает с изотропным конусом.

Рассмотрим примеры. Пусть $n = 2$, $s = 1$. Изотропный конус состоит из двух прямых: $x^1 = \pm x^2$ (мы рассматриваем двумерную плоскость \mathbf{R}^2 , отнесенную к декартовым координатам x^1, x^2 , и на этой плоскости моделируем псевдоевклидову геометрию). Этот конус разбивает \mathbf{R}^2

на две области: в одной из них $\langle \xi, \xi \rangle_1 > 0$ (это область, определяемая

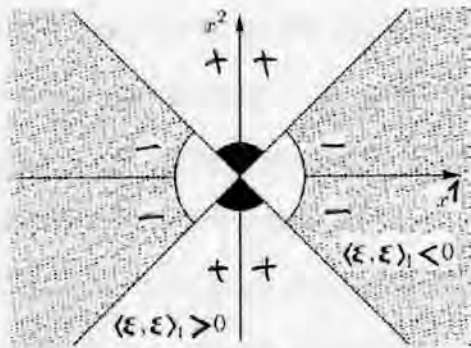


Рис. 3

неравенством: $|x^2| > |x^1|$, в другой $\langle \xi, \xi \rangle_1 < 0$ (это область, определяемая неравенством $|x^2| < |x^1|$) (рис. 3). Псевдосферы вещественного радиуса — это гиперболы: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = \alpha^2$, где α — вещественное число. Псевдосферы мнимого радиуса — это гиперболы: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = -\alpha^2$ (рис. 4).

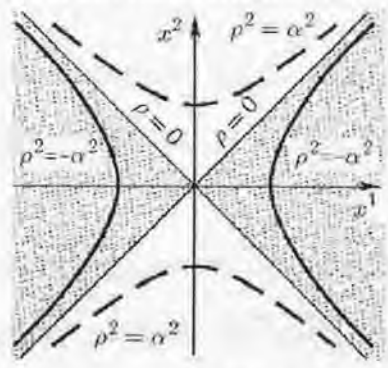


Рис. 4

Пусть теперь $n = 3, s = 1$. Изотропный конус (псевдосфера нулевого радиуса) — это обычный конус второго порядка, задаваемый уравнением: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$. Он разбивает пространство на две области (в данном случае, пользуясь привычными терминами, можно сказать: «разбивает на внутреннюю и внешнюю области») (рис. 5).

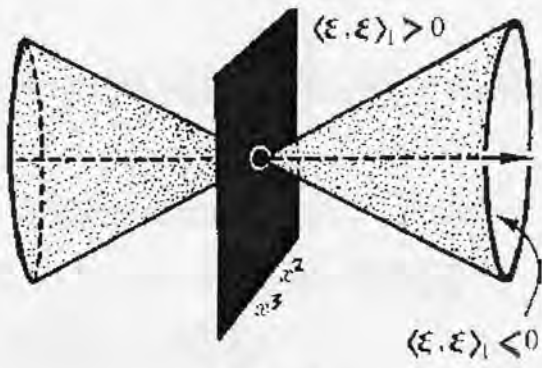


Рис. 5

Псевдосферы вещественного радиуса — это однополостные гиперболоиды: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = +\alpha^2$. Псевдосферы мнимого радиуса — это двуполостные гиперболоиды: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -\alpha^2$ (см. рис. 6).

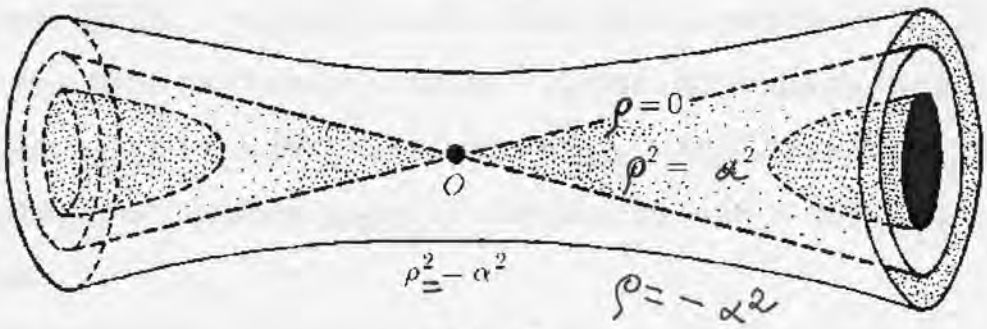


Рис. 6

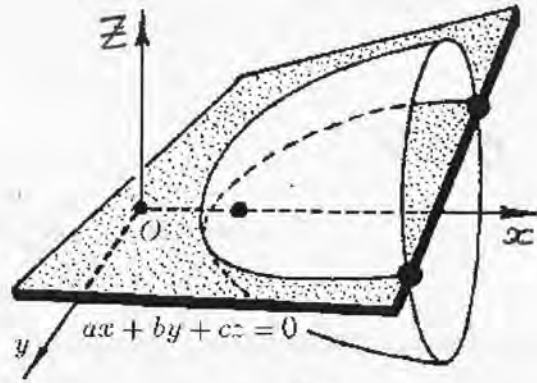


Рис. 7

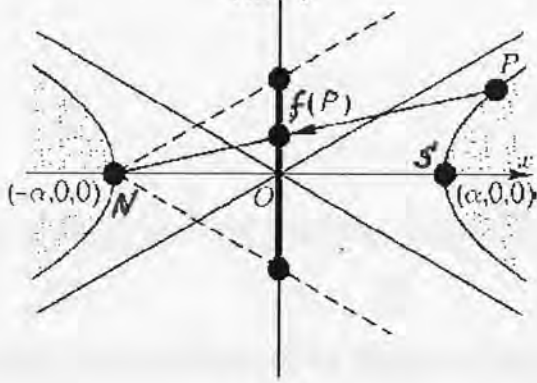


Рис. 8

$$P \rightarrow f(P)$$

Изучим свойства пространства \mathbf{R}_1^3 , которое снова будем моделировать в пространстве \mathbf{R}^3 ; через x, y, z обозначаем декартовы координаты в \mathbf{R}^3 ; тогда $\langle \xi, \xi \rangle_1 = -x^2 + y^2 + z^2$.

Рассмотрим псевдосферу мнимого радиуса. Это — двуполостный гиперboloид, задаваемый уравнением: $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$. Поскольку он вложен в \mathbf{R}_1^3 , геометрия пространства \mathbf{R}_1^3 индуцирует некоторую геометрию на псевдосфере мнимого радиуса. Эту же мысль можно сформулировать так: метрика \mathbf{R}_1^3 индуцирует некоторую метрику на псевдосфере. Впрочем, даже не располагая понятием римановой метрики, мы можем придать содержательный смысл словам: «геометрия, индуцированная на гиперboloиде». Рассмотрим псевдосферу $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$ (для простоты ограничимся изучением только одной ее полости, например, той, которая определена неравенством $x > 0$); «точками» индуцированной на ней геометрии объявим обычные точки гиперboloида, а «прямыми» индуцированной геометрии объявим линии на гиперboloиде, получающиеся при пересечении его плоскостями вида $ax + by + cz = 0$, проходящими через начало координат (рис. 7). Оказывается, возникаю-

щую таким образом геометрию на псевдосфере можно изучать методами аналитической геометрии, проводя аналогию с геометрией на обычной сфере. Для этого удобно совершить преобразование, аналогичное стереографической проекции сферы на плоскость. Центром псевдосферы $S_1^2 = \{-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2\}$ будем считать начало координат — точку O ; северным полюсом N — точку с декартовыми координатами $(-\alpha, 0, 0)$; южным полюсом S — точку с координатами $(\alpha, 0, 0)$; в качестве плоскости, на которую мы будем проектировать, возьмем плоскость YOZ , проходящую через центр псевдосферы (кстати, ограничение скалярного произведения $\langle \xi, \eta \rangle_1$ на плоскость YOZ имеет вид: $\xi^2 \eta^2 + \xi^3 \eta^3$, т.е. псевдоевклидово скалярное произведение $\langle \xi, \eta \rangle_1$ индуцирует на плоскости YOZ евклидово скалярное произведение). Рассмотрим переменную точку P на правой полости гиперboloида и соединим ее с точкой N (т.е. с северным полюсом). Тогда отрезок PN встречает плоскость YOZ в некоторой точке, которую мы обозначим через $f(P)$ и назовем образом точки P при стереографической проекции $f: S_1^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Точно так же можно определить стереографическую проекцию левой полости гиперboloида на ту же плоскость YOZ . На рис. 8 показано сечение псевдосферы плоскостью, проходящей через ось OX . Образ правой полости гиперboloида покрывает не всю плоскость YOZ , а только внутренность диска радиуса $\alpha: y^2 + z^2 < \alpha^2$. Образ левой полости гиперboloида покрывает внешность окружности: $y^2 + z^2 = \alpha^2$. В отличие от обычной сферы S^2 , образ псевдосферы S_1^2 при стереографической проекции покрывает только часть плоскости YOZ , так как окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ не принадлежит образу проекции. Северный полюс N переходит (как и в случае сферы) в бесконечно удаленную точку плоскости YOZ . Пусть теперь точка P имеет координаты (x, y, z) (где $x > 0$) и пусть (u^1, u^2) — декартовы координаты точки $f(P)$ на плоскости YOZ , где f — стереографическая проекция. Вычислим связь между этими координатами.

Лемма 1. Пусть $P = (x, y, z)$, $f(P) = (u^1, u^2)$. Тогда

$$x = \alpha \cdot \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}; \quad y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}; \quad z = \frac{2\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2},$$

где: $|\mathbf{u}|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$; $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$.

Доказательство. Из рис. 8 следует:

$$\frac{y}{u^1} = \frac{x + \alpha}{\alpha}; \quad \frac{z}{u^2} = \frac{x + \alpha}{\alpha}, \quad \text{т.е. } y = u^1 \frac{x + \alpha}{\alpha}; \quad z = u^2 \frac{x + \alpha}{\alpha}.$$

Так как $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, то

$$-\alpha^2 = -x^2 + ((u^1)^2 + (u^2)^2) \frac{(x + \alpha)^2}{\alpha^2};$$

10

далее (поскольку $(x - \alpha) > 0$): $x - \alpha = \frac{x + \alpha}{\alpha^2} \cdot |\mathbf{u}|^2$, т. е.

$$x = \alpha \cdot \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. Координаты (u^1, u^2) (меняющиеся в открытом диске $(u^1)^2 + (u^2)^2 < \alpha^2$) задают регулярную систему координат на правой полости гиперboloида, т. е. стереографическая проекция задает регулярную замену координат: $f: (x, y, z) \rightarrow (u^1, u^2)$.

Доказательство. Между координатами (x, y, z) точки P на правой полости псевдосферы имеется зависимость: $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, а потому положение точки P можно однозначно определить, задав только два числа, например, y, z , т. е. координаты ортогональной проекции точки P на плоскость YOZ . При этом можно считать, что правая полость псевдосферы задается уравнением $x = \sqrt{\alpha^2 + y^2 + z^2}$. Тем самым стереографическую проекцию f можно понимать как замену координат $(y, z) \rightarrow (u^1, u^2)$. Осталось найти матрицу Якоби этой замены и убедиться в том, что якобиан ее отличен от нуля. Прямой подсчет дает:

$$\frac{\partial y}{\partial u^1} = \frac{2\alpha^2(\alpha^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2)}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial u^2} = \frac{2\alpha^2 2u^1 u^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u^1} = \frac{2\alpha^2 2u^1 u^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial u^2} = \frac{2\alpha^2(\alpha^2 + (u^2)^2 - (u^1)^2)}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2};$$

$$J(f) = 2\alpha^2 \cdot \frac{\alpha^2 + |\mathbf{u}|^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2} = 2\alpha x > 0.$$

Таким образом, якобиан замены положителен во всех точках диска $y^2 + z^2 < \alpha^2$. Лемма доказана. □

Вернемся к сфере S^2 . Какая геометрия возникнет на сфере, если «точками» объявить обычные точки сферы, а «прямыми» — сечения сферы плоскостями, проходящими через центр O (т. е. экваторы)? Посмотрим: каким геометрическим аксиомам удовлетворяет множество этих «точек» и «прямых»? Ясно, что через каждую пару не диаметрально противоположных «точек» проходит одна и только одна «прямая»; однако если

«точки» диаметрально противоположны, то через них проходит бесконечное множество «прямых». Кроме того, через «точку», расположенную вне «прямой», нельзя провести ни одной «прямой», не пересекающейся с исходной «прямой», т. е. в этой геометрии на сфере не существует «параллельных» (т. е. не пересекающихся) прямых».

Если мы захотим приблизить эту геометрию к евклидовой, то кое-какие улучшения сделать можно. Например, объявив «точками» новой геометрии пары диаметрально противоположных точек $(P, -P)$ на сфере S^2 , мы устраним первый из отмеченных «недостатков», а именно — теперь через любую пару «точек» проходит одна и только одна «прямая» (если эти «точки» не совпадают). Это свойство уже аналогично соответствующему свойству в евклидовой геометрии. Теперь в нашей геометрии выполнены все классические аксиомы Евклида, кроме «пятого постулата», а именно: по-прежнему, через «точку», взятую вне «прямой», нельзя провести ни одной «прямой», параллельной данной, т. е. любые две «прямые» пересекаются (либо в одной «точке», либо совпадают). В самом деле, любые два экватора на сфере (несовпадающие) определяют одну и только одну «точку» $(P, -P)$. Оказывается, полученная геометрия (называемая иногда *эллиптической*) является не менее содержательной, чем евклидова геометрия.

Описанное отождествление точек P и $-P$, где точка P пробегает сферу, эквивалентна факторизации сферы по действию симметрии отражения в точке O . Так как каждая пара $(P, -P)$ определяет одну и только одну прямую в трехмерном пространстве (куда вложена сфера), то можно сопоставить каждой «прямой» эллиптической геометрии, т. е. экватору, ортогональную ему прямую, проходящую через точку O . Таким образом, эллиптическая геометрия моделируется на двумерном вещественном проективном пространстве, известном из курса аналитической геометрии. В дальнейшем мы будем неоднократно возвращаться к этому объекту. Описанное сопоставление «точке» — «прямой» превращается в двойственность на проективном пространстве, позволяющую автоматически получать из каждой теоремы эллиптической геометрии некоторую новую теорему, формально получающуюся из предыдущей заменой всех «точек» на «прямые» и наоборот.

Вернемся теперь к псевдоевклидовой геометрии и к геометрии, которую она индуцирует на псевдосфере мнимого радиуса. При стереографической проекции $f: +S_1^2 \rightarrow \{y^2 + z^2 < \alpha^2\} = D^2$ (где через $+S_1^2$ мы обозначаем правую полость гиперболоида) точки гиперболоида переходят во внутренние точки двумерного диска D^2 радиуса α . В какие кривые на круге D^2 перейдут «прямые» нашей геометрии на гиперболоиде, т. е. линии пересечения его с плоскостями, проходящими через центр псевдосферы — точку O (т. е. аналоги экваторов на сфере)?

Лемма 3. Каждая линия пересечения $+S_1^2$ с плоскостью вида $ax + by + cz = 0$ переходит при отображении f в дугу окружности, пересекающую окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ под прямым углом (рис. 9).

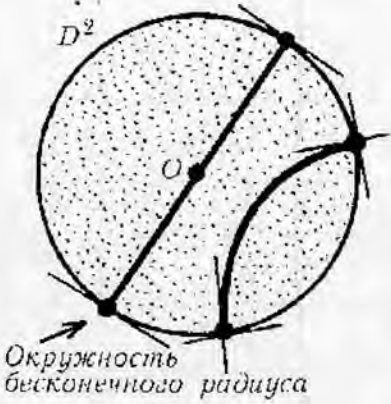


Рис. 9

Доказательство. Напомним, что углом между пересекающимися кривыми мы называем угол между их векторами скоростей в точке пересечения. В силу леммы 1 для выяснения того, в какую кривую переходит «прямая» на $+S_1^2$, достаточно подставить в уравнение плоскости $ax + by + cz = 0$ явные выражения переменных x, y, z как функций от переменных u^1, u^2 . Пусть, например, $a \neq 0$. Тогда уравнение:

$$a\alpha \cdot \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2} + \frac{2b\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2} + \frac{2c\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2} = 0$$

после элементарных преобразований приводится к виду: $\left(u^1 + \frac{b\alpha}{a}\right)^2 + \left(u^2 + \frac{c\alpha}{a}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}(b^2 + c^2 - a^2)$, т. е. определяет окружность с центром в точке $\left(-\frac{b\alpha}{a}, -\frac{c\alpha}{a}\right)$ и радиуса $\frac{\alpha}{a}\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} = r$, пересекающую

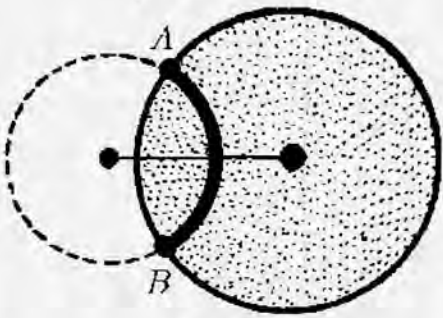


Рис. 10

окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ в точках A и B под прямым углом (рис. 10). Тот факт, что угол в точках пересечения равен $\pi/2$, вытекает из очевидного соотношения: $\alpha^2 + r^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$. Отметим, что «прямой» из $+S_1^2$ при отображении f является не вся окружность $\left(u^1 + \frac{b\alpha}{a}\right)^2 + \left(u^2 + \frac{c\alpha}{a}\right)^2 = r^2$, а только та ее часть, которая содержится в круге $y^2 + z^2 < \alpha^2$. \square

Итак, геометрия, индуцированная на псевдосфере мнимого радиуса в \mathbf{R}_1^3 совпадает (после подходящей замены координат) с геометрией, возникающей в круге радиуса α на евклидовой плоскости \mathbf{R}^2 , если в качестве

«точек» взять обычные точки этого круга (без граничных точек), а в качестве «прямых» взять дуги окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом (в частности, «прямыми» являются все диаметры круга, поскольку их можно рассматривать как дуги окружностей бесконечно большого радиуса). Геометрия эта называется *геометрией Лобачевского*, а ее модель в круге радиуса α на евклидовой плоскости называется моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского. Сам Н. И. Лобачевский получил свою геометрию иным путем, без использования псевдоевклидовых пространств, а непосредственно отправляясь от такой формы «пятого постулата», которая предполагала наличие бесконечного множества прямых, параллельных данной.

На модели Пуанкаре легко проверить все аксиомы (постулаты) Евклида и убедиться в их справедливости, кроме пятого постулата. На рис. 11 наглядно показано, что через любую точку, взятую вне «прямой», можно провести бесконечное число «прямых», параллельных (т. е. не пересекающих) данной. Отметим, что если устремить параметр α к бесконечности, то в любой конечной области на модели Пуанкаре геометрия Лобачевского будет «стремиться» к евклидовой геометрии, так как дуги окружностей начнут распрямляться и превращаться в евклидовы прямые. Граница модели Пуанкаре — окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ — называется *абсолютом*, на ней расположены бесконечно удаленные точки плоскости Лобачевского. Иногда, при изучении плоскости Лобачевского полагают, для простоты, $\alpha = 1$.

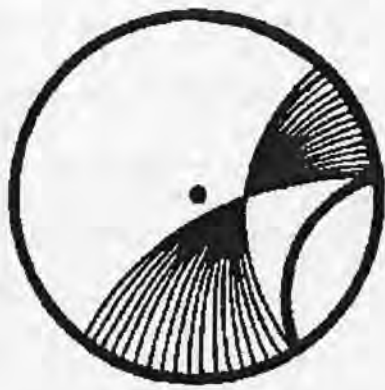


Рис. 11

Замечание. Можно рассмотреть геометрию, возникающую на псевдосферах вещественного радиуса в \mathbf{R}_1^5 (т. е. на однополостных гиперболоидах).

На границе модели Пуанкаре (круга радиуса d) расположены бесконечно удаленные точки. Граничная окружность (не принадлежащая плоскости Лобачевского) называется абсолют. В каждой из трех описанных геометрий можно рассмотреть треугольники, образованные «прямыми» этих геометрий. Для евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна π . В дальнейшем мы покажем, что сумма углов сферического треугольника больше π , а сумма углов гиперболического треугольника меньше π .



Геометрия, возникающая при факторизации сферы S^2 по действию инволюции $\sigma: x \rightarrow -x$, задает проективную плоскость $\mathbb{R}P^2 \cong S^2 / \mathbb{Z}_2 \cong S^2 / (x, -x)$