Лекция 12

3. Степень отображения и ее приложения

В этом параграфе мы опишем один важный геометрический инвариант отображений — степень отображения.

3.1. Пример

Рассмотрим окружность S^1, понимаемую как множество комплексных чисел, по модулю равных единице. Рассмотрим отображение $f\colon S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$. Это отображение является гладким отображением. Любая точка окружности S^1 является регулярной для отображения f. Действительно, в локальном параметре φ отображение f имеет вид: $f(\varphi) = n\varphi$;

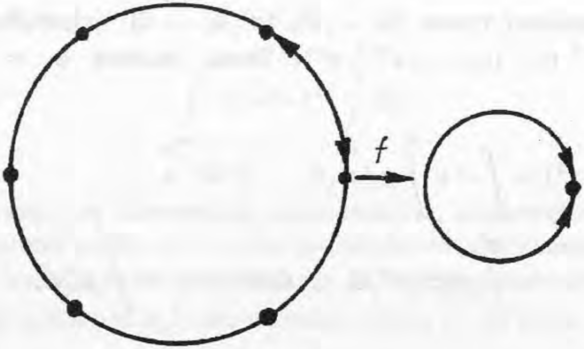

Рис. 2

$df(\xi) = n\xi$, $n \neq 0$. Следовательно, дифференциал df является изоморфизмом. Прообраз любой точки $z_0 \in S^1$ состоит из ровно n точек корней степени n комплексного числа z_0. Геометрически отображение f можно представлять себе как «намотку» окружности S^1 на S^1 n раз (рис. 2). Рассмотрим теперь внешнюю дифференциальную форму ω, равную в локальном параметре $\omega = d\varphi$. Тогда $f^*(\omega) = d(f(\varphi)) = d(n\varphi) = nd\varphi = n \cdot \omega$. Поэтому

$$\int\limits_{S^1} f^*(\omega) = n \int\limits_{S^1} \omega. \tag{1}$$

С другой стороны, разбив окружность на n интервалов $I_1, \ldots, I_n$ (с помощью, например, корней степени n из единицы), обнаруживаем, что на каждом интервале I_k отображение f является диффеоморфизмом на окружность S^1 (без одной точки). Поэтому в силу инвариантности интеграла внешней дифференциальной формы при заменах координат (с положительным якобианом) получаем $\int\limits_{I_k} f^*(\omega) = \int\limits_{S^1} \omega$. Значит, соотношение (1) можно получить следующим образом: подсчитать число прообразов у регулярной точки и умножить интеграл от формы ω на это число. Получится левая часть формулы (1).

Используя пример 5 п. 2, получаем, что на окружности S^1 то же число n определяет и поведение гомоморфизма $f^* \colon H^1(S^1) \to H^1(S^1)$ в группах когомологий.

3.2. Степень отображения

Определение 1. Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ гладкое отображение компактных, связных, ориентированных замкнутых многообразий, $\dim M_1 = \dim M_2$, $P \in M_2$ регулярная точка. Положим для $Q \in f^{-1}(P)$ значение $\epsilon(Q) = +1$, если детерминант матрицы Якоби отображения f в точке Q положителен, и $\epsilon(Q) = -1$, если этот же детерминант отрицателен. *Степенью отображения* f (относительно регулярной точки P) называется число

$$\deg_P f = \sum_{Q \in f^{-1}(P)} \epsilon(Q). \tag{2}$$

Теорема 1. *Определение (1) не зависит:*

а) *от выбора регулярной точки $P \in M_2$,*

б) *от выбора отображения f в классе гладко гомотопных отображений.*

Доказательство. Пункт а) сводится к пункту б). В самом деле, если P, P' — две регулярные точки, то существует такое непрерывное семейство диффеоморфизмов $\varphi_t\colon$ $: M_2 \to M_2$, что $\varphi_0(P) = P$, $\varphi_1(P') = P$. Тогда отображения f и $\varphi_1 \circ f$ гомотопны и у обоих точка P регулярна. С другой стороны, $\deg_P(\varphi_1 \circ f) = \deg_{P'} f$.

Итак, пусть $F\colon M_1 \times I \to M_2$ гладкое отображение, точка $P \in M_2$ регулярна для $f_0 = F|_{(M_1\times\{0\})}$ и для $f_1 = F|_{(M_1\times\{1\})}$. Тогда для отображения F точка P является регулярной во всех точках края $\partial(M_1 \times I) = (M_1 \times \{0\}) \cup \cup (M_1 \times \{1\})$.

По теореме Сарда для отображения F найдется регулярная точка P', сколь угодно близкая к точке P. Тогда точка P' регулярна и для отображений f_0 и f_1. Поскольку точку P' можно выбрать сколь угодно близко к точке P, то для каждого прообраза $Q \in f_0^{-1}(P)$ существует единственный близкий прообраз $Q' \in f_0^{-1}(P')$, причем $\epsilon(Q) = \epsilon(Q')$. Значит, $\deg_P f_0 = \deg_{P'} f_0$. Аналогично устанавливаем, что $\deg_P f_1 = \deg_{P'} f_1$. Снова обозначая точку P' через P, получаем, что прообраз $F^{-1}(P)$ является гладким одномерным многообразием с краем, причем, край $\partial F^{-1}(P)$ лежит в $\partial(M_1 \times I)$. Одномерное компактное многообразие всегда является объединением своих связных компонент, то есть окружностей и отрезков (см. рис. 3). Следовательно, и многообразие $F^{-1}(P)$ разлагается

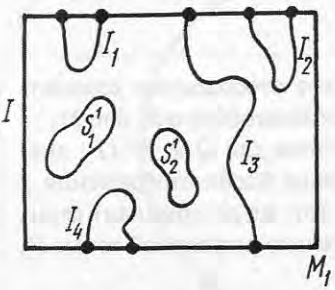

Рис. 3

в несвязную сумму отрезков I_k и окружностей S_l^1 : $F^{-1}(P) = \bigcup\limits_k I_k \cup \bigcup\limits_l S_l^1$. Каждый отрезок I_k имеет две граничные точки a_k и b_k. Множество всех точек $\{a_k, b_k\}$ образует объединение прообразов $f_0^{-1}(P)$ и $f_1^{-1}(P)$. Покажем, что если пара (a_k, b_k) лежит в одной компоненте края $\partial(M_1 \times I)$, то $\epsilon(a_k) = -\epsilon(b_k)$, а если в различных, то $\epsilon(a_k) = \epsilon(b_k)$. В самом деле, на многообразии $M_1 \times I$ в качестве атласа карт можно выбирать карты $U_\alpha \times I$ с координатами $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)$. На отрезке I_k введем параметр φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Пусть сначала точки a_k, b_k лежат на связной компоненте $M_1 \times \{0\}$, $a_k \in U_\alpha \times \{0\}$, $b_k \in U_\beta \times \{0\}$. Тогда выполнены неравенства:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{a_k} > 0, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{b_k} < 0. \tag{3}$$

С другой стороны, для достаточно малой окрестности $V \ni P$ все прообразы из $F^{-1}(V)$ в окрестности I_k являются отрезками, параметризованными одним параметром φ, так что $F^{-1}(V) = V \times F^{-1}(P) = V \times I_k$. Если в окрестности V выбраны координаты $(y^1, \ldots, y^n)$, то в области $F^{-1}(V)$ в качестве координат можно взять координаты $(y^1, \ldots, y^n, \varphi)$. Поэтому для вычисления чисел $\epsilon(a_k)$, $\epsilon(b_k)$ нужно вычислить знак детерминанта матриц: $\left(\dfrac{\partial x_\alpha^i}{\partial y^j}\right)$, $\left(\dfrac{\partial x_\beta^i}{\partial y^j}\right)$. Поскольку многообразие $M_1 \times I$ ориентировано, то матрицы Якоби перехода от координат $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)$ к координатам $(y^1, \ldots, y^n, \varphi)$ имеют одинаковый знак детерминанта независимо от индекса α. Например,

$$\left.\frac{\partial(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, t)}{\partial(y^1, \ldots, y^n, \varphi)}\right|_{a_k} = \frac{\partial(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)} \cdot \left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{a_k}. \tag{4}$$

Значит, первые сомножители в правой части (4) имеют различные знаки для точек a_k и b_k. Если точка $a_k \in M_1 \times \{0\}$, а $b_k \in M_1 \times \{1\}$, то вместо неравенств (3) выполнены неравенства

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{a_k} > 0, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{b_k} > 0. \tag{5}$$

Поэтому из формулы (4) следует, что $\epsilon(a_k) = \epsilon(b_k)$. Таким образом, все точки прообразов $f_0^{-1}(P)$ и $f_1^{-1}(P)$ разбиваются на пары точек, причем если пара лежит на одной компоненте края $\partial(M_1 \times I)$, то в сумме (2) она дает нулевой вклад. Если же пара лежит на различных компонентах края $\partial(M_1 \times I)$, то она дает в сумме (2) одинаковый вклад как для $\deg_P f_0$, так и для $\deg_P f_1$. Теорема 1 полностью доказана. $\square$

Замечание. Для неориентируемых многообразий тоже можно определить аналог степени отображения по формуле (2). Тогда вместо теоремы 1 следует утверждать независимость степени отображения от выбора точки и гомотопии по модулю 2.

3.3. Основная теорема алгебры

Так называется теорема, гласящая, что *любой многочлен $P(z)$ степени* $\geqslant 1$ *над полем комплексных чисел имеет хотя бы один комплексный корень.*

Существует много различных доказательств этой теоремы. Одно из них получается применением понятия степени отображения и теоремы 1. Рассмотрим гладкое отображение $P : \mathbf{C}^1 \to \mathbf{C}^1$ комплексной плоскости, задаваемое формулой:

$$\omega = P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0. \tag{6}$$

Это отображение можно продолжить до отображения двумерной сферы S^2 в себя, считая S^2 комплексной проективной прямой $\mathbf{CP}(1)$. Для этого будем считать, что комплексный параметр z равен отношению однородных координат на $\mathbf{CP}(1)$: $z = \dfrac{z_1}{z_0}$ при $z_0 \neq 0$. Аналогично $w = \dfrac{w_1}{w_0}$ при $w_0 \neq 0$. Поэтому отображение

$$\omega_1 = z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \ldots + a_1 z_1 z_0^{n-1} + a_0 z_0^n, \tag{7}$$

$$w_0 = z_0^n$$

корректно определяет отображение $\mathbf{CP}(1)$ в себя. Отображение (7), очевидно, является гладким отображением. В самом деле, в карте $z_0 \neq 0$ это следует из (6). В карте же $z_1 \neq 0$ в качестве комплексной координаты можно взять функцию $z' = \dfrac{z_0}{z_1}$. Положим $w' = \dfrac{w_0}{w_1}$. Тогда

$$\omega' = (z')^n(1 + a_{n-1}z' + \ldots + a_1(z')^{n-1} + a_0(z')^n)^{-1}, \tag{8}$$

Тогда, подбирая достаточно малым $\epsilon > 0$, выберем карту, содержащую точку $z' = 0$, задавая ее неравенством $|z'| < \epsilon$ так, чтобы знаменатель в формуле не обращался в ноль. Таким образом, отображение $f\colon \mathbf{CP}(1) \to \to \mathbf{CP}(1)$, задаваемое формулой (7), является гладким отображением. Вычислим его степень. Согласно теореме 1, вместо отображения f можно взять гомотопное ему отображение. Рассмотрим гомотопию по параметру t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, задаваемую формулой (9)

$$\omega_1 = z_1^n + t(a_{n-1}z^{n-1}z_0 + \ldots + a_0 z_0^n), \tag{9}$$

$$w_0 = z_0^n$$

Как и в случае (7), отображения (9) являются гладкими отображениями. При $t = 0$ получается простое отображение:

$$w_1 = z_1^n, \quad w_0 = z_0^n. \tag{10}$$

В локальных координатах $w = \dfrac{w_1}{w_0}$, $z = \dfrac{z_1}{z_0}$ оно имеет вид: $w = z^n$, и, скажем, точка $w = 1$ является регулярной. В самом деле, следует вычислить матрицу Якоби отображения $u = \operatorname{Re} w = \operatorname{Re} z^n$, $v = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im} z^n$, $z = x + iy$. Тогда:

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \dfrac{\partial w}{\partial z} & -\operatorname{Im} \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \operatorname{Im} \dfrac{\partial w}{\partial z} & \operatorname{Re} \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= n^2 \det \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z^{n-1} & -\operatorname{Im} z^{n-1} \\ \operatorname{Im} z^{n-1} & \operatorname{Re} z^{n-1} \end{pmatrix} = n^2 |z^{n-1}|^2 > 0$$

при $z \neq 0$. Поскольку уравнение $z^n = 1$ имеет ровно n решений, то степень отображения (10), а вместе с ним и (7), равна n: $\deg f = n$. Если бы многочлен P не имел корней, то это значило бы, что точка $w = 0$ не принадлежит образу отображения f. Следовательно, отображение $f\colon \mathbf{CP}(1) \to \mathbf{CP}(1)$ имело бы регулярную точку ($w = 0$) с пустым прообразом, т. е. степень отображения f равнялась бы нулю. Противоречие доказывает теорему.