Лекция 13

3.4. Интегрирование форм

Теорема 2. *Пусть* $f\colon\ M_1 \to M_2$ *гладкое отображение ориентированных компактных связных многообразий,* ω *внешняя дифференциальная форма,* $\deg\omega = \dim M_1 = \dim M_2$. *Тогда*

$$\int\limits_{M_1} f^*(\omega) = \deg f \cdot \int\limits_{M_2} \omega. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку левая и правая часть формулы (11) линейны относительно ω, то ее достаточно доказать для формы ω, носитель которой лежит в малой окрестности U точки $Q \in M_2$. Пусть $Q_0 \in M_2$ регулярная точка отображения f, $U_0 \ni Q_0$ достаточно малая окрестность этой регулярной точки. Тогда существует непрерывное семейство диффеоморфизмов $\varphi_t\colon\ M_2 \to M_2$ такое, что $\varphi_0(P) = P$ тождественное отображение, а $\varphi_1(U_0) = U \ni Q$. В самом деле, соединим точки Q и Q_0 непрерывным путем γ. Без ограничения общности можно считать, что точки Q и Q_0 лежат в одной карте V, диффеоморфной $\mathbf{R}^n$, а путь γ является прямолинейным отрезком в локальной системе координат. Построим векторное поле $\boldsymbol{\eta}$ на пути γ, равное касательному вектору к γ и имеющее компактный носитель в карте V. Тогда соответствующая векторному полю $\boldsymbol{\eta}$ динамическая система, т. е. однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ_t, передвигает точку Q в точку Q_0, а при $t = 0$ диффеоморфизм φ_0 является тождественным. Тогда формы $\varphi_0^*(\omega) = \omega$, $\varphi_1^*(\omega) = \omega_1$ согласно теореме 4 п. 1 когомологичны, а по теореме Стокса $\int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{M_2} \omega_1$. Аналогично, $\int\limits_{M_1} f^*(\omega) = \int\limits_{M_1} f^*(\omega_1)$. Поскольку $\operatorname{supp}\omega \subset U$, то $\operatorname{supp}\omega_1 \subset U_0$. Следовательно, $\int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{U_0} \omega_1$. С другой стороны, прообраз $f^{-1}(U_0)$ состоит из объединения конечного числа открытых множеств $f^{-1}(U_0) = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$, на каждом из которых отображение f является диффеоморфизмом. Тогда, поскольку $\operatorname{supp} f^*(\omega) \subset f^{-1}(U_0)$, то

$$\begin{aligned}
\int\limits_{M_1} f^*(\omega_1) &= \int\limits_{f^{-1}(U_0)} f^*(\omega_1) = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{V_i} f^*(\omega_1) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{sgn} df|_{V_i}) \int\limits_{U_0} \omega_1 = \left(\sum_{i=1}^{N} (\operatorname{sgn} df|_{V_i}) \right) \int\limits_{U_0} \omega = \\
&= \left(\sum_{P \in f^{-1}(Q_0)} \epsilon(P) \right) \int\limits_{U_0} \omega_1 = \deg f \cdot \int\limits_{U_0} \omega. \qquad \square
\end{aligned}$$

3.5. Гауссово отображение гиперповерхности

Рассмотрим гиперповерхность M в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, $\dim M = n - 1$, задаваемую уравнением $F(x) = 0$, $\operatorname{\mathbf{grad}} F \neq 0$. Тогда на многообразии M определены: риманова метрика $\{g_{ij}\}$, форма объема $\sqrt{|g|}\, dy^1 \wedge \ldots, dy^{n-1}$, где $|g| = \det(g_{ij})$; гауссова кривизна $K = K(y^1, \ldots, y^n)$. Определим новую форму

$$K d\sigma = K(y^1, \ldots, y^n) \sqrt{|g|}\, dy^1 \wedge \ldots dy^{n-1},$$

называемую *формой кривизны* гиперповерхности M. Кроме того, для гиперповерхности M определено гладкое отображение $f\colon M \to S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, которое каждой точке P сопоставляет его нормаль. Это отображение называется *сферическим отображением*. Пусть Ω — форма объема на сфере S^{n-1}.

Теорема 3. *Для сферического отображения $f\colon M \to S^{n-1}$ гиперповерхности M прообраз формы объема Ω на сфере S^{n-1} равен форме кривизны на гиперповерхности M: $f^*\Omega = K\,d\sigma$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в окрестности точки $P_0 \in M$ многообразие M является графиком функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$, а в точке $P_0 = (0, \ldots, 0)$ нормаль к многообразию M параллельна оси Ox^n. Тогда в точке P_0 риманова метрика имеет вид единичной матрицы:$g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда гауссова кривизна в точке P_0 имеет вид: $K = \det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)$. На сфере $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ в окрестности точки $f(P_0) = (0, \ldots, 0, 1)$ в качестве координат выберем координаты $(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Тогда метрика на сфере S^{n-1} в точке $f(P_0)$ тоже имеет диагональный вид: $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда форма Ω на сфере S^{n-1} в точке $f(P_0)$ равна: $\Omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$. Вычислим теперь сферическое отображение. Касательное пространство к многообразию M порождается касательными векторами

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{x^1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{x^2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{r}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ f_{x^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Тогда нормальный вектор $\mathbf{n}$ имеет координаты

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \ldots + f_{x^{n-1}}^2}} \begin{pmatrix} f_{x^1} \\ f_{x^2} \\ \vdots \\ f_{x^{n-1}} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Прообраз формы Ω при сферическом отображении вычисляется путем подстановки вместо dx^i дифференциала координаты нормального вектора $\mathbf{n}$:

$$f^*(\Omega) = d\frac{f_{x^1}}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \ldots f_{x^{n-1}}^2}} \wedge \ldots \wedge d\frac{f_{x^{n-1}}}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \ldots f_{x^{n-1}}^2}}.$$

Имеем:

$$d\frac{f_{x^i}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2}} =$$
$$= \frac{df_{x^i}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2}} - \frac{f_{x^i}(f_{x^1}df_{x^1}+\ldots+f_{x^{n-1}}df_{x^{n-1}})}{\sqrt{(1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2)^3}}.$$

Тогда, поскольку в точке P_0 первые частные производные функции f равны нулю, $f_{x^i}(P_0)=0$, то

$$d\frac{f_{x^i}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\ldots f_{x^{n-1}}^2}} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^j$$

в точке P_0. Следовательно,

$$f^*(\Omega) = \left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j}\, dx^j\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{n-1} \partial x^j}\, dx^j\right) =$$
$$= \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1} = K d\sigma.$$

Теорема 3 доказана. □

В качестве следствия получается известная теорема Гаусса—Бонне:

Теорема 4. *Пусть M — замкнутая компактная ориентируемая поверхность в $\mathbf{R}^3$. Тогда $\int\limits_M K\, d\sigma = 4\pi\lambda$, где λ — некоторое целое число.*

Доказательство. Применим теоремы 2 и 3 для сферического отображения $f\colon\ M\to S^2\subset\mathbf{R}^3$. Тогда:

$$\int\limits_M K\, d\sigma = \int\limits_M f^*(\Omega) = (\deg f)\int\limits_{S^2}\Omega = 4\pi\deg f. \qquad \square$$

Замечание. Теорема Гаусса—Бонне утверждает больше, чем теорема 4. Оказывается, целое число λ не зависит от римановой метрики и всегда равно $\lambda = 1-g$, где g — число ручек на ориентированной поверхности M или род поверхности M. Другими словами, имеет место более конкретная формула

$$\int\limits_M K\, d\sigma = 4\pi\deg f = 4\pi(1-g) = 2\pi\chi(M),$$

где g — род поверхности M, а $\chi(M) = 2-2g$ — это эйлерова характеристика.

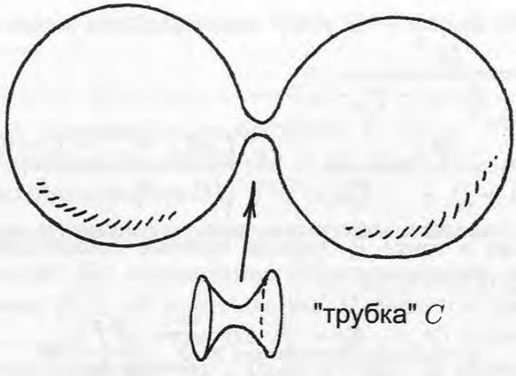

Рис. 4

Приведем наглядное геометрическое обоснование последней формулы. Для простоты будем считать, что поверхность M вложена в трехмерное пространство $M \subset \mathbf{R}^3$. Интеграл $\int\limits_M K\,d\sigma = \alpha(M)$ не меняется при гладкой деформации вложения M в $\mathbf{R}^3$, поскольку выражается через степень сферического отображения $f\colon\ M \to S^2 \subset \mathbf{R}^3$. Рассмотрим сначала частный случай стандартно вложенной двумерной сферы $M = S^2 \subset \mathbf{R}^3$. В этом случае род двумерной сферы $g = 0$. Поскольку вложение стандартно, то гауссова кривизна $K \equiv 1$ (мы считаем радиус вложенной сферы единичным). Следовательно,

$$\alpha(S^2) = \int\limits_{S^2} 1 \cdot d\sigma = 4\pi,$$

т. е. равно площади сферы. Теперь продеформируем стандартно вложенную сферу в поверхность, как показано на рис. 4: новая поверхность $\widetilde{M}$ состоит из двух сфер большого радиуса, соединенных малой трубкой («перемычкой») C. Поверхность $\widetilde{M}$ представляется в виде объединения трех поверхностей с краем:

$$\widetilde{M} = (S^2 \setminus D^2) \cup C \cup (S^2 \setminus D^2).$$

Значит

$$\alpha(S^2) = \int\limits_{S^2} K d\sigma = \int\limits_{\widetilde{M}} K d\sigma =$$
$$= \int\limits_{S^2 \setminus D^2} K d\sigma + \int\limits_{C} K d\sigma + \int\limits_{S^2 \setminus D^2} K d\sigma.$$

Считая трубку C «бесконечно малой», а поверхность $S^2 \setminus D^2$ близкой к стандартной сфере, получаем уравнение для вычисления интеграла $\frac{1}{2\pi}\int\limits_C K d\sigma$. Именно,

$$2 = 2 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_C K d\sigma + 2,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C K d\sigma = -2.$$

Отметим, что этот интеграл имеет конечную величину, несмотря на то, что трубка C бесконечно мала. Дело в том, что у трубки «бесконечно большая» (по модулю) гауссова кривизна.

Теперь рассмотрим поверхность произвольного рода g, т. е. $M_g^2 = S^2 + g(r)$. Эту поверхность можно гладко продеформировать, не меняя интеграла $\alpha(M_g^2)$, в поверхность, показанную на рис. 5. Две большие сферы соединены маленькими «трубками» в количестве $g+1$ штук. Следовательно, интеграл $\alpha(M_g^2)$ распадается на три слагаемых:

$$\frac{1}{2\pi}\alpha(M_g^2) = 2 + (g+1)(-2) + 2 = 2 - 2g = \chi(M_g^2).$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M_g^2} K d\sigma = \chi(M_g^2) = 2(1-g),$$

что и требовалось доказать.

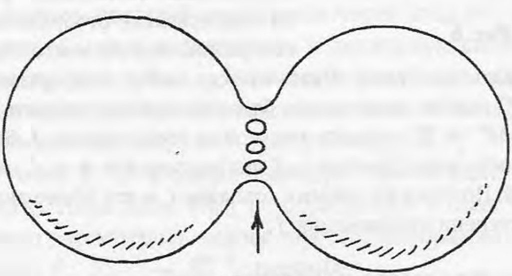

Рис. 5

Замечание. Вместо двумерной поверхности в $\mathbf{R}^3$ можно рассматривать гладкую гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$. Тогда из доказанной ранее теоремы вытекает, что

$$\int\limits_{V^{n-1}} K d\sigma = \frac{1}{2}\chi(V^{n-1}) \operatorname{vol}_{n-1} S^{n-1}.$$

Здесь через $\chi(V^{n-1})$ обозначена эйлерова характеристика гиперповерхности, а K — ее гауссова кривизна: $K = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}$. В частности, при любой гладкой деформации гиперповерхности в $\mathbf{R}^n$ интеграл от ее гауссовой кривизны сохраняется.