Лекция 15

Простейшие вариационные задачи римановой геометрии

1. Понятие функционала. Экстремальные функции

Вариационные задачи являются одним из важнейших классов математических задач, ведущих свое происхождение от общих физических и математических проблем движения и устойчивости. Так, например, мы увидим, что геодезические траектории являются решениями соответствующей вариационной задачи.

Начнем с общего понятия вариации функционала. Предварительно поговорим о самом понятии функционала. Мы знакомы с понятием функции $y = f(x)$, где y — вещественное число, а аргумент x может быть записан в виде набора числа $(x^1, \ldots, x^n)$ в некоторой криволинейной системе координат на гладком многообразии. Однако, далеко не все физические соответствия могут быть записаны на таком, относительно простом языке. Например, мы знакомы с таким соответствием: каждому конечному отрезку гладкой кривой $\gamma(t)$ сопоставляется его длина $l_a^b(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot{\gamma}|\, dt$. Это соответствие: $\gamma(t) \to l_a^b(\gamma(t))$ уже не является «функцией» в прежнем нашем понимании, так как «аргументом» является произвольная гладкая кривая. Это соответствие: $\gamma \to l(\gamma)$ является важным примером нелинейного функционала, определенного на пространстве гладких кривых $\gamma(t)$. Обобщим этот пример; при этом в круг наших рассмотрений попадут другие важные соответствия.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ ограниченную область D с гладкой границей ∂D; пусть $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты. Рассмотрим на D всевозможные гладкие вектор-функции $\mathbf{f}(x^1, \ldots, x^n) = \mathbf{f}(x^\alpha) = (f^1(x^\alpha), \ldots, f^k(x^\alpha)) = \{f^i(x^\alpha)\}$, где числа k и n никак друг с другом не связаны. Область D называют областью изменения параметров $x^1, \ldots, x^n$. Пусть даны две функции: $\{f^i(x^\alpha)\}$ и $\{g^i(x^\alpha)\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$; тогда для любых вещественных чисел a и b определена новая вектор-функция $a\mathbf{f} + b\mathbf{g} = \{af^i(x^\alpha) + bg^i(x^\alpha)\}$, т. е. все гладкие вектор-функции на D образуют линейное пространство F.

Это пространство бесконечномерно. Различные функционалы мы будем рассматривать именно на этом пространстве F, «точки» которого (т. е. вектор-функции) и будут являться «аргументами» функционалов $J[\mathbf{f}]$, $\mathbf{f} \in F$. Впрочем, в тех простых примерах, с которыми мы будем иметь дело, наличие линейной структуры в F не будет существенно: мы будем пользоваться операцией сложения вектор-функций лишь «в бесконечно малом», т. е. будем рассматривать возмущения $\mathbf{f} \to \mathbf{f} + \varepsilon\boldsymbol{\eta}$, где ε — бесконечно малый параметр, а возмущение $\boldsymbol{\eta}$ имеет малый носитель. Более общо, в качестве f можно рассматривать гладкое отображение области D в гладкое многообразие.

В работе с функционалами полезно иметь в виду аналогию с обычными функциями.

Определение 1. *Функционалом* J, определенным на пространстве F (или на каком-либо подмножестве пространства F), мы будем называть непрерывное отображение F (или его подмножества) в вещественные числа: $J\colon\ F \to \mathbf{R}^1$; отображение линейным не предполагается. Если $J[a\mathbf{f} + b\mathbf{g}] = aJ[\mathbf{f}] + bJ[\mathbf{g}]$, то функционал J называется *линейным*.

Пример 1. D — отрезок на вещественной прямой: $x^1 = t$, $\mathbf{f}(t) = (f^1(t), f^2(t), f^3(t))$ — вектор-функция на D, т. е. $\mathbf{f}(t) = \gamma(t)$ определяет гладкую кривую в $\mathbf{R}^3$; при этом F есть линейное пространство всех таких кривых в $\mathbf{R}^3$ (радиус-векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ кривых $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{g}(t)$ можно складывать и умножать на числа). В качестве J возьмем интеграл: $J[\mathbf{f}] = \int\limits_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt = \int\limits_D |\mathbf{f}(t)|\,dt$, т. е. длину кривой $\mathbf{f}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Этот функционал не линеен.

Пусть задана гладкая функция $L(x^\beta; p^i; q^i_\alpha)$, зависящая от трех групп переменных: x^β, $1 \leqslant \beta \leqslant n$; p^i, $1 \leqslant i \leqslant k$; q^i_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Назовем эту функцию *лагранжианом*. Таким образом, лагранжианом может служить любая гладкая функция от трех групп переменных. Пусть $\mathbf{f} = \{f^i(x^\beta)\}$ — гладкое отображение D в многообразие, причем $D \subset \mathbf{R}^n$. Построим функционал $J[\mathbf{f}]$ так:

$$J[\mathbf{f}] = \int\limits_D L(x^\beta, f^i(x^\beta; f^i_{x^\alpha}(x^\beta))\,d\sigma^n,$$

где $\int D$ обозначает кратный интеграл $\int \ldots \int\limits_D$ (n раз) по n-мерной области D; $d\sigma^n = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ — n-мерный элемент объема в D (т. е. декартова внешняя форма евклидова объема) $f^i_{x^\alpha}(x^\beta) = \dfrac{\partial f^i(x^\beta)}{\partial x^\alpha}$ — частные производные. Сокращенно запишем $J[\mathbf{f}]$ так: $J[\mathbf{f}] = \int\limits_D L(x^\beta, f^i, f^i_{x^\alpha})\, d\sigma^n$, опуская аргументы у функций f^i и $f^i_{x^\alpha}$. Определенный нами класс функционалов включает практически все содержательные примеры функционалов в механике, физике и их приложениях. Рассмотрим функционал длины дуги:

$$J[\mathbf{f}] = \int\limits_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt = \int\limits_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\frac{dy^i(t)}{dt}\frac{dy^j(t)}{dt}}\, dt,$$

т. е. $D=I=[0,1]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n = 1$, $\mathbf{f}(t) = \gamma(t) = (y^1(t), \ldots, y^k(t))$; $\gamma(t)$ — гладкая кривая в k-мерном пространстве с римановой метрикой $g_{ij}(y^1, \ldots, y^k)$; лагранжиан имеет вид:

$$L(x^\beta, \mathbf{f}, \mathbf{f}_{x^\alpha}) = L\left(t; y^1, \ldots, y^n; \frac{dy^1}{dt}, \ldots, \frac{dy^k}{dt}\right) =$$
$$= \sqrt{g_{ij}(y^1, \ldots, y^k)\dot y^i \dot y^j}.$$

Если кривая $\gamma(t)$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ задана явно: $y = f(x)$, то

$$L(x, f, f_x) = L(f_x) = \sqrt{1 + f_x^2}.$$

Этот функционал определен также на кривых, лежащих в гладком многообразии M^k. Мы будем обычно рассматривать малую окрестность конкретной кривой; в этой окрестности будем предполагать введенными локальные координаты $y^1, \ldots, y^k$, и тем самым события переносятся в некоторую область в k-мерном евклидовом пространстве, снабженном римановой (вообще говоря, неевклидовой) метрикой. При этом сложение вектор-функций, задающих кривые, можно выполнять лишь «в малом», то есть только в некоторой окрестности фиксированной кривой.

Другой пример: функционал площади $J[\mathbf{f}] = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dx dy$. Здесь $D(x, y)$ — область изменения параметров (x, y), $\mathbf{f} = (u^1(x, y); u^2(x, y); u^3(x, y))$ — двумерная поверхность в $\mathbf{R}^3$ с индуцированной метрикой $ds^2 = E\, dx^2 + 2F\, dxdy + G\, dy^2$;

$$L = L(\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y) = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\langle \mathbf{f}_x, \mathbf{f}_x\rangle \langle \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_y\rangle - \langle \mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y\rangle^2}.$$

Здесь пространство F — это линейное пространство всех вектор-функций $(u^1(x, y), u^2(x, y), u^3(x, y))$, определенных на D. Можно было бы рассмотреть функционал площади в ином виде: $J[\mathbf{f}] = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx dy$, где D — область на $\mathbf{R}^2(x, y)$; $\mathbf{f}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, т. е. вектор-функция $\mathbf{f}$ задана в явном виде графиком $z = f(x, y)$ над областью D в $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$; $L = L(z_x, z_y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$. Сложение таких вектор-функций означает сложение графиков этих функций в $\mathbf{R}^3$ над D. Но далеко не каждая поверхность в $\mathbf{R}^3$ может быть задана графиком однозначной функции.

2. Уравнение Эйлера

Какие вопросы будут нас в первую очередь интересовать при изучении $J[\mathbf{f}]$? Обратимся к аналогии с обычными функциями; например, рассмотрим функции от одного или от двух переменных: $\alpha(t)$ и $\alpha(u, v)$. Как нам известно, в большой степени поведение функции $\alpha(t)$ или $\alpha(u, v)$ определяется количеством и расположением тех точек t_0 (или (u_0, v_0)), в которых $\alpha'(t_0) = 0$ (или $\alpha_u(u_0, v_0) = \alpha_v(u_0, v_0) = 0$), т. е. $\mathbf{grad}\,(\alpha) = 0$. Такие точки, в которых $\mathbf{grad}\,(\alpha) = 0$, называются *критическими* или *стационарными точками* функции α Иногда употребляется название: *экстремальные* точки. Например, для функции $\alpha = \alpha(t)$ стационарными точками являются точки максимума, минимума и точки перегиба (рис. 1). Если $\alpha = \alpha(u, v)$, то среди точек, для которых $\mathbf{grad}\,(\alpha) = 0$, содержатся, например, точки максимума, минимума и седловые точки (седла) порядка два (см. рис. 2); кроме того, здесь возможны седла более высоких порядков. В механике те точки, в которых функция — потенциал достигает экстремума, отвечают положениям равновесия системы (устойчивым или неустойчивым).

Аналогично, при изучении $J[\mathbf{f}]$ большое внимание уделяется нахождению тех стационарных вектор-функций $\mathbf{f}_0$, в которых функционал J достигает минимума, максимума или имеет «седло». Нужно правильно понять, что такое «производная по направлению» от функционала J в некоторой точке $\mathbf{f} \in F$. Как было отмечено, для функций $\alpha(t)$ и $\alpha(u, v)$ все

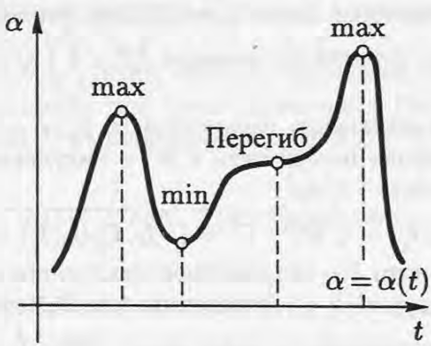

Рис. 1

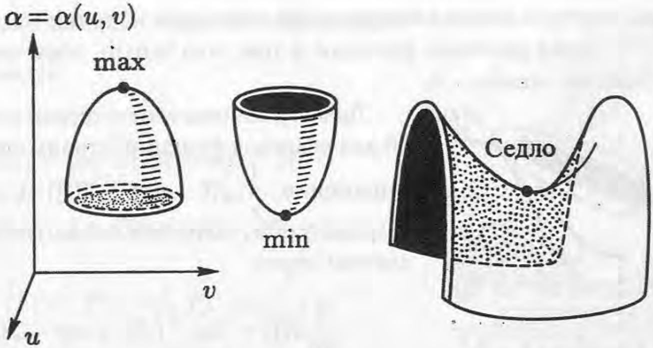

Рис. 2

интересующие нас критические точки являются решениями уравнения: $\mathbf{grad}\,(\alpha) = 0$. Нужно получить аналог этого уравнения в функциональном случае. Вернемся к уравнению $\mathbf{grad}\,(\alpha) = 0$. Как мы знаем, если в точке $(u, v) \in D$ задано некоторое направление (вектор) $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$, то производная функции $\alpha(u, v)$ по направлению $\mathbf{a}$ имеет вид:

$$\frac{d}{d\mathbf{a}}\alpha(u, v) = a^1\frac{\partial\alpha}{\partial u} + a^2\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{grad}\,\alpha\rangle$$

(см. рис. 3). Отсюда следует, что $\mathbf{grad}\,\alpha(u_0, v_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{d}{d\mathbf{a}}\alpha(u_0, v_0) = 0$ для любого направления $\mathbf{a}$ в точке (u_0, v_0). Если $\alpha = \alpha(t)$, то это означает, что $\alpha'_t(t_0) = 0$. Производная от $\alpha(u, v)$ по направлению $\mathbf{a}$ может быть вычислена так:

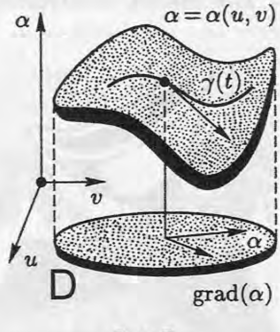

Рис. 3

$$\frac{d\alpha}{d\mathbf{a}} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}[\alpha(u + \epsilon a^1, v + \epsilon a^2) - \alpha(u, v)],$$

где $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$, ϵ — параметр; т. е.

$$\frac{d\alpha}{d\mathbf{a}} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}[\alpha(\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{a}) - \alpha(\mathbf{x})],$$

где $\mathbf{x} = (u, v)$ — радиус-вектор точки из области D. Именно в такой форме мы и обобщим понятие производной по направлению на случай функционалов $J[\mathbf{f}]$.

Рассмотрим «точку» $\mathbf{f} \in F$ и рассмотрим функцию $\boldsymbol{\eta} \in F$, достаточно малую и такую, что $\boldsymbol{\eta}|_{\partial D} \equiv 0$. Такие функции $\boldsymbol{\eta}$ будем называть *возмущениями* функции $\mathbf{f}$. Сместимся из точки $\mathbf{f}$ в точку $\mathbf{f} + \epsilon\boldsymbol{\eta}$ (см. рис. 4). Функция $\boldsymbol{\eta}$ (напомним: $\boldsymbol{\eta}|_{\partial D} \equiv 0$) задает «направление смещения» из «точки» $\mathbf{f}$, точно так же, как вектор $\mathbf{a}$ задавал направление смещения из точки $(u_0, v_0) \in D$; отличие от случая обычной функции в том, что теперь этих «направлений» бесконечно много.

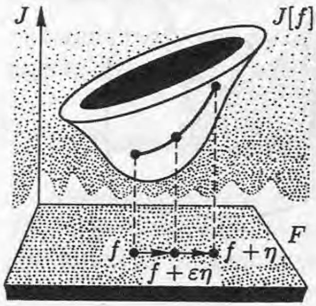

Рис. 4

Далее, в точном соответствии с операцией для обычных функций, строим следующее выражение: $\frac{1}{\epsilon}(J[\mathbf{f}+\epsilon\boldsymbol{\eta}] - J[\mathbf{f}])$ и, переходя к пределу по ϵ, получаем число, которое обозначим через

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}} J[\mathbf{f}] = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}(J[\mathbf{f}+\epsilon\boldsymbol{\eta}] - J[\mathbf{f}])$$

и которое естественно назвать «*производной функционала J в точке $\mathbf{f}$ по направлению $\boldsymbol{\eta}$*». Развивая эту аналогию с обычными функциями, дадим еще одно естественное определение.

Определение 1. Функцию $\mathbf{f}_0 \in F$ назовем *стационарной (экстремальной, критической)* функцией для функционала $J[\mathbf{f}]$, если $\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}} J[\mathbf{f}_0] = 0$ для любого возмущения $\boldsymbol{\eta}$, такого, что $\boldsymbol{\eta}|_{\partial D} = 0$.

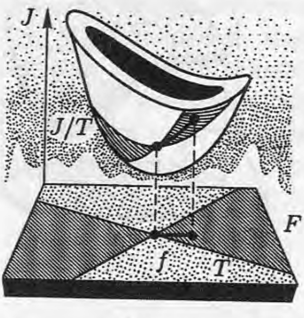

Рис. 5

Удобно представлять функционал J в виде «графика» над F (рис. 5). Если $\mathbf{f} \in F$, то совокупность функций $\mathbf{f}+\epsilon\boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\eta}|_{\partial D} = 0$, образует, очевидно, линейное пространство T (если принять $\mathbf{f}$ за «ноль» пространства T), на которое мы и ограничиваем наш функционал J. Тогда те «точки» $\mathbf{f}_0$, где $\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}} J[\mathbf{f}_0] = 0$ (для любого $\boldsymbol{\eta}$), являются точками минимума, максимума или «седловыми точками» графика $J[\mathbf{f}]$, ограниченного на подпространство $T \subset F$. Смысл операции ограничения J на T ясен: мы хотим изучить поведение J при таких возмущениях $\boldsymbol{\eta}$, которые не меняют $\mathbf{f}$ на границе ∂D, т. е. изучаются локальные, дифференциальные свойства функции $\mathbf{f}_0$, такой, что $\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}} J[\mathbf{f}_0] = 0$ (для любого $\boldsymbol{\eta}$). На рис. 6 концы кривой фиксированы в точках A и B: $\boldsymbol{\eta}(A) = \boldsymbol{\eta}(B) = 0$. Выведем теперь явную формулу для производной $\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}} J[\mathbf{f}_0]$. (Выражение $\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}} J[\mathbf{f}_0]$

называются иногда «первой вариацией $J[\mathbf{f}]$».) Имеем:

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}}J[\mathbf{f}_0] = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(J[\mathbf{f}+\epsilon\boldsymbol{\eta}] - J[\mathbf{f}]).$$

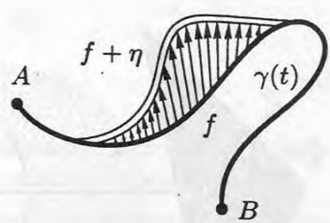

Рис. 6

Положим $\delta J = J[\mathbf{f}+\epsilon\boldsymbol{\eta}] - J[\mathbf{f}]$; тогда

$$\delta J = \int\limits_D \big[L(x^\beta; f^i + \epsilon\eta^i; f^i_{x^\alpha} + \epsilon\eta^i_{x^\alpha}) - \\ - L(x^\beta; f^i; f^i_{x^\alpha})\big]\, d\sigma^n.$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора, получаем:

$$\delta J = \int\limits_D \left[\sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial f^i}\epsilon\eta^i + \sum_{i=1}^k\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\epsilon\eta^i_{x^\alpha} + o(\epsilon)\right]\, d\sigma^n =$$

$$= \epsilon\int\limits_D \left\{\sum_{i=1}^k\left[\frac{\partial L}{\partial f^i}\eta^i + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i_{x^\alpha}\right] + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon}\right\}\, d\sigma^n.$$

Выполним интегрирование по частям. Рассмотрим:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\eta^i + \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i_{x^\alpha};$$

откуда

$$\delta J = \epsilon\int\limits_D \sum_{i=1}^k\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right)\, d\sigma^n +$$

$$+ \epsilon\int\limits_D \sum_{i=1}^k\left(\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right)\eta^i\, d\sigma^n + \int\limits_D o(\epsilon)\, d\sigma^n.$$

Так как все функции предположены гладкими, то в первом интеграле интегрирование по x^α можно отделить от интегрирования по остальным переменным x^i ($1 \leqslant i \leqslant n$; $i \neq \alpha$), в силу теоремы о перемене порядка интегрирования, что дает:

$$\int\limits_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right)\, d\sigma^n = \int\cdots\int_{x^1\ldots\widehat{x^\alpha}\ldots x^n}\left[\int\limits_Q^P \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\, dx^\alpha\right]\, d\sigma^{n-1}$$

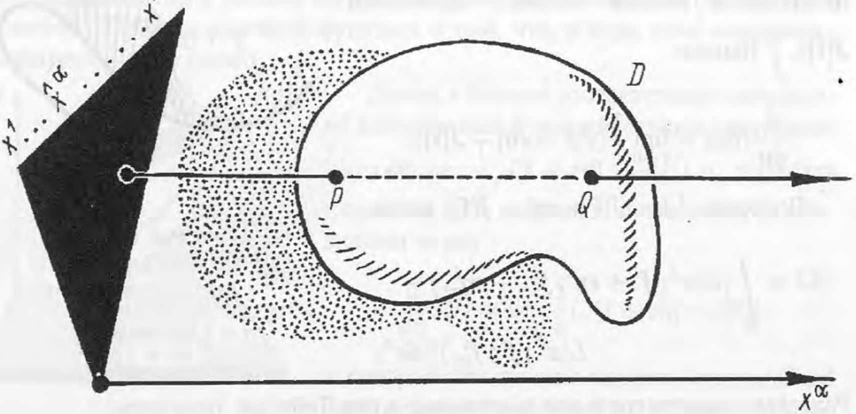

Рис. 7

(см. рис. 7). Так как в $\int\limits_Q^P$ на переменные $x^1, \ldots, \widehat{x}^\alpha, \ldots, x^n$ (переменная x^α пропущена) можно смотреть как на параметры, то интегрирование полностью выполняется, т. е.

$$\int\limits_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right)\, d\sigma^n =$$
$$= \int \cdots \int_{x^1 \ldots \widehat{x}^\alpha \ldots x^n} \left[\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}(Q)\eta^i(Q) - \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}(P)\eta^i(P)\right]\, d\sigma^{n-1} \equiv 0,$$

так как $\eta^i(P) = \eta^i(Q) = 0$; $P, Q \in \partial D$. Итак,

$$\delta J = \epsilon \int\limits_D \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right] \eta^i\, d\sigma^n + \int\limits_D o(\epsilon)\, d\sigma^n.$$

Отсюда:

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}} J[\mathbf{f}] = \int\limits_D \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right] \eta^i\, d\sigma^n$$

так как $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int\limits_D o(\epsilon)\, d\sigma^n = 0$. Пусть $\mathbf{f}_0$ — стационарная функция для J. Тогда для любой функции $\boldsymbol{\eta}$ $(\boldsymbol{\eta}|_{\partial D} = 0)$ должно быть выполнено равенство:

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^k \eta^i \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right]\, d\sigma^n \equiv 0.$$

Как известно из курса анализа, это означает, что

$$\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}} \right) = 0. \tag{A}$$

Система дифференциальных уравнений (A) называется *системой уравнений Эйлера для функционала* $J[\mathbf{f}]$. Тем самым доказана важная теорема.

Теорема 1. *Функция* $\mathbf{f}_0 \in F$ *является экстремальной (стационарной) функцией для функционала* $J[\mathbf{f}]$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений Эйлера* (A).

Если функционал является обычной функцией на области D, то условие экстремальности точки $x_0 \in D$ означает, что $\dfrac{\partial L}{\partial x^i} = 0$, т. е. $\mathbf{grad}\, L = 0$, что и следовало ожидать.