

Лекция 14

4. Теорема Брауэра и индекс векторного поля

4.1. Теорема Брауэра

Извлечем еще один полезный факт из свойств степени гладкого отображения — теорему Брауэра.

Теорема 1. Любое непрерывное отображение f замкнутого диска \bar{D}^n в себя имеет неподвижную точку.

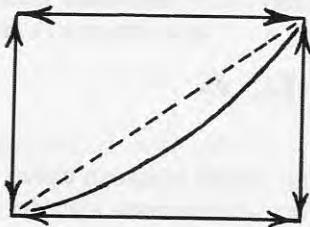


Рис. 6

Замечание. Отметим, что от условия замкнутости диска \bar{D}^n отказаться нельзя. На рис. 6 показано непрерывное отображение одномерного открытого интервала в себя, не имеющего неподвижных точек.

Прежде, чем переходить к доказательству теоремы Брауэра, поясним, что понятие степени естественно распространяется на непрерывные отображения гладких многообразий. Имеет место теорема, которую

мы доказывать не будем. Оказывается, любое непрерывное отображение $f: M^n \rightarrow P^n$ можно сколь угодно близко аппроксимировать гладким отображением $g: M^n \rightarrow P^n$, которое гомотопно отображению f . Более того, любые две таких достаточно близкие к f аппроксимации g и g' гладко гомотопны между собой. Поэтому их степени совпадают, и это общее значение и берется в качестве степени отображения f .

Доказательство теоремы Брауэра. Пусть

$$f: \bar{D}^n \rightarrow \bar{D}^n$$

— непрерывное отображение, и допустим, что f не имеет неподвижных точек, т. е. $f(x) \neq x$ для любой точки $x \in \bar{D}^n$. Из точки $f(x)$ проведем в точку x (единственный) луч до пересечения с граничной сферой S^{n-1} диска \bar{D}^n (рис. 7) в точке $g(x)$. Получим непрерывное отображение $x \mapsto g(x)$ диска в сферу:

$$\bar{D}^n \rightarrow S^{n-1}.$$

Заметим, что на граничной сфере отображение g тождественно, т. е.

$$g(x) \equiv x, \quad x \in S^{n-1}.$$

Следовательно, степень ограничения $g|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ равна единице:

$$\deg(g|_{S^{n-1}}) = 1.$$

С другой стороны, можно рассмотреть композицию двух отображений $h \circ i$, где $i : S^{n-1} \rightarrow \bar{D}^n$ является вложением сферы S^{n-1} в диск, на его граничную сферу:

$$h = g \circ i : S^{n-1} \xrightarrow{i} \bar{D}^n \xrightarrow{g} S^{n-1}.$$

Отображение h является тождественным, значит, $\deg(h) = 1$. С другой стороны, отображение h гомотопно постоянному отображению в точку, поскольку диск \bar{D}^n стягивается в точку. Значит степень отображения h должна равняться нулю, что противоречит тому, что $\deg(h) = 1$. \square

4.2. Индекс векторного поля на многообразии

Рассмотрим гладкое векторное поле $\mathbf{v}(x)$ на гладком многообразии M^n . Предположим, что поле $\mathbf{v}(x)$ имеет только изолированные особые точки, т. е. такие точки, где поле обращается в ноль. Для каждой такой точки x_0 определим индекс, который обозначим через $\text{ind}_{x_0}(\mathbf{v})$. Для этого рассмотрим достаточно малую окрестность и локальную систему координат (x^1, \dots, x^n) с центром в точке x_0 . Это значит, что поле $\mathbf{v}(x)$ задано в области евклидова пространства \mathbf{R}^n , причем в точке O находится изолированная особенность поля. Окружим точку O сферой S_ε^{n-1} малого радиуса и с центром в точке O . (Эта сфера наследует ориентацию локальной системы координат.) Тогда поле $\mathbf{v}(x)$ не обращается в ноль на сфере S_ε^{n-1} , $\mathbf{v}(x) \neq 0$, и можно рассмотреть аналог гауссова отображения (двух ориентированных сфер) $f : S_\varepsilon^{n-1} \rightarrow S_1^{n-1}$, полагая

$$f(x) = \frac{\mathbf{v}(x)}{|\mathbf{v}(x)|}.$$

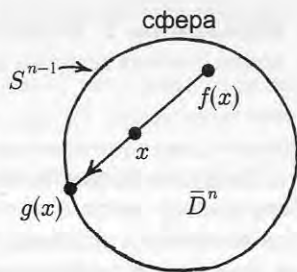


Рис. 7

Определение 1. Индексом особой точки x_0 векторного поля $\mathbf{v}(x)$ назовем степень гауссова отображения f , т. е.

$$\text{ind}_{x_0}(\mathbf{v}) = \deg(f).$$

Нетрудно доказать, что индекс особой точки поля не зависит от выбора малого числа ε и локальной системы координат. Дело в том, что при изменении указанных объектов гауссово отображение f заменяется на гомотопное отображение, а потому степень не меняется. (При изменении ориентации локальной системы координат меняется ориентация одновременно у обеих сфер S_ε^{n-1} и S_1^{n-1} , так что степень отображения остается неизменной.)

Определение 2. Индексом $\text{ind}(\mathbf{v})$ на компактном замкнутом многообразии M^n называется сумма

$$\text{ind}(\mathbf{v}) = \sum_{\{x_i\}} \text{ind}_{x_i}(\mathbf{v}),$$

взятая по всем особым точкам x_i векторного поля \mathbf{v} .

Повторим, что мы рассматриваем лишь поля с изолированными особенностями. Поэтому на компактном многообразии без края такое гладкое поле имеет конечное число особенностей.

Замечание. Индекс изолированной особенности векторного поля определен и в том случае, когда поле в данной точке x_0 разрывно или не определено. Важно лишь, чтобы вне этой точки x_0 поле было гладким в некоторой окрестности точки, чтобы мы могли задать гауссово отображение.

Сформулируем следующую важную теорему, схему доказательства которой мы приведем ниже.

Теорема 2. Пусть M^n — гладкое связное компактное ориентируемое многообразие и \mathbf{v} — гладкое поле на нем с изолированными особенностями x_i . Тогда индекс векторного поля \mathbf{v} не зависит от выбора самого поля и равен эйлеровой характеристике многообразия M^n :

$$\text{ind}(\mathbf{v}) = \sum_{\{x_i\}} \text{ind}_{x_i}(\mathbf{v}) = \chi(M^n).$$

Вот одно из полезных следствий этой теоремы.

Следствие 1. Пусть многообразии M^n таково, что $\chi(M) \neq 0$. Например, $M_g^2 = S^2 + g(r)$, где $g \neq 1$ (т. е. M_g^n не является тором). Тогда

любое гладкое векторное поле на таком многообразии обязательно имеет хотя бы один нуль (т. е. особенность).

Например, любое гладкое (и даже непрерывное) векторное поле на сфере S^2 имеет особенность. В то же время на торе T^2 существуют векторные поля без особенностей (эйлерова характеристика тора равна нулю). Например «поток жидкости», текущей с постоянной скоростью вдоль параллели тора (или вдоль его меридиана).

Докажем сначала следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^n$ является компактной связной областью с гладкой границей $V^{n-1} = \partial M^n$ и пусть \mathbf{v} — гладкое векторное поле на M^n с изолированными особенностями, причем $\mathbf{v}(x) \neq 0$ для всех $x \in \partial M^n$. Тогда $\text{ind}(\mathbf{v})$ не зависит от поведения поля внутри области и равен $\text{deg } f$, где $f: V^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$; $f(x) = \mathbf{v}(x)/|\mathbf{v}(x)|$ — аналог гауссова отображения на границе области.

Доказательство. Пусть x_1, \dots, x_N — изолированные особенности поля \mathbf{v} в M^n (их конечное число). Окружим каждую точку x_i сферой $S_\varepsilon^{n-1}(x_i)$ малого радиуса ε с центром в точке x_i (см. рис. 8). Через $D_\varepsilon^n(x_i)$ обозначим шар радиуса ε с центром в точке x_i , т. е.

$$\partial D_\varepsilon^n(x_i) = S_\varepsilon^{n-1}(x_i).$$

Рассмотрим многообразие

$$W^n = M^n \setminus \bigcup_i D_\varepsilon^n(x_i).$$

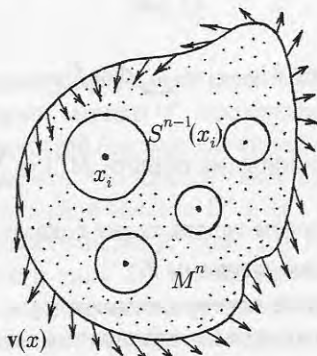


Рис. 8

Тогда

$$\partial W^n = V^{n-1} \cup \left(- \bigcup_i S_\varepsilon^{n-1}(x_i) \right).$$

Здесь перед сферами $S_\varepsilon^{n-1}(x_i)$ поставлен знак «минус», поскольку внешняя граница V^{n-1} и внутренняя граница $\bigcup_i S_\varepsilon^{n-1}(x_i)$ имеют разные ориентации.

Рассмотрим отображение $f: W^n \rightarrow S^{n-1}$, где $f(x) = \mathbf{v}(x)/|\mathbf{v}(x)|$. Это отображение является гладким, поскольку $\mathbf{v} \neq 0$ на W^n (все особенности мы выбросили). Пусть Ω^{n-1} — стандартная форма объема на сфере S^{n-1} . Тогда по теореме Стокса мы имеем:

$$\int_{\partial W^n} f^* \Omega^{n-1} = \int_{W^n} d(f^* \Omega^{n-1}) = \int_{W^n} f^*(d\Omega^{n-1}) = 0,$$

поскольку форма Ω^{n-1} очевидно замкнута на сфере S^{n-1} . Отметим, что дифференциал $d(f^* \Omega^{n-1})$ корректно определен во всех точках W^n , так как мы выбросили окрестности всех особых точек. Итак,

$$\int_{\partial W^n} f^* \Omega^{n-1} = 0,$$

следовательно

$$\int_{V^{n-1}} f^* \Omega^{n-1} = \sum_i \int_{S_\varepsilon^{n-1}(x_i)} f^* \Omega^{n-1}.$$

Выражая интегралы в левой и правой части через степени отображений, получаем

$$(\deg f|_{V^{n-1}}) \cdot \text{vol}(S^{n-1}) = \left(\sum_i \deg f|_{S_\varepsilon^{n-1}(x_i)} \right) \cdot \text{vol}(S^{n-1})$$

Отсюда:

$$\deg f|_{V^{n-1}} = \sum_i \deg f|_{S_\varepsilon^{n-1}(x_i)}$$

т. е.

$$\deg f|_{V^{n-1}} = \text{ind } \mathbf{v} \text{ (на области } M^n) = \sum_i \text{ind}_{x_i}(\mathbf{v}).$$

Теорема доказана. Приведем теперь схему доказательства теоремы 2. \square

Схема доказательства теоремы 2.

Шаг 1. Любые два гладких векторных поля \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 гладко гомотопны в классе векторных полей с изолированными особенностями.

Шаг 2. В процессе гомотопии особенности поля могут сливаться, расплываться, рождаться и исчезать (см. рис. 9).



Рис. 9

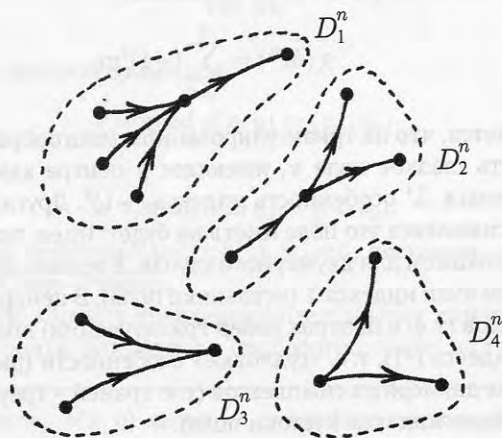


Рис. 10

Шаг 3. Пусть v_t — гладкая деформация поля v_1 в поле v_2 при $0 \leq t \leq 1$. Пусть в некоторый момент t^* происходит то или иное взаимодействие особенностей (распад, слияние, рождение, уничтожение). Тогда можно считать, что каждое такое взаимодействие происходит в достаточно малой области D^n в M^n , гомеоморфной шару D^n в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n (рис. 10). Но в таком случае к каждой такой области типа D^n можно применить теорему 3 о том, что индекс векторного поля внутри области в \mathbf{R}^n равен степени гауссова отображения на границе области. Поскольку при взаимодействии особенностей внутри малого шара D^n в M^n на границе шара векторное поле не обращается в ноль (на малом интервале

$t_1 < t^* < t_2$), то индекс поля v_t внутри этого шара D^n не меняется при $t_1 < t^* < t_2$). Значит индексы полей v_1 и v_2 совпадают.

Шаг 4. Осталось доказать, что индекс поля v с изолированными особенностями равен эйлеровой характеристике

$$\chi(M^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(M^n; \mathbf{R}).$$

Поскольку многообразие M^n предполагается гладким и компактным, то оно допускает гладкую триангуляцию, т. е. регулярное разбиение на «хорошо примыкающие» симплексы размерностей от 0 до n . Тогда несложно доказать, что эйлерова характеристика $\chi(M^n)$ может быть подсчитана, зная лишь количества m_i симплексов размерности i , $0 \leq i \leq n$. А именно,

$$\chi(M^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i.$$

Шаг 5. Оказывается, что на триангулированном многообразии M^n можно построить гладкое поле v , имеющее в центре каждого i -мерного симплекса Δ^i особенность индекса $(-1)^i$. Других особенностей внутри симплекса это поле иметь не будет. Идею построения такого поля покажем для двумерного случая. В вершинах триангуляции поместим нули индекса 1 (источники поля). В центрах одномерных симплексов (т. е. в центрах ребер триангуляции) поместим особенности индекса (-1), т. е. «седловые» особенности (рис. 11). Наконец в центрах двумерных симплексов (т. е. граней = треугольников) поместим нули индекса 1 (стоки поля).

В двумерном случае получаем формулу

$$m_0 - m_1 + m_2 = \chi(M^2).$$

Ясно, что такая же схема проходит и в многомерном случае. Теорема доказана. \square

Приведем примеры особенностей векторных полей на плоскости. В этих примерах в особых точках поля могут быть разрывны (или не определены).

Введем на плоскости $\mathbf{R}^2(x, y) = \mathbf{C}^1(z)$ комплексную координату $z = x + iy$ и рассмотрим комплексно-аналитическую функцию

$$f(z) = a(x, y) + ib(x, y),$$

где a и b удовлетворяют условиям Коши—Римана:

$$a_x = b_y, \quad a_y = -b_x.$$

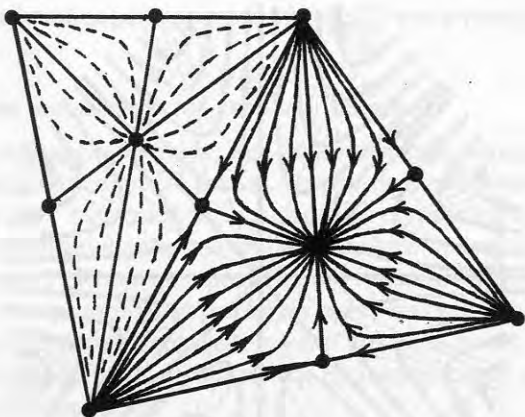


Рис. 11

Рассмотрим два векторных поля

$$\mathbf{v} = \text{grad } a(x, y) = (a_x, a_y)$$

и

$$\mathbf{w} = \text{grad } b(x, y) = (b_x, b_y).$$

Эти два поля ортогональны, т. е. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, поскольку $a_x b_x + a_y b_y = 0$ в силу условий Коши–Римана.

Качественную картину поведения интегральных траекторий этих полей можно построить, опираясь на следующую лемму из главы 4:

Лемма 1. *Функция $b(x, y)$ является интегралом поля \mathbf{v} . Другими словами, функция $b(x, y)$ постоянна на траекториях поля \mathbf{v} или $\mathbf{v}(b) = 0$. Аналогично, функция $a(x, y)$ является интегралом поля \mathbf{w} , т. е. $\mathbf{w}(a) = 0$.*

Доказательство. Имеем: $\mathbf{v}(b) = a_x b_x + a_y b_y = 0$ в силу условий Коши–Римана. Аналогично проверяется, что $\mathbf{w}(a) = 0$. □

Отсюда следует, что интегральные траектории поля \mathbf{v} — это линии уровня функции $b(x, y)$, т. е. $b(x, y) = \text{const}$. Линии же тока поля \mathbf{w} — это линии уровня функции $a(x, y)$. Потоки \mathbf{v} и \mathbf{w} иногда называют сопряженными.

Пример 1. Пусть $f(z) = z^n$, $n \geq 2$. Тогда

$$f(z) = (re^{i\varphi})^n = r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi,$$

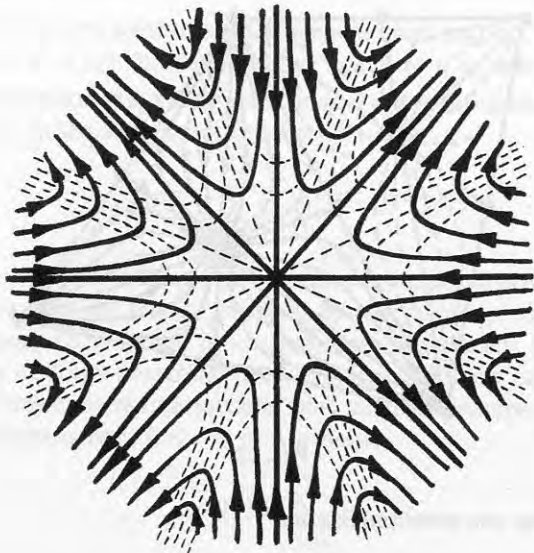


Рис. 12

т. е.

$$a(x, y) = a(r, \varphi) = r^n \cos n\varphi,$$

$$b(x, y) = b(r, \varphi) = r^n \sin n\varphi.$$

Линии уровня (т. е. линии тока) показаны на рис. 72 в главе 4, стр. 263. Картина сопряженного потока получается ортогональным поворотом на угол $\frac{\pi}{2n}$. Получится картина, показанная на рис. 12.

Задача 1. Докажите, что индекс особенности типа z^n равен $1 - n$. При $n = 2$ получаем невырожденное седло, индекс которого равен -1 . При $n > 2$ особенность вырождена.

Пример 2. Пусть $f(z) = z^{-n}$, $n \geq 1$. Тогда $f(z) = a + ib$, $a = r^{-n} \cos n\varphi$, $b = -r^{-n} \sin n\varphi$. Линии уровня этих функций, т. е. интегральные траектории полей v и w , имеют вид, показанный на рис. 73 в главе 4. Докажите, что индекс этой особой точки равен $n + 1$.

В главе 4 были указаны также примеры полей, отвечающих функциям $\ln(z)$, $z + \frac{1}{z}$, и др.

Задача 2. Найдите индексы особых точек этих векторных полей. Постройте продолжение этих полей на пополненную плоскость, т. е. на сферу S^2 . Найдите все особенности поля на сфере и вычислите индекс этих полей. Несмотря на то, что в некоторых особых точках эти поля не определены, тем не менее, суммарный индекс всех особенностей будет равен 2,