Лекция 11

10.3. Инвариантное определение тензора кривизны

Выше мы построили тензор Римана в локальной системе координат. Дадим теперь инвариантное определение. Пусть $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ — произвольные гладкие векторные поля на M^n (с симметричной аффинной связностью). Построим *«оператор кривизны»* R, сопоставляющий тройке $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ новое векторное поле. Удобно трактовать поля как линейные дифференциальные операторы; это обстоятельство будем указывать так: вместо $\mathbf{X}$ напишем просто X.

Определение 2. Положим: $R(X, Y)(Z) = \nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z)$. Итак, R переводит $T_x \times T_x \times T_x$ в T_x, где $x \in M^n$.

Теорема 1. *Отображение R трилинейно и потому задает тензор четвертого ранга.*

Доказательство. Если рассмотреть линейные комбинации полей — аргументов с постоянными коэффициентами, то трилинейность очевидна. В доказательстве нуждается тот факт, что за знак операции R можно выносить гладкую функцию $f(x)$. Если это доказать, то R будет полностью определено действием на базисные поля: $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Рассмотрим отображение $(X, Y, Z) \to (X, Y, f(x) \cdot Z)$, где $f(x)$ — гладкая функция. Требуется доказать, что $R(X, Y)(fZ) = f \cdot R(X, Y)Z$.

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) = \nabla_X((\nabla_Y f)Z) + \nabla_X(f\nabla_Y Z) - \\
&- \nabla_Y((\nabla_X f)Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - (\nabla_{[X,Y]}f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z = \\
&= (\nabla_X\nabla_Y f)Z + (\nabla_Y f)\nabla_X Z + (\nabla_X f)\nabla_Y Z + f(\nabla_X\nabla_Y Z) - \\
&- (\nabla_Y\nabla_X f)Z - (\nabla_X f)\nabla_Y Z - (\nabla_Y f)\nabla_X Z - f(\nabla_Y\nabla_X Z) - \\
&- (\nabla_{[X,Y]}f)Z - f(\nabla_{[X,Y]}Z) = \{(X(Yf) - Y(Xf) - (XY - YX)f\}Z + \\
&+ f\{\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\} = 0 + f \cdot R(X, Y)Z,
\end{aligned}$$

так как $\nabla_X f = X(f)$. Далее требуется проверить, что: $R(fX, Y)Z = f \cdot R(X, Y)Z$. Имеем:

$$= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX}Z - \nabla_{[fX,Y]}Z.$$

ак как

$$(fX)^k\nabla_k T = f\{X^k\nabla_k T\} = f(\nabla_X T).$$

$$[fX, Y] = f(XY) - Y(fX) = f(XY) - (Yf)X - f(YX) = f[X, Y] - (Yf)X.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
&R(fX, Y)Z = f(\nabla_X\nabla_Y Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]}Z + \nabla_{(Yf)X}Z = \\
&= f(\nabla_X\nabla_Y Z) - (\nabla_Y f)\nabla_X Z - f(\nabla_Y\nabla_X Z) - f\nabla_{[X,Y]}Z + (Yf)\nabla_X Z = \\
&= f \cdot R(X, Y)Z + 0 = f \cdot R(X, Y)Z,
\end{aligned}$$

что и требовалось. Соотношение: $R(X, fY)Z = f \cdot R(X, Y)Z$ проверяется аналогично. $\square$

Свяжем инвариантное определение тензора кривизны с его координатным определением. Введем базисные поля ∂_i (как дифференциальные операторы). Разложим X, Y, Z по этим полям: $X = X^i\partial_i$; $Y = Y^j\partial_j$;

$Z = Z^k\partial_k$. Получаем: $R(X,Y)Z = X^iY^jZ^k\cdot\{R(\partial_i,\partial_j)\partial_k\}$; т. е. $R(X,Y)Z$ полностью определяется заданием $R(\partial_i,\partial_j)\partial_k$. Далее,

$$R(\partial_i,\partial_j)Z = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}Z - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}Z - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}Z.$$

Ясно, что $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ (по определению ∇_{∂_i}), т. е. $R(\partial_i,\partial_j)Z = (\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)Z - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}Z$. Так как $[\partial_i,\partial_j]=0$, то $R(\partial_i,\partial_j)Z = (\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)Z$. Итак, мы получили (в фиксированной системе координат $x^1,\dots,x^n$) «координатное» определение тензора Римана, что и доказывает совпадение определений.

10.4. Алгебраические свойства тензора кривизны Римана

Теорема 2. *Для любых трех гладких полей X, Y, Z на M^n выполняются тождества:*

1) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$; $R^i_{j,kl} + R^i_{j,lk} = 0$; *т. е. косая симметрия по аргументам X, Y.*
2) $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$ — *тождество Якоби; в координатах:* $R^i_{j,kl} + R^i_{l,jk} + R^i_{kl,j} = 0$. *Здесь в записи $R^i_{j,kl}$ имеется такое соответствие между индексами (j,k,l) и полями X, Y, Z:* $j\sim X$, $k\sim Y$, $l\sim Z$.
3) *В том случае, когда связность ∇ — риманова, имеем* $\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle = 0$ *для любых полей X, Y, Z, W; здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение, порожденное метрикой g_{ij}; в координатах:* $R_{ij,kl}+R_{ji,kl}=0$, *где* $R_{ij,kl}=g_{i\alpha}R^{\alpha}_{j,kl}$.
4) *Если связность ∇ риманова, то* $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\langle R(Z,W)X,Y\rangle$, *т. е.* $R_{ij,kl} = R_{kl,ij}$.

На языке компонент $R_{ij,kl}$ (т. е. после опускания индекса) имеем косую симметрию внутри каждой пары: $(i,\ j)$ и $(k,\ l)$, а также — симметрию при перестановке пар (когда обе пары меняются местами, но внутри пар индексы не переставляются).

Доказательство.

1) Так как $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X,Y]}Z$, то косая симметрия $R(X,Y)Z$ по паре X, Y очевидна.

2) Сначала докажем, что для симметричной связности имеем: $\nabla_XY - \nabla_YX = [X,Y]$. В самом деле, в координатах имеем:

$$\nabla_XY - \nabla_YX = X^i\nabla_iY - Y^i\nabla_iX =$$
$$= \left\{X^i\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^p\Gamma^k_{ip}\right) - Y^i\left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + X^p\Gamma^k_{ip}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x^k} =$$

$$= \left\{X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + X^iY^p\Gamma^k_{ip} - Y^iX^p\Gamma^k_{ip}\right\}\frac{\partial}{\partial x^k} =$$
$$= \left\{X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\right\}\frac{\partial}{\partial x^k} = [X, Y],$$

так как $Y^iX^p\Gamma^k_{ip} = Y^pX^i\Gamma^k_{pi}$; $\Gamma^k_{pi} = \Gamma^k_{ip}$. Если X и Y коммутируют, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X$. Теперь докажем тождество Якоби. В силу теоремы 1 достаточно проверить его только на попарно коммутирующих полях: X, Y, Z (например, на ∂_i, ∂_j, ∂_k). Достаточно проверить, что:

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y -$$
$$- \nabla_{[Z,X]}Y + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \equiv 0.$$

Как было отмечено, X, Y, Z — коммутируют, а потому требуемое тождество следует из соотношений типа: $\nabla_X Y = \nabla_Y X$. Свойство 2) доказано.

3) Требуется доказать, что $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(X,Y)W, Z\rangle = 0$. Достаточно проверить, что $\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = 0$ (учитывая поляризацию квадратичных форм). Снова считаем, что $[X,Y] = 0$. Тогда: $\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = \langle(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)Z, Z\rangle$. Рассмотрим функцию: $\langle Z, Z\rangle = f$ и вычислим $X(f) = X\langle Z, Z\rangle = \nabla_X\langle Z, Z\rangle = 2\langle\nabla_X Z, Z\rangle$. Далее:

$$YX(f) = 2\nabla_Y\langle\nabla_X Z, Z\rangle = 2\langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle;$$

аналогично получаем: $XY(f) = 2\langle\nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle$. В силу симметрии $\langle\ ,\ \rangle$ имеем: $\langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle = \langle\nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle$, что и требовалось.

4) Требуется доказать, что $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$. Рассмотрим октаэдр, показанный на рис. 39. Четыре его грани заштрихованы, и в каждой его вершине поставлено скалярное произведение. Сумма произведений, расположенных в вершинах каждой заштрихованной грани, равна нулю. Проверим, например, это для грани αac. Имеем, используя

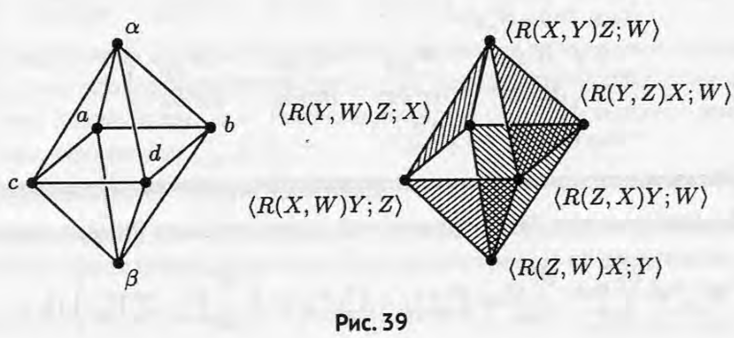

Рис. 39

уже доказанные симметрии,

$$\langle R(X,Y)Z;W\rangle = -\langle R(X,Y)W;Z\rangle;$$
$$\langle R(Y,W)Z;X\rangle = -\langle R(Y,W)X;Z\rangle;$$
$$\langle R(X,W)Y;Z\rangle = -\langle R(W,X)Y;Z\rangle,$$

т. е.

$$\begin{aligned} a+\alpha+c &= \langle R(X,Y)Z;W\rangle + \langle R(Y,W)Z;X\rangle + \langle R(X,W)Y;Z\rangle = \\ &= -\langle R(X,Y)W;Z\rangle - \langle R(Y,W)X;Z\rangle - \langle R(W,X)Y;Z\rangle = \\ &= -\langle R(X,Y)W + R(Y,W)X + R(W,X)Y;Z\rangle = 0 \end{aligned}$$

в силу тождества Якоби. Аналогично проверяется равенство нулю сумм: $\alpha+b+d$; $c+d+\beta$; $a+b+\beta$. Напишем тождество: $0+0=0+0$ и распишем каждый из этих нулей так: $(a+\alpha+c)+(\alpha+b+d)=(a+b+\beta)+(c+d+\beta)$; откуда $2\alpha=2\beta$, т. е. $\langle R(X,Y)Z;W\rangle = \langle R(Z,W)X;Y\rangle$, что и требовалось. □

Определение 3. *Тензором Риччи* римановой связности называется тензор $R_{jl}=R^i_{j,il}$, т. е. тензор, полученный сверткой (по паре индексов) тензора Римана. Тензор Риччи симметричен (проверьте!).

Определение 4. *Скалярной кривизной* R риманова многообразия называется функция $R(x)=g^{kl}R_{kl}$, т. е. полная свертка тензора Риччи с тензором, обратным к метрическому.

Ясно, что R_{kl} — тензор 2-го ранга, а $R(x)$ — скалярная функция. Для многих конкретных задач полезно знать явное выражение тензора Римана через g_{ij} и производные от g_{ij}.

Теорема 3. *На римановом многообразии имеет место тождество:*

$$\begin{aligned} &R_{iq,kl} = g_{i\alpha}R^{\alpha}_{q,kl} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^q\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^q\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^i\partial x^k}\right) + \\ &+ g_{mp}\left(\Gamma^m_{qk}\Gamma^p_{il} - \Gamma^m_{ql}\Gamma^p_{ik}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Из координатной записи тензора Римана имеем:

$$R^i_{q,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk}\right)[k,l],$$

где знаком $[k,l]$ обозначена альтернация по индексам k и l без деления на 2. Далее,

$$\theta = g_{si}R^i_{q,kl} = R_{sq,kl} = g_{si}\left(\frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk}\right)[k,l] = g_{si}\left(\frac{\partial\Gamma^i_{*}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{*}\right)[k,l],$$

где знаком $*$ обозначена пара индексов (ql). Выражение в круглых скобках можно формально понимать как результат ковариантного дифференцирования ∇_k набора Γ^i_*, где на знак $*$ пока не обращаем внимания. Набор Γ^i_* не образует тензора, однако, в каждой данной системе координат можно рассмотреть и тензор с такими компонентами: Γ^i_* (в других системах этот тензор будет иметь уже какие-то другие компоненты, отличные от $\Gamma^{i'}_*$, но для дифференцирования в данной системе это обстоятельство несущественно). Так как g_{si} порождает опускание индекса у «тензора» Γ^i_*, то это можно выполнить и под знаком ковариантного дифференцирования, так как тензор g_{ij} ковариантно постоянен. Отсюда:

$$\theta = g_{si}\nabla_k(\Gamma^i_*)[k,l] = \nabla_k(g_{si}\Gamma^i_*)[k,l] = \nabla_k(\Gamma_{s,*})[k,l],$$

где

$$\Gamma_{s,*} = \Gamma_{s,ql} = \frac{1}{2}g_{si}g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha l}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{\alpha q}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{sq}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^s}\right).$$

Подставляя это выражение в исходную формулу для $R_{sq,kl}$, получаем:

$$\begin{aligned}
R_{sq,kl} &= \nabla_k(\Gamma_{s*})[k,l] = \left(\frac{\partial\Gamma_{s*}}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha,*}\Gamma^\alpha_{ks}\right)[k,l] = \\
&= \left(\frac{\partial\Gamma_{s,ql}}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha,ql}\Gamma^\alpha_{ks}\right)[k,l] = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k\partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{sq}}{\partial x^k\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k\partial x^s}\right)[k,l] - g_{\alpha p}\Gamma^p_{ql}\Gamma^\alpha_{ks}[k,l] = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k\partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l\partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^l\partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k\partial x^s}\right) + g_{\alpha p}\left(\Gamma^p_{qk}\Gamma^\alpha_{ls} - \Gamma^p_{ql}\Gamma^\alpha_{ks}\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Следствие 1. *Если тензор кривизны Римана не обращается в нуль в какой-то системе координат, то на M^n нельзя ввести локальные евклидовы координаты, т. е. такие, в которых g_{ij} — постоянная матрица (или, что то же: $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$).*

Доказательство следует из леммы 2. □

Связь между равенством нулю тензора кривизны и возможностью введения евклидовых координат усматривается еще из следующих соображений. Рассмотрим закон преобразования: $\Gamma^{i'}_{j'k'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\left(\dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^i_{jk} +\right.$

$+\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\Big)$. Для того, чтобы существовали координаты, в которых $\Gamma^{i'}_{j'k'}\equiv$ $\equiv 0$, необходимо выполнение соотношений (т. е. уравнений на координаты $x^{i'}$): $\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} = -\dfrac{\partial x^j \partial x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}$. Необходимым условием разрешимости этой системы являются тождества: $\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{\alpha'}}\right)$. Это накладывает условия на правые части системы. Можно проверить, что выполнение этих требований эквивалентно обращению в нуль тензора кривизны. (Проверьте!).

10.5. Некоторые приложения тензора кривизны Римана

Рассмотрим двумерное риманово многообразие. Здесь тензор кривизны устроен особенно просто (задача: какой смысл имеет тензор кривизны для одномерного многообразия?). Рассмотрим скалярную кривизну $R(x)$ — функцию на M^2. Так как эта функция измеряет «искривленность» M^2, то есть основания считать, что она связана с гауссовой кривизной, которая, как мы знаем, также отвечает за «искривленность» M^2, если двумерное многообразие M^2 вложено в R^3.

Теорема 4. *На двумерном гладком римановом многообразии имеет место тождество: $R = 2K$, где $R(P)$, $P \in M^2$, — скалярная кривизна, $K(P)$ — гауссова кривизна.*

Следствие 2. *Так как $R(P)$ полностью определяется заданием g_{ij}, то $K(P)$ также полностью определяется только g_{ij}, в частности, не меняется при изометриях M^2 в $\mathbf{R}^3$ (при изгибаниях поверхности).*

Нетривиальность этого следствия видна из того, что в исходном определении $K(P)$ участвовала вторая квадратичная форма, описывающая вложение M^2 в $\mathbf{R}^3$. Непосредственная проверка инвариантности $K(P)$ при изгибаниях также затруднительна и наиболее естественно производится только после изучения тензора Римана.

Доказательство. В силу теоремы 3:

$$R_{iq,kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^q\partial x^k}+\frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^q\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^i\partial x^k}\right)+g_{mp}\left(\Gamma^m_{qk}\Gamma^p_{il}-\Gamma^m_{ql}\Gamma^p_{ik}\right).$$

Введем в $\mathbf{R}^3$ специальную декартову систему координат; выберем на M^2 точку P и зададим M^2 в окрестности P в виде графика $z = f(x, y)$, где (x, y) — декартовы координаты в $T_P M^2$. Так как $T_P M^2 = \mathbf{R}^2(x, y)$ — касательная плоскость, то $\mathbf{grad}\, f(P) = 0$, т. е. $g_{ij}(P) = (\delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j})(P) = \delta_{ij}$

или $\Gamma^i_{jk}(P) = 0$, так как $\left.\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\right|_P = 0$ (проверьте!). В силу алгебраических симметрий $R_{iq,kl}$ у него сейчас имеется только одна существенная компонента: $R_{12,12}$. Остальные — либо равны нулю, либо отличаются от $R_{12,12}$ только знаком, или совпадают с $R_{12,12}$. Запишем тензор Римана в системе координат (x, y). Имеем:

$$\begin{aligned}
R_{12,12} &= \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left[2\left(f_x f_y\right)_{xy} - \left(f_y^2\right)_{xx} - \left(f_x^2\right)_{yy}\right] = \\
&= \left(f_{xx}f_y + f_x f_{xy}\right)_y - \left(f_y f_{xy}\right)_x - \left(f_x f_{xy}\right)_y = \\
&= f_{xxy}f_y + f_{xx}f_{yy} + f_{xy}f_{xy} + f_x f_{xyy} - f_{xy}f_{xy} - f_y f_{xxy} - f_{xy}f_{xy} - f_x f_{xyy} = \\
&= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = K.
\end{aligned}$$

Отсюда: $R_{12,12} = K$. Вычислим R.

$$R = g^{kl}R_{kl} = g^{kl}R^{\alpha}_{k,\alpha l} = g^{kl}g^{\alpha q}R_{qk,\alpha l} = R_{12,12}\left(\Sigma_{\pm} g^{kl}\cdot g^{\alpha q}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\pm} g^{kl}g^{\alpha q} &= g^{22}g^{11} - g^{21}g^{21} + g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12} = \\
&= 2(g^{22}g^{11} - (g^{12})^2) = 2\det(g_{ij})^{-1} = \frac{2}{g}, \quad \text{где} \quad g = \det(g_{ij}).
\end{aligned}$$

Итак: $R = \dfrac{2}{g}R_{12,12}$. Отсюда: $R = 2K$, так как $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$. Но так как R и K — скаляры, то их значения не зависят от выбора координат и потому в любой системе получаем: $R = 2K$. □

Таким образом, по характеру своего поведения относительно изгибаний, $K(P)$ отличается от средней кривизны, поэтому гауссова кривизна — «внутренний инвариант» поверхности. Рассмотрим примеры.

✍ ***Пример 1.*** Для евклидовой метрики $dx^2 + dy^2 :\ R = 2K = 0$.

✍ ***Пример 2.*** Для сферической метрики $dr^2 + \left(\sin^2\dfrac{r}{r_0}\right)d\varphi^2 :\ R = 2K = \dfrac{2}{r_0^2}$, т. е. скалярная кривизна постоянна и положительна.

✍ ***Пример 3.*** Для метрики плоскости Лобачевского $dr^2 + \left(\operatorname{sh}^2\dfrac{r}{r_0}\right)^2 d\varphi^2$ имеем: $R = 2K = \dfrac{-2}{r_0^2}$, т. е. кривизна постоянна и отрицательна.

✍ ***Пример 4.*** Для конформно-евклидовой метрики $\lambda(x,y)(dx^2+dy^2)$, где $\lambda(x,y)$ — положительная функция, имеем: $R = 2K = -\dfrac{1}{\lambda}\Delta \ln \lambda$, где Δ — оператор Лапласа. Доказательство: прямое вычисление.

Структура тензора Римана в трехмерном случае уже более сложна. Больше число существенных компонент: $R_{12,13}$; $R_{21,23}$; $R_{31,32}$; $R_{12,12}$; $R_{13,13}$; $R_{23,23}$; остальные $R_{ij,kl}$ либо равны нулю, либо совпадают с указанными, либо отличаются знаком.

«Сложность» $R_{ij,kl}$ определяется числом существенных компонент. Для M^2 такая компонента — одна, для M^3 — шесть. Можно подсчитать, что для $M^n : N = \dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$, где N — число существенных компонент; когда $n \to \infty$, отношение N к общему числу компонент (т. е. к n^4) стремится к $1/12$.

Задача 1. Вычислите N.

В геометрии большое значение имеет *«кривизна по двумерному направлению»*. Рассмотрим риманово M^n; пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_P M^n$. Пусть они выбраны так, что площадь параллелограмма $\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, построенного на этих векторах, равна 1 в метрике g_{ij}. Тогда *кривизной M^n в двумерном направлении σ*, определяемом $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, называется число $R(\sigma) = \langle R(X,Y)X; Y\rangle$, где X, Y — произвольные векторные поля в окрестности P, такие, что $X(P) = \mathbf{X}$, $Y(P) = \mathbf{Y}$, т. е. совпадающие в P с выбранными векторами $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Следует доказать, что $R(\sigma)$ не зависит от способа включения векторов $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ в векторные поля X, Y.

Лемма 3. *Имеет место формула $R(\sigma) = R_{\beta j,kl}X^j X^k Y^l Y^\beta$, где X^α и Y^β — координаты векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Здесь $R_{ij,kl}$ — тензор и $R(\sigma)$ не зависит от способа включения $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ в X, Y.*

Доказательство. Имеем:

$$\big[R(X,Y)Z\big]^k = R^k_{j,pq}X^p Y^q Z^j;$$

$$R(\sigma) = g_{\alpha\beta}Y^\beta[R(X,Y)X]^\alpha = g_{\alpha\beta}Y^\beta R^\alpha_{j,kl}X^j X^k Y^l = R_{\beta j,kl}X^j X^k Y^l Y^\beta,$$

что и требовалось, так как $X^i = X^i(P)$, $Y^i = Y^i(P)$. □

Определение 5. Риманово многообразие M^n называется *многообразием положительной (постоянной, отрицательной, нулевой и т. д.)* кривизны, если его кривизны по всем двумерным направлениям положительны (постоянны, отрицательны, нулевые и т. д.).