

## Лекция 10

**Теорема 3.** Пусть  $M^2$  — одно из следующих многообразий: а)  $\mathbb{R}^2$ ; б)  $S^2$ ; в) плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}^2$ , снабженных стандартными метриками. Пусть  $G = \text{Iso}(M^2)$  — группа всех изометрий  $M^2$ . Тогда каждое преобразование  $g \in G$  задается тремя непрерывными параметрами, т. е.  $\dim G = 3$ .

Под  $G$  понимается полная группа изометрий, т. е. группа диффеоморфизмов, сохраняющих метрику. Группа  $G = \text{Iso}(M^n)$  может быть определена для любого гладкого риманова многообразия; эта группа может быть превращена в топологическое пространство. Два преобразования  $g_1, g_2$  считаются близкими, если они близки как диффеоморфизмы  $M^n$ , т. е. для всех точек  $x \in M^n$  близки точки  $g_1(x), g_2(x)$ , где  $g_1, g_2 \in G$ .

Теорема 3 есть частный случай общего утверждения, которое мы сообщим без доказательства:

**Утверждение 2.** Пусть  $M^n$  — компактное гладкое риманово связное замкнутое многообразие и  $G = \text{Iso}(M^n)$ ; тогда  $\dim G \leq \frac{n(n+1)}{2}$ , т. е. каждое преобразование  $g \in G$  задается не более чем  $\frac{n(n+1)}{2}$  непрерывными параметрами.

В этом общем виде теорема нами использоваться дальше не будет. Хотя доказательство мы проведем только для указанных трех многообразий, но все рассуждения верны для произвольного многообразия; в процессе доказательства мы оговорим те моменты, где мы используем конкретный вид  $M^2$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \in M^n$  и  $H(x_0) \subset G$  — множество изометрий, оставляющих  $x_0$  на месте. Ясно, что  $H(x_0)$  — подгруппа. Она называется *стационарной подгруппой точки*  $x_0$ ; для разных  $x_1$  и  $x_2$  подгруппы  $H(x_1)$  и  $H(x_2)$ , вообще говоря, различны. Пусть  $h \in H(x_0)$ . Так как  $h(x_0) = x_0$ , то  $dh(x_0): T_{x_0}M^n \rightarrow T_{x_0}M^n$ . Построим отображение  $\lambda: H(x_0) \rightarrow \mathbf{GL}(n; \mathbf{R})$ , положив  $\lambda(h) = dh(x_0)$ . Ясно, что  $dh \in \mathbf{GL}(n; \mathbf{R})$ , так как  $h$  — диффеоморфизм. Далее,  $\lambda$  отображает  $H(x_0)$  в подгруппу  $O(n) \subset \mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ . В самом деле, можно считать, что в окрестности  $x_0$  выбраны координаты, такие, что  $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$ ; тогда  $g_{ij}(x_0)$  определяет в  $T_{x_0}M^n$  евклидову метрику. Так как  $h$  — изометрия,

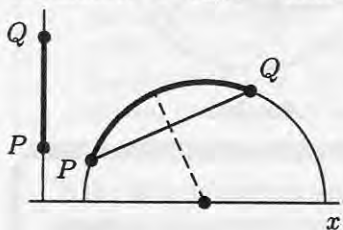


Рис. 31

то  $dh(x_0)$  сохраняет евклидово скалярное произведение в  $T_{x_0}M^n$ . Далее:  $\lambda$  — гомоморфизм  $H(x_0)$  в  $O(n)$ . В самом деле:  $\lambda(h_1 \circ h_2) = d(h_1 \circ h_2)(x_0) = dh_1(x_0) \circ dh_2(x_0)$ . Более того,  $\lambda$  — мономорфизм. В самом деле, допустим, что  $dh = E$  (тождественно); надо доказать, что  $h(x) = x$  для любого  $x \in M^n$ . Воспользуемся тем, что  $M^n$  — одно из многообразий:  $S^2, \mathbf{R}^2, \mathbf{L}^2$ .

На каждом из них любая пара точек может быть соединена геодезической. На плоскости утверждение очевидно. На  $S^2$ , в силу Предложения 1, геодезические — это экваторы, что доказывает утверждение. Если  $M^2 = \mathbf{L}^2$ , то рассмотрим верхнюю полуплоскость; построение геодезической показано на рис. 31. Это утверждение верно для любого многообразия указанного типа (см. выше теорему Хопфа—Ринова), однако мы не будем этого доказывать.

Итак, пусть  $dh(x_0) = E$ ; соединим геодезической произвольную точку  $x \in M^n$  с  $x_0$ . Пусть  $\dot{\gamma}(0)$  — вектор скорости  $\gamma(t)$  в точке  $x_0$  геодезической  $\gamma(t)$ . Так как  $h$  — изометрия, то образ  $\gamma$  при действии  $h$  — геодезическая, а так как  $dh(x_0) = E$ , то геодезическая  $\gamma_1 = h(\gamma)$  имеет в  $x_0$  тот же вектор скорости, что и  $\gamma$ . Две касающиеся геодезические совпадают. Так как  $\gamma$  можно отнести к натуральному параметру, то  $h$  не меняет его вдоль  $\gamma$ , а потому  $x$  остается на  $\gamma$  на прежнем расстоянии от  $x_0$ , т. е.  $h(x) = x$ , что и требовалось. Мы доказали мономорфность отображения  $\lambda$ . Итак,  $H(x_0)$  — замкнутая подгруппа в  $O(n)$ . Замкнутость  $H(x_0)$

вытекает из того, что изометрия, являющаяся пределом изометрий, сохраняющих  $x_0$ , сама сохраняет  $x_0$ . Итак, для  $M^2 = S^2, \mathbf{R}^2, \mathbf{L}^2$  имеем:  $\dim H(x_0) \leq \dim O(2) = 1$ . Для произвольного  $M^n$  можно показать, что  $\dim H(x_0) \leq \dim O(n)$ , т. е.  $\dim H(x_0) \leq n(n-1)/2$ . Рассмотрим теперь группу  $G$ .

**Утверждение 3.** Любая изометрия  $g \in G$  определяется образом точки  $x_0$ , т. е.  $g(x_0)$ , и дифференциалом  $dg(x_0) : T_{x_0}M^n \rightarrow T_{g(x_0)}M^n$ .

В самом деле, рассмотрим соответствие:  $g \rightarrow (g(x_0); dg(x_0))$  и пусть  $(g_1(x_0); dg_1(x_0)) = (g_2(x_0); dg_2(x_0))$ . Отсюда  $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ ,  $dg_1(x_0) = dg_2(x_0)$ ; тогда рассмотрим  $g(x) = (g_1^{-1}) \circ g_2(x)$ ,  $x \in M^n$ . Имеем:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= (g_1^{-1}) \circ g_2(x_0) = x_0, \quad \text{т. е. } g \in H(x_0); \\ dg(x_0) &= d((g_1^{-1}) \circ g_2)(x_0) = ((dg_1)^{-1} \circ (dg_2))(x_0) = \\ &= (dg_1(x_0))^{-1} \circ (dg_2(x_0)) = E, \end{aligned}$$

см. выше:  $g \equiv E$  на  $M^n$ , т. е.  $g(x) = x$ ,  $g_1(x) \equiv g_2(x)$ . Так как  $g(x_0)$  определяется  $n$  параметрами, а  $dg(x_0)$  задается не более чем  $\frac{n(n-1)}{2}$  параметрами, то  $g$  может быть задано не более, чем  $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  параметрами. Для  $M^2 = S^2, \mathbf{R}^2, \mathbf{L}^2$  имеем:  $\dim G \leq 3$ . С другой стороны, как было показано в гл. 4, каждая из групп  $\text{Iso}(\mathbf{R}^2)$ ,  $\text{Iso}(S^2)$ ,  $\text{Iso}(\mathbf{L}^2)$  содержит подгруппу, преобразования которой также задаются тремя параметрами. Так как эти подгруппы открыты и замкнуты, то для  $M^2 = S^2, \mathbf{R}^2, \mathbf{L}^2$  имеем:  $\dim \text{Iso}(M^2) = 3$ . Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $\text{Iso}(M^n)_0$  — связная компонента единицы в  $\text{Iso}(M^n)$ ; тогда  $\text{Iso}(M^2)_0$  для  $M^2 = S^2, \mathbf{R}^2, \mathbf{L}^2$  совпадает с теми трехмерными группами, которые построены в гл. 4; т. е.  $\text{Iso}(S^2)_0 = \text{SO}(3)$ ;  $\text{Iso}(\mathbf{L}^2)_0 = \text{SL}(2; \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ ;  $\text{Iso}(\mathbf{R}^2)_0$  совпадает с группой всех линейных изометрий плоскости, сохраняющих ориентацию, т. е. с группой матриц вида  $\begin{pmatrix} \text{SO}(2) & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 10. Тензор кривизны

### 10.1. Предварительные замечания

Рассмотрим  $M^n$  (не обязательно риманово) с симметричной аффинной связностью  $\nabla$ . Выше была доказана формула:  $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta) = \Gamma_{\alpha\beta}^k \partial_k$ , где  $\partial_\alpha$  — базисные векторные поля. Задание  $\nabla$  определяет параллельный перенос (на бесконечно малое расстояние) вдоль координатной линии  $x^\alpha$ . Фиксируем точку  $P$  и рассмотрим следующие параллельные переносы:  $\nabla_k \nabla_l$  и  $\nabla_l \nabla_k$ , где  $\nabla_\alpha = \nabla_{\partial_\alpha}$  (рис. 33).

Можно считать, что мы смещаемся вдоль координатных линий  $x^k$  и  $x^l$  на малые расстояния  $\alpha$  и  $\beta$ . Конечные точки  $Q$  и  $Q'$  будут, вообще говоря, различны. Этот эффект можно обнаружить и при другом способе переноса. Рассмотрим движение, показанное на рис. 34. Этот малый «параллелограмм» будет, вообще говоря, разомкнут — мы не вернемся в точку  $P$  в силу «искривленности»  $M^n$ . Условно эту «искривленность» можно попытаться измерить разностью:  $\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k = \epsilon$ . Если  $M^n = \mathbf{R}^n$  и координаты декартовы, то  $\nabla_k \nabla_l = \nabla_l \nabla_k$ ; если  $M^n$  — произвольно,

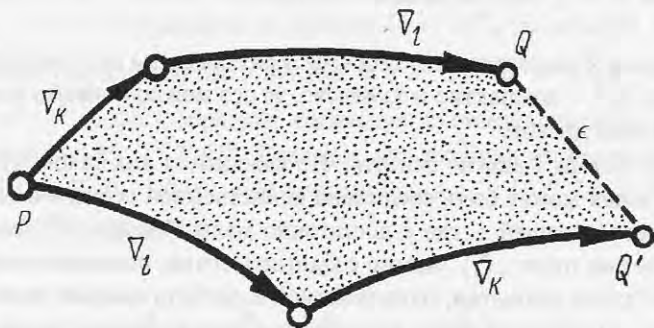


Рис. 33

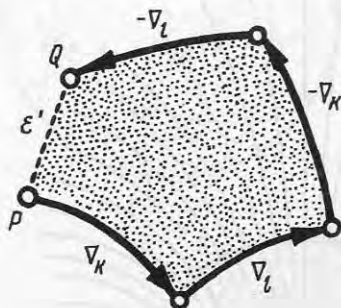


Рис. 34

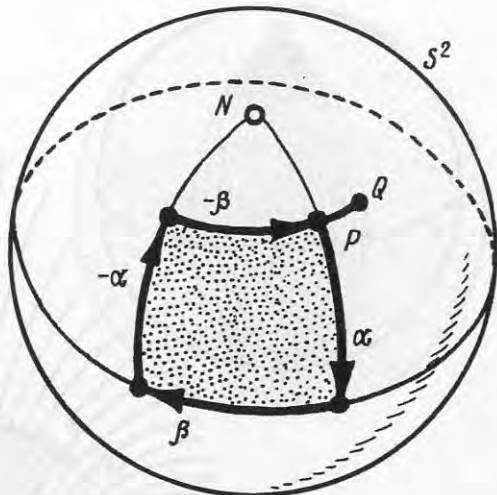


Рис. 35

то этот дифференциальный оператор, вообще говоря, отличен от нуля. Наглядный пример дает  $S^2$ , отнесенная к координатам  $(\theta, \varphi)$  (рис. 35). Здесь  $\pm\alpha$  — смещения вдоль меридианов, а  $\pm\beta$  — смещения вдоль параллелей.

Простые примеры показывают, что характер искривленности может быть различен. Продемонстрируем это на примере  $S^2$  и плоскости Лобачевского  $L^2$ . Рассмотрим на  $S^2$  и на  $L^2$  геодезическую  $\gamma$  и из каждой точки некоторого ее отрезка выпустим ортогональные ей геодезические. Проследим за поведением этого пучка ортогональных к  $\gamma$  траекторий. На рис. 36 изображена качественная картина. На  $S^2$  пучок собирается (по обоим направлениям своего распространения) в две точки: северный и южный полюсы. На  $L^2$  пучок «расходится» и расстояние между крайними геодезическими возрастает до бесконечности. На рис. 37 видно, что разбегание геодезических на  $L^2$  имеет место в обе стороны от отрезка  $AB$ , так как длины дуг  $CD$  и  $RT$  равны бесконечности. Различное поведение геодезических на  $S^2$  и  $L^2$  видно также на примере пучка геодезических, выпущенных из одной точки (рис. 38). Напомним, что  $S^2$  и  $L^2$  имеют различную гауссову кривизну:  $S^2$  — постоянную положительную, а  $L^2$  — постоянную отрицательную. Вскоре мы покажем, что гауссова кривизна (для  $M^2$ ) тесно связана со свойствами оператора  $\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k$ , измеряющего «искривленность»  $M^2$ .

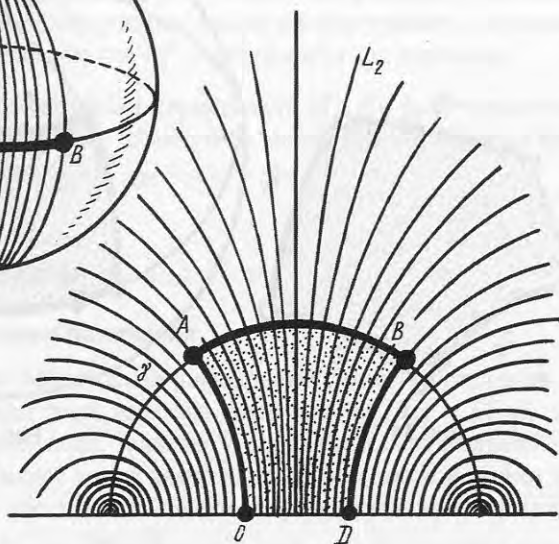
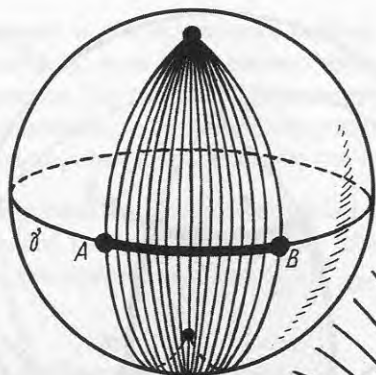


Рис. 36

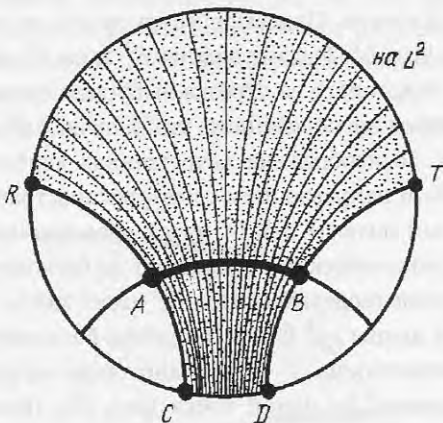
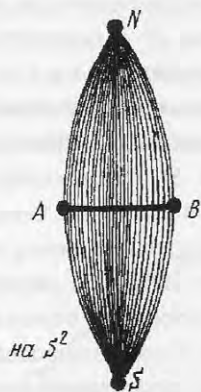


Рис. 37

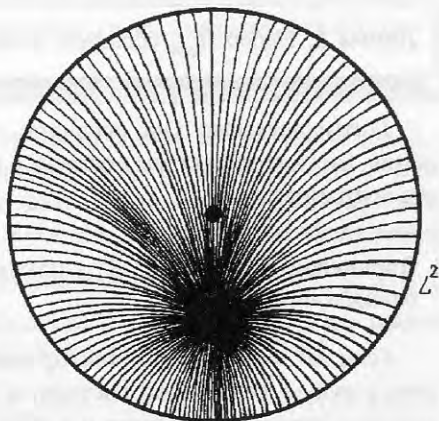
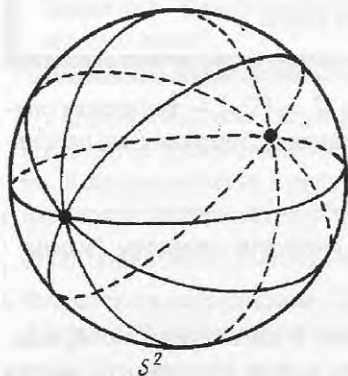


Рис. 38

## 10.2. Координатное определение тензора кривизны

Пусть  $M^n$  отнесено к локальным координатам  $x^1, \dots, x^n$  в окрестности точки  $P$ ; рассмотрим  $\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k$  и применим его к полю  $\mathbf{T} = \{T^i\}$ . Связность  $\nabla$  — симметрична; подсчет дает:

$$\begin{aligned} \nabla_l T^i &= \frac{\partial T^i}{\partial x^l} + T^p \Gamma_{pl}^i; \\ \nabla_k \nabla_l (T^i) &= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial T^p}{\partial x^k} \Gamma_{pl}^i + T^p \frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{pl}^i) + \nabla_l (T^p) \Gamma_{pk}^i - \\ &- \nabla_p (T^i) \Gamma_{kl}^p = \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial T^p}{\partial x^k} \Gamma_{pl}^i + T^p \frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{pl}^i) + \frac{\partial T^p}{\partial x^l} \Gamma_{pk}^i + \\ &+ T^q \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \frac{\partial T^i}{\partial x^p} \Gamma_{kl}^p - T^q \Gamma_{qp}^i \Gamma_{kl}^p; \\ (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i &= T^p \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{pl}^i - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{pk}^i \right) - \\ &- (\Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p) \frac{\partial T^i}{\partial x^p} + T^q (\Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{pl}^i - \Gamma_{qp}^i \Gamma_{kl}^p + \Gamma_{qp}^i \Gamma_{kl}^p). \end{aligned}$$

Так как  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ , то:

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = T^q \left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ql}^i - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{qk}^i + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{pl}^i \right] = T^q R_{q,kl}^i;$$

где

$$R_{q,kl}^i = \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{pl}^i.$$



**Лемма 1.** Набор  $R_{q,kl}^i$  образует тензор 4-го ранга.

*Доказательство.* Оно очевидно, так как  $\nabla = \{\nabla_k\}$  — тензорная операция. Ниже этот факт мы докажем в инвариантных терминах, не используя координат.  $\square$

**Определение 1.** Тензор  $R_{q,kl}^i$  называется *тензором кривизны Римана* данной связности  $\nabla$ .

Если  $M^n = \mathbf{R}^n$ , то этот тензор равен нулю. В самом деле, он обращается в нуль в декартовой системе, а потому, в силу тензорности закона преобразования, равен нулю и в любой другой системе. Существуют  $M^n$ , где  $R_{j,kl}^i$  отличен от нуля (см. ниже). Напомним, что координаты — евклидовы для данной связности, если  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$  в этих координатах. Отсюда следует:

**Лемма 2.** Пусть  $M^n$  снабжено симметричной аффинной связностью. Если тензор кривизны Римана этой связности отличен от нуля (в какой-то системе координат), то на  $M^n$  нельзя ввести евклидовы координаты (в окрестности точки).

Если бы такие координаты нашлись, то в них аннулировались бы  $\Gamma_{jk}^i$ , а потому тензор кривизны также обратился бы в нуль. Итак, тензор кривизны описывает препятствие к введению евклидовых координат (для данной связности).