Лекция 16

3. Экстремальность геодезических

Для риманова многообразия мы определили геодезические как траектории, вдоль которых параллельный перенос сохраняет поле скоростей траектории. Оказывается, что для геодезических существует еще одна исключительно важная характеристика, которая может также служить определением геодезической. Эта характеристика связана с экстремальными свойствами специального функционала, весьма «похожего» на функционал длины; геодезические выступают как экстремальные решения этого функционала.

Пусть M^n — риманово многообразие с метрикой: g_{ij}, $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты; тогда траектория $\gamma(t)$ может быть задана так: $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$; в качестве области D возьмем отрезок $I = [0, 1]$. Для удобства будем рассматривать траектории $\gamma(t)$ с фиксированными началом и концом: $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$, где $P, Q \in M^n$.

Определение 1. Функционал

$$L(\gamma) = \int\limits_0^1 |\dot{\gamma}|\, dt = \int\limits_0^1 \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j}\, dt$$

называется *функционалом длины траектории*. Функционал

$$E(\gamma) = \int\limits_0^1 |\dot{\gamma}|^2\, dt = \int\limits_0^1 g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j\, dt$$

называется *функционалом действия траектории* $\gamma(t)$.

Функционалы L и E различны, но между ними существует связь в виде неравенства: $L^2 \leqslant E$; связаны также и их экстремали (см. ниже).

Лемма 1. *Имеет место неравенство:* $L^2 \leqslant E$.

Доказательство. Применяя известное неравенство Шварца:

$$\left(\int_0^1 fg\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2\,dt\right)\cdot\left(\int_0^1 g^2\,dt\right)$$

к функциям: $f(t) \equiv 1$ и $g(t) = |\dot\gamma(t)|$, получаем: $(L(\gamma))^2 \leqslant E(\gamma)$, причем равенство достигается только при постоянной функции $g(t)$, т. е. тогда и только тогда, когда параметр t пропорционален длине дуги. $\square$

Рассмотрим экстремали функционалов E и L.

Теорема 1. *Экстремалями функционала* $E(\gamma)$ *являются геодезические траектории* $\gamma(t)$, *параметризованные параметром* t, *пропорциональным длине дуги* s. *Если, в частности, наложить начальное условие:* $|\dot\gamma(0)| = 1$ *в начальной точке* P, *то параметр* t *определяется однозначно и является натуральным, т. е. совпадает с длиной дуги.*

Доказательство. Напомним, что мы всегда рассматриваем траектории с параметром, т. е. две траектории, описывающие одно и тоже геометрическое место точек, но имеющие различные параметры, рассматриваются нами как различные траектории. В силу теоремы 1 экстремали функционала $E(\gamma)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера, которые в данном случае имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x^k}\right) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

лагранжиан L равен: $L(x^i, \dot{x}^j) = g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j$. Вычисление дает:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j; \;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = 2g_{kj}\dot{x}^j; \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) = 2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^j + 2g_{kj}\ddot{x}^j; \\
&\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - 2g_{kj}\ddot{x}^j; \\
&g_{kj}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j\right) = 0; \\
&\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2}g^{k\alpha}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0,
\end{aligned}
$$

т. е. $\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$. Итак, уравнения Эйлера совпали с уравнениями геодезических в римановой связности. Теорема доказана. □

Экстремаль функционала $E(\gamma)$ определяется из уравнений Эйлера как траектория с параметром. Если на геодезической сделать произвольную гладкую замену параметра, то эта траектория перестанет, вообще говоря, быть геодезической.

Теорема 2. *Экстремалями функционала $L(\gamma)$ являются гладкие траектории $\gamma(t)$, получающиеся из геодезических траекторий путем произвольных гладких замен параметра на них. В частности, любая экстремаль функционала $E(\gamma)$ (параметризованная геодезическая) является экстремалью $L(\gamma)$, но не наоборот.*

Грубо говоря, у функционала $L(\gamma)$ «больше» экстремалей, чем у функционала $E(\gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнения Эйлера для $L(\gamma)$. Лагранжиан L имеет вид: $L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$. Получаем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \\
&\frac{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Пусть $\gamma(t)$ — какое-либо решение этой системы. Так как $\gamma(t)$ — гладкая кривая в M^n, то на ней можно ввести натуральный параметр $t = s$. Тогда

$|\dot\gamma(s)| = 1$ вдоль γ, следовательно, уравнения Эйлера превращаются в:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot x^i \dot x^j) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot x^k}(g_{ij}\dot x^i \dot x^j)\right) = 0,$$

так как $\sqrt{g_{ij}\dot x^i \dot x^j} = 1$. Но эти уравнения совпадают, в силу теоремы 1, с уравнениями геодезических. Итак, если на произвольном решении $\gamma(t)$ — экстремали L — ввести натуральный параметр, то эта траектория превращается в геодезическую. Обратно, пусть $\gamma(s)$ — произвольная геодезическая на M^n; в силу предыдущего, она — экстремаль L. Пусть $s = s(t)$ — произвольная гладкая замена параметра на $\gamma(s)$; тогда $L(\gamma(s)) = L(\gamma(s(t)))$, так как длина дуги не меняется при гладких заменах параметра; следовательно, значение L не меняется. Итак, $\gamma(s(t))$ — снова экстремаль L. Теорема доказана. □

Удобно представлять себе взаимоотношение между экстремалями E и экстремалями L следующим образом. Рассмотрим пространство ΩM^n всех гладких кривых на M^n и рассмотрим на нем действие бесконечномерной группы G, элементами которой являются всевозможные гладкие замены параметра на кривой. Тогда из каждой точки этого пространства, т. е. кривой γ, «вырастает» орбита $G(\gamma)$ действия G на Ω. В силу инвариантности L относительно действия G он постоянен на каждой орбите $G(\gamma)$, $\gamma \in \Omega$ (рис. 8). Так как L постоянен вдоль каждой орбиты, то все точки на орбите $G(\gamma)$ «вырождены», в том смысле, что сколь угодно близко к кривой γ имеются кривые (т. е. параметризованные траектории), на которых L принимает то же значение, что и на γ. Для E ситуация иная: этот функционал меняется при заменах параметра, а потому он не постоянен на орбитах действия G. Итак, для того, чтобы получить все экстремали L, следует рассмотреть орбиты всех экстремалей функционала E.

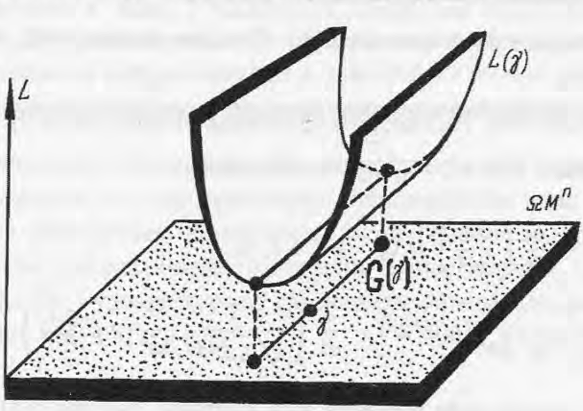

Рис. 8

4. Локальная минимальность геодезических

Геодезические являются локальными минимумами обоих функционалов L и E, т. е. если рассмотреть малое возмущение η геодезической γ, где носитель η также мал, то новая траектория $\gamma + \eta$ будет иметь длину, не меньшую, чем γ. Сформулируем точную задачу. Рассмотрим компактное риманово многообразие M^n; в силу результатов главы 5, существует такое $\epsilon > 0$, что любая пара точек P, Q, расположенных в шаре D^n_ϵ радиуса ϵ, соединяется единственной геодезической, целиком лежащей в этом шаре.

Теорема 1. *Пусть D^n_ϵ, ϵ — указанные выше шар и число, и пусть $\gamma\colon [0,1] \to M^n$ — геодезическая длины меньше ϵ, соединяющая две точки из D^n_ϵ; пусть $\omega\colon [0,1] \to M^n$ — любой другой гладкий путь, соединяющий эти же точки (путь можно брать и кусочно-гладким). Тогда: $L(\omega) \geqslant L(\gamma)$, причем равенство достигается лишь при совпадении точечных множеств $\gamma[0,1]$ и $\omega[0,1]$ (т. е. когда эти два пути совпадают как гладкие кривые в M^n). В этом смысле геодезическая γ — кратчайший путь, соединяющий точки P и Q.*

Без доказательства.

5. Минимальные поверхности

В гл. 4 мы познакомились с минимальными двумерными поверхностями, т. е. такими M^2, для которых средняя кривизна H равна нулю.

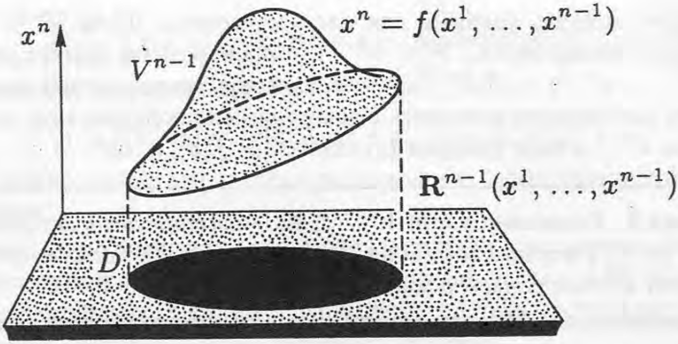

Рис. 15

Посмотрим теперь на минимальные поверхности с точки зрения экстремальных функций функционала площади.

Рассмотрим функционал $(n-1)$-мерного объема, определенный на компактных гиперповерхностях, являющихся графиками гладких функций $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ с областью определения D, вложенной в $\mathbf{R}^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Мы считаем, что D имеет гладкую границу ∂D и ограничена (рис. 15). Из гл. 5 мы уже знаем, что $(n-1)$-мерный объем гиперповерхности $V^{n-1} = \{x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})\}$ записывается так:

$$\operatorname{vol}(V^{n-1}) = \int\limits_D \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2 \, dx^1 \ldots dx^{n-1}},$$

где $f_{x^i} = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. Так как лагранжиан L имеет вид:

$$L(f_{x^1}, \ldots, f_{x^{n-1}}) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2},$$

то уравнение Эйлера имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

Это одно дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет экстремальная функция $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Теперь рассмотрим произвольную $(n-1)$-мерную гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, являющуюся экстремальной для функционала $(n-1)$-мерного объема. Поскольку объем является скаляром, не зависящим от выбора координат на поверхности, то мы можем выбрать удобные для нас координаты. Пусть V^{n-1} — экстремальная поверхность, $P \in V^{n-1}$ — произвольная точка; положим $\mathbf{R}^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}) = T_P V^{n-1}$, т. е. в качестве координатной плоскости выберем касательную плоскость с декартовыми координатами; запишем локально V^{n-1} в виде графика функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$.

Теорема 1. *Гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ — экстремальна для функционала $(n-1)$-мерного объема тогда и только тогда, когда ее средняя кривизна H тождественно равна нулю.*

Доказательство. Проведем вычисления для случая $n = 3$, так как вычисления для любого n аналогичны. Для $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) = 0.$$

Дифференцируя, получаем:

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{xx}f_x^2 + f_{xx}f_y^2 - f_x^2 f_{xx} - f_x f_y f_{xy} + f_{yy} + f_{yy}f_x^2 +& \\ + f_{yy}f_y^2 - f_x f_y f_{xy} - f_y^2 f_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1+f_x^2) = 0.$$

В силу гл. 4, это уравнение совпадает с уравнением $H \equiv 0$.

Итак, минимальные поверхности можно определять как поверхности, задаваемые экстремальными радиус-векторами.

Рассмотрим поверхности M^2 и $\mathbf{R}^3$, отнесенные к (u, v), т. е. $\mathbf{r}(u, v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Тогда функционал площади запишется так (см. гл. 5): $S[\mathbf{r}] = \int\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$. Пусть (u, v) — конформные параметры, т. е. в них метрика на M^2 имеет вид:

$$E = G = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle; \quad F = \langle r_u, r_v \rangle = 0.$$

Тогда

$$S[\mathbf{r}] = \int\limits_D (\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle \, \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle)^{1/2}\, dudv.$$

Уравнения Эйлера таковы:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}(2x_u) + \frac{\partial}{\partial v}(2x_v) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial u}(2y_u) + \frac{\partial}{\partial v}(2y_v) = 0; \\ &\frac{\partial}{\partial u}(2z_u) + \frac{\partial}{\partial v}(2z_v) = 0, \end{aligned}$$

т. е. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\mathbf{r}(u, v) = 0$. Итак $\mathbf{r}$ — гармонический (относительно координат (u, v)) радиус-вектор. Пояснение:

$$L(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \sqrt{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)}$$

и при варьировании все частные производные рассматриваются как независимые. □

Поступая по аналогии с одномерным случаем, рассмотрим бесконечномерное пространство F гладких отображений $D^2(u, v)$ в $\mathbf{R}^3$. На F определен нелинейный функционал площади $S[\mathbf{r}]$; его экстремальные «точки» (т. е. радиус-векторы $\mathbf{r}(u, v)$) описывает теорема 2.

Теорема 2. *Экстремальными векторами $\mathbf{r}(u, v)$ для $S[\mathbf{r}]$ являются те и только те векторы, для которых средняя кривизна H равна нулю.*

Это вытекает из теоремы 1. Теперь рассмотрим наряду с $S[\mathbf{r}]$ еще один функционал (Дирихле): $D[\mathbf{r}] = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{D(u,v)} (E + G)\, du dv$. Сравним экстремальные «точки» функционалов D и S.

Теорема 3. *Экстремальными векторами $\mathbf{r}(u, v)$ для функционала Дирихле являются те и только те векторы, которые — гармонические относительно (u, v), т. е. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\mathbf{r}(u, v) = 0$.*

Доказательство. Уравнения Эйлера имеют вид: $\dfrac{\partial}{\partial u}(L_{\mathbf{r}_u}) + \dfrac{\partial}{\partial v}(L_{\mathbf{r}_v}) = 0$, где $L = E + G = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle$, т. е. $L = x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 + z_u^2 + z_v^2$, т. е. $\Delta(\mathbf{r}) = 0$, где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$. Теорема доказана. □

Координаты (u, v) могут быть гармоническими для некоторого радиус-вектора, но не быть конформно-евклидовыми для индуцированной метрики на поверхности, заметаемой этим вектором. Рассмотрим теперь специальные гармонические поверхности, на которых гармонические координаты являются в то же время и конформными, т. е. $E = G$, $F = 0$. Тогда эта поверхность — минимальна. Итак, некоторые экстремальные «точки» функционала Дирихле порождают экстремальные «точки» функционала площади: из каждой «гармонической точки», отнесенной к конформным координатам, «вырастает» целое семейство минимальных радиус-векторов, если подвергнуть исходные параметры гармонического вектора произвольной регулярной замене координат. В этом — аналогия с экстремальными «точками» функционалов длины и действия в одномерной вариационной задаче — на пространстве гладких траекторий. Не каждый гармонический вектор порождает минимальную поверхность. Между D и S имеется соотношение: $D[\mathbf{r}] \geqslant S[\mathbf{r}]$, справедливое для любого радиус-вектора, причем равенство достигается в том и только том случае, когда $E = G$, $F = 0$, т. е. координатная сетка ортогональна и координаты (u, v) конформны. Доказательство следует из очевидного неравенства: $\dfrac{E+G}{2} \geqslant \sqrt{EG - F^2}$, которое превращается в равенство тогда и только тогда, когда $F = 0$, $E = G$.

Пока доказано только то, что минимальные поверхности — экстремали функционала площади; мы не обосновали выбора термина: «минимальные поверхности». Для одномерного случая такое обоснование было дано — мы доказали, что геодезические — локально минимальные траектории. Оказывается, такое же утверждение имеет место и для экстремалей функционала площади: минимальные поверхности обладают тем свойством, что если рассмотреть произвольное возмущение $\boldsymbol{\eta}$ минимального радиус-вектора $\mathbf{r}$ с малым носителем (т. е. возмущение отлично от нуля только в малой области), то площадь «возмущенной поверхности» $\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}$ будет не меньше, чем площадь исходной поверхности. Для доказательства потребуется дополнительный анализ, так как равенство нулю первой вариации отнюдь не гарантирует локальной минимальности экстремальной «точки» в пространстве всех радиус-векторов. Даже для обычной функции одного аргумента равенство нулю первой производной еще не позволяет различать точки минимума, максимума, перегиба. Так, в случае геодезических мы анализировали локальные свойства функционалов длины и действия пути. Причем это были рассмотрения «второго порядка», как и для обычных функций одного аргумента выяснение локального поведения функции около критической точки требует изучения второго дифференциала. При изучении локальной минимальности геодезических мы анализировали «вторую вариацию» функционала действия (или длины) — аналог второго дифференциала. Следовательно, и в случае экстремалей функционала площади надо изучить «вторую производную».

Рассмотрим минимальную поверхность $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ (для произвольного n рассуждения аналогичны), $P \in M^2$; зададим M^2 в малой окрестности P в виде графика гладкой функции $z = f(x, y)$, где декартовы координаты (x, y) меняются в касательной плоскости к M^2 в точке P. Докажем, что любое достаточно малое возмущение (с малым носителем) поверхности M^2 не уменьшает площади. Итак, в $\mathbf{R}^3$ задан график $z = f(x, y)$, определенный над некоторой областью D в плоскости $\mathbf{R}^2(x, y)$; поверхность — минимальна, т. е. $H = 0$; мы рассматриваем возмущение графика, равное

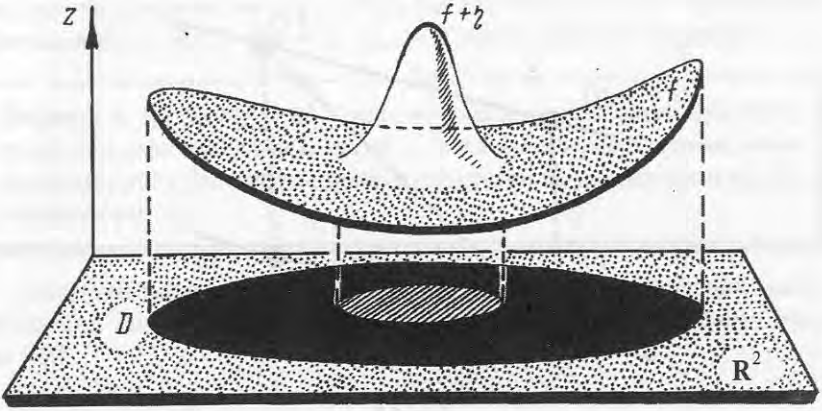

Рис. 16

нулю на границе D (см. рис. 16). Требуется доказать, что $S[f] \leqslant S[f+\eta]$ Рассмотрим пространство $F(f)$ всех гладких функций $f+\eta$, определенных на D, и таких, что $\eta|_{\partial D}=0$. Это линейное пространство зависит от выбора функции f. Пространство $F(f)$ получается из линейного пространства C, состоящего из гладких функций η, равных нулю на границе области, т. е. из «возмущений» функции f путем сдвига на функцию f (см. рис. 17). Рассмотрим ограничение функционала S на $F(f)$. Функционал S на этом пространстве сопоставляет каждой $f+\eta$ площадь ее графика. Докажем, что этот функционал является «выпуклым вниз», т. е. $S[\alpha r+\beta g] \leqslant \alpha S[r]+\beta S[g]$, где $\alpha+\beta=1$; $r, g \in F(f)$, т. е. $r=f+\eta_1$; $g=f+\eta_2$, где $\eta_i|_{\partial D}=0$, $i=1,2$. Отметим, что $\alpha r+\beta g \in F(f)$, так как

$$(\alpha r+\beta g)|_{\partial D}=\alpha r|_{\partial D}+(1-\alpha) g|_{\partial D}=\alpha f|_{\partial D}+(1-\alpha) f|_{\partial D}=f|_{\partial D},$$

т. е. $\alpha r+\beta g=f+\eta_3$, где $\eta_3|_{\partial D}=0$. Определение выпуклого вниз функционала копирует аналогичное определение для обычных функций; если условно изобразить график выпуклого вниз функционала, то картина будет такой, как это показано на рис. 18. Итак, достаточно проверить, что

$$\sqrt{1+(\alpha r_x+\beta g_x)^2+(\alpha r_y+\beta g_y)^2} \leqslant \alpha \sqrt{1+r_x^2+r_y^2}+\beta \sqrt{1+g_x^2+g_y^2},$$

т. е. после возведения в квадрат:

$$1+2 \alpha \beta(r_x g_x+r_y g_y) \leqslant \alpha^2+\beta^2+2 \alpha \beta \sqrt{(1+r_x^2+r_y^2)(1+g_x^2+r_g^2)};$$

так как $1-\alpha^2-\beta^2=2 \alpha \beta$, то:

$$1+r_x g_x+r_y g_y \leqslant \sqrt{(1+r_x^2+r_y^2)(1+g_x^2+g_y^2)}$$

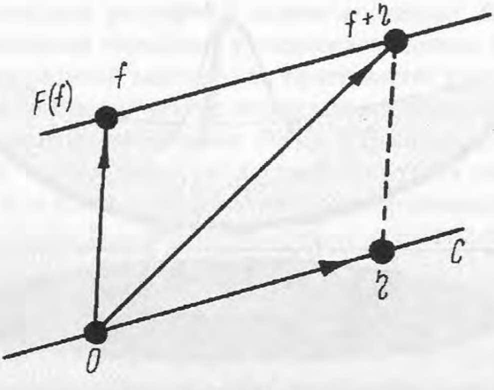

Рис. 17

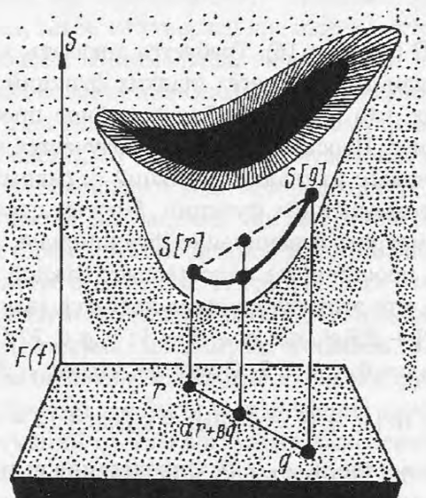

Рис. 18

или $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, где

$$\mathbf{a} = (r_x, r_y, -1) = \mathbf{grad}\,(r(x, y) - z);$$

$$\mathbf{b} = (g_x, g_y, -1) = \mathbf{grad}\,(g(x, y) - z).$$

Неравенство: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ — очевидно. Итак, выпуклость вниз S на $F(f)$ установлена. Отсюда уже следует, что любая экстремальная «точка» в пространстве $F(f)$ для функционала S является минимумом; в частности, для всех точек r, расположенных в окрестности экстремальной точки $g \in F(f)$

выполнено соотношение: $S[r] \geqslant S[g]$. Так как точка $f \in F(f)$ является экстремальной, то $S[f] \leqslant S[f+\eta]$, $\eta|_{\partial D} = 0$. Итак, доказана теорема 4.

Теорема 4. *Пусть $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ — произвольная минимальная поверхность; тогда она локально минимальна, т. е. любое гладкое, достаточно малое ее возмущение с достаточно малым носителем не уменьшает площади поверхности.*

Совершенно аналогично доказывается теорема о локальной минимальности экстремальных решений функционала $(n-1)$-мерного объема в $\mathbf{R}^n$.

Конец семестра