

Лекция 9

9.3. Геодезические

Определение 4. Пусть M^n снабжено аффинной связностью (наличие метрики не предполагается). Гладкая кривая $\gamma(t)$ называется *геодезической в данной связности* ∇ , если $\nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) = 0$, где $\dot{\gamma}$ — векторное поле скорости траектории $\gamma(t)$.

Иными словами, геодезическая — это такая траектория, вдоль которой параллельный перенос ее вектора скорости порождает все поле скоростей: вектор скорости переходит в вектор скорости, оставаясь касательным к траектории. Выведем уравнение геодезических.

Имеем:

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) = \left\{ \frac{dx^k}{dt} \left(\nabla_k \frac{dx^i}{dt} \right) = 0 \right\}; \quad \text{если } T^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad (\Gamma)$$

то $\frac{dT^i}{dt} + T^\alpha T^k \Gamma_{\alpha k}^i = 0$, или $\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\alpha k}^i \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$.

Уравнения (Γ) называются *уравнениями геодезических*. Их решения — это наборы функций $x^1(t), \dots, x^n(t)$, задающие траекторию $\gamma(t)$ — геодезическую. Система (Γ) — это система n уравнений второго порядка в обыкновенных производных; ее решение однозначно определяется заданием начальных данных: $x^i(0) = P^i$, где $P = (P^1, \dots, P^n)$; $\frac{dx^i(0)}{dt} = a^i$, $\mathbf{a} \in T_P M^n$; (итого — $2n$ постоянных: n постоянных определяют положение точки P , через которую проходит решение, а другие n постоянных определяют вектор скорости в этой точке). Из известных теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует утверждение 1.

Утверждение 1. Пусть $P \in M^n$, и $\mathbf{a} \in T_P M^n$. Тогда существует и единственна геодезическая $\gamma(t)$, такая, что $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{a}$.

Доказательство. Введем координаты x^1, \dots, x^n в окрестности P ; тогда нахождение геодезической сводится к задаче нахождения решения

системы (Г); существование и единственность решения гарантируется теоремами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. \square

Следствие 1. Две геодезические, коснувшиеся друг друга в некоторой точке, совпадают.

Рассмотрим риманово M^n и риманову связность ∇ . Рассмотрим геодезические, порожденные ∇ , и изучим перенос вдоль геодезических. Пусть γ — геодезическая, $\dot{\gamma}$ — поле скоростей, \mathbf{T} — векторное поле, параллельное вдоль γ . Тогда в каждой точке $\gamma(t)$ можно определить число:

$$\cos \alpha(t) = \frac{\langle \mathbf{T}, \dot{\gamma} \rangle}{|\mathbf{T}| \cdot |\dot{\gamma}|}, \text{ где } \alpha(t) \text{ — угол между векторами } \mathbf{T} \text{ и } \dot{\gamma}.$$

Лемма 1. При параллельном переносе вектора \mathbf{T} вдоль геодезической γ угол α сохраняется: $\alpha(t) \equiv \text{const}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 сохраняются все попарные скалярные произведения, т. е. в тождестве $\langle \mathbf{T}, \dot{\gamma} \rangle = |\mathbf{T}| |\dot{\gamma}| \cdot \cos \alpha(t)$ сохраняются как левая часть, так и модули $|\mathbf{T}|$, $|\dot{\gamma}|$. \square

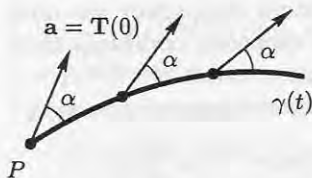


Рис. 16

В многомерном случае этого недостаточно, чтобы однозначно задать параллельный перенос вдоль геодезической, однако для M^2 из леммы 1 получаем: пусть γ — геодезическая и $\mathbf{a} \in T_P M^2$ (рис. 16); тогда параллельное поле $\mathbf{T}(t)$, такое, что $\mathbf{T}(0) = \mathbf{a}$, образовано векторами $\mathbf{T}(t)$, имеющими ту же длину, что и $\mathbf{a} = \mathbf{T}(0)$ и образующими с вектором

$\dot{\gamma}(t)$ один и тот же угол α , равный углу между \mathbf{a} и $\dot{\gamma}(0)$. Поскольку параллельный перенос вдоль геодезических уже определен, то можно определить параллельный перенос вдоль любой кусочно-гладкой кривой γ . Для этого следует аппроксимировать γ ломаной геодезической (составленной из гладких геодезических отрезков), а затем осуществлять перенос вдоль каждого из гладких отрезков, используя свойство постоянства угла. При параллельном переносе вдоль траектории, не являющейся геодезической, угол, образуемый переносимым вектором с вектором скорости траектории, будет, вообще говоря, переменным. Рассмотрим теперь примеры.

Пример 1. Если $M^2 = \mathbf{R}^2$, то параллельный перенос вдоль гладкой кривой осуществляется по обычному правилу: параллельное поле имеет постоянные компоненты относительно декартовой системы координат.

Пример 2. Пусть M^2 — прямой круговой конус в \mathbf{R}^3 с углом при вершине, равным θ (рис. 17).

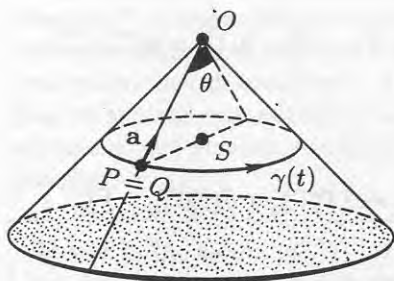


Рис. 17

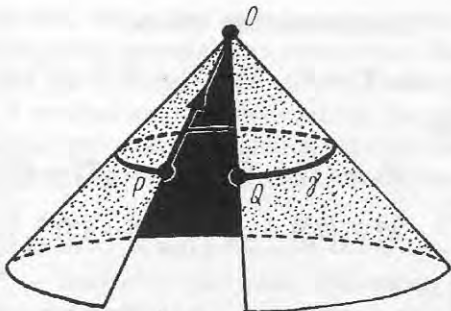


Рис. 17 а

Будем считать, что вершина «выколота», чтобы иметь дело с гладким подмногообразием в \mathbf{R}^3 . Пусть $\gamma(t)$ — сечение конуса плоскостью, ортогональной оси; пусть $OP = r$, $\mathbf{a} \in T_P M^2$ направлен в вершину конуса. Осуществим параллельный перенос этого вектора вдоль $\gamma(t)$ до возвращения обратно в P , и найдем, на какой угол повернется \mathbf{a} после этой операции. Используем связность, согласованную с индуцированной метрикой на конусе.

Так как эта метрика евклидова, то конус можно развернуть на плоскость, разрезав его вдоль образующей (рис. 17 а).

Достаточно найти поворот \mathbf{a} при его параллельном переносе на \mathbf{R}^2 вдоль γ (рис. 18). Имеем: $PS = r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, длина $\gamma(t) = 2\pi \cdot PS = 2\pi r \sin\frac{\theta}{2}$;

длина PQ (пунктирная дуга) $= 2\pi r - 2\pi r \sin\frac{\theta}{2} = 2\pi r \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right) = r \cdot \varphi$, т. е.

$\varphi = 2\pi \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)$. Итак, угол поворота φ равен $2\pi \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)$. Здесь мы

использовали то, что $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$. Для M^2 , метрика которого не евклидова, вычисления усложняются и требуют подсчета символов Кристоффеля. Обсудим геометрический смысл этих коэффициентов с точки зрения операции параллельного переноса. Найдем $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)$, где ∂_α и ∂_β — координатные векторные поля, в координатах x^1, \dots, x^n на M^n . Тензор $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)$ снова — векторное поле.

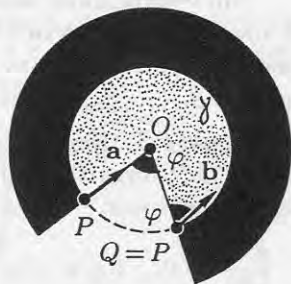


Рис. 18

Лемма 2. *Имеет место тождество $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta) = \Gamma_{\beta\alpha}^k \partial_k$.*

Доказательство. Имеем:

$$\Delta_X(\mathbf{Y}) = \mathbf{Z}; \quad \nabla_X(Y^i) = X^\alpha \nabla_\alpha(Y^i) = Z^i; \quad [\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)]^k = a_\alpha^q \nabla_q(T_\beta^k),$$

где

$$\partial_\alpha = \{a_\alpha^q = \delta_\alpha^q\}; \quad \partial_\beta = \{T_\beta^k = \delta_\beta^k\};$$

$$a_\alpha^q \nabla_q(T_\beta^k) = a_\alpha^q \left(\frac{\partial}{\partial x^q} T_\beta^k + T_\beta^\omega \Gamma_{\omega q}^k \right) = a_\alpha^q T_\beta^\omega \Gamma_{\omega q}^k = \delta_\alpha^q \delta_\beta^\omega \Gamma_{\omega q}^k = \Gamma_{\beta\alpha}^k;$$

т. е.

$$\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta) = \Gamma_{\beta\alpha}^k \partial_k.$$

Лемма доказана. □

Это утверждение можно понимать так: рассмотрим репер $\partial_1, \dots, \partial_n$ в точке P и осуществим бесконечно малый перенос вектора в направлении ∂_β ; при этом ∂_β как-то «повернется», и коэффициенты его разложения по $\partial_1, \dots, \partial_n$ как раз и равны $\Gamma_{\beta\alpha}^k$.

Пример 3. Пусть $M^n = \mathbf{R}^n$, отнесенное к декартовым координатам x^1, \dots, x^n ; тогда $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ (связность — риманова). Уравнения геодезических имеют вид:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} \equiv 0, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad \text{т. е. } x^\alpha = a^\alpha t + b^\alpha, \quad \text{где } \{a^\alpha, b^\alpha\} = \text{const.}$$

Итак, геодезические — прямые линии и только они.

Пример 4. Пусть $M^2 = S^2$ в стандартной метрике. Выберем на S^2 сферические координаты (θ, φ) , в которых: $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$; здесь северный полюс задается так: $\theta = 0$. Для определения геодезических следует найти Γ_{jk}^i . Так как $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$, то имеем (проверьте!):

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \sin 2\theta; \quad \Gamma_{12}^2 = \text{ctg } \theta; \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \text{ для всех остальных наборов индексов } (i, j, k); \text{ здесь } x^1 = \theta, x^2 = \varphi; g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = \sin^2 \theta.$$

Отсюда, уравнения геодезических имеют вид: $\frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0,$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \text{ctg } \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0. \text{ Одно из решений имеет вид: } \varphi = \text{const}, \theta = t.$$

Это решение — меридиан, выходящий из северного полюса. Итак, одно из плоских сечений сферы плоскостью, проходящей через центр, является геодезической при выборе параметра $\theta = t$ — длина дуги.

Предложение 1. Пусть S^2 снабжена стандартной метрикой. Тогда геодезическими римановой связности являются все плоские сечения сферы (через ее центр) и только они.

Доказательство. Сначала докажем, что любое центральное плоское сечение S^2 — геодезическая (относительно натурального параметра). Для одного меридиана γ_0 этот факт был уже установлен (см. выше). Рассмотрим произвольный «экватор» γ , т. е. плоское центральное сечение. Так как каждый экватор однозначно задается ортогональной прямой к плоскости, определяющей экватор, то всегда существует такое вращение, которое переведет γ в γ_0 . \square

Лемма 3. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ — изометрия риманова многообразия M^n ; γ — геодезическая римановой связности. Тогда образ γ при изометрии f — также является геодезической.

Доказательство. Ясно, что изометрия сохраняет риманову связность, а потому сохраняет и уравнения геодезических, т. е. f переводит решение системы снова в решение системы, что и требовалось.

Возвращаясь к доказательству Предложения 1, получаем, что γ — геодезическая. Обратное: пусть γ — геодезическая на S^2 . Рассмотрим в произвольной точке γ ее вектор скорости $\dot{\gamma}$ и проведем через эту точку в направлении вектора экватор (через любую точку S^2 в любом направлении проходит один и только один экватор) (рис. 19). Так как γ и экватор — решения одной и той же системы, и так как эти решения касаются, то они совпадают. \square

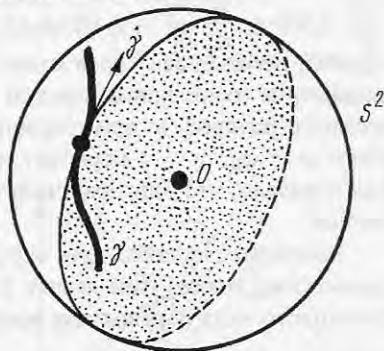


Рис. 19

Пример 5. Пусть $M^2 = L^2$ — плоскость Лобачевского, отнесенная к стандартной метрике $ds^2 = d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi d\varphi^2$. Найдем геодезические римановой связности. Такой вид метрика принимает в полярных координатах (χ, φ) , обслуживающих двумерную плоскость; рассмотрим модель Пуанкаре с метрикой $(1 - r^2)^{-2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$.

Предложение 2. Геодезическими плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре являются все дуги окружностей, выходящих на абсолют под прямым углом (в частности, все диаметры), и только они.

Найдем уравнения геодезических. Так как метрика L^2 получается из метрики S^2 заменой тригонометрических функций на гиперболические, то: $\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \text{sh}(2\chi)$; $\Gamma_{12}^2 = \text{cth} \chi$; $\Gamma_{jk}^i = 0$ для всех остальных ин-

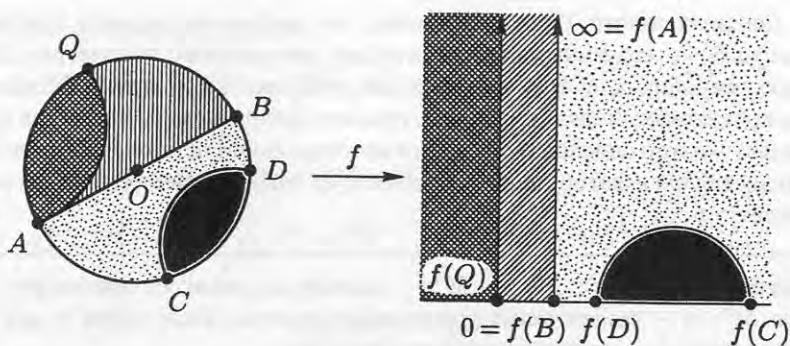


Рис. 20

дексов (i, j, k) ; здесь $x^1 = \chi$, $x^2 = \varphi$. Отсюда $\frac{d^2\chi}{dt^2} - \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2\chi) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \operatorname{cth} \chi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\chi}{dt} = 0$. Одно из решений имеет вид: $\varphi = \text{const}$, $\chi = t$ — прямая, проходящая через точку 0 на плоскости. Так как (χ, φ) «обслуживают» в то же время правую полость гиперболоида — псевдосферы мнимого радиуса, то при стереографической проекции прямая с уравнением $\varphi = \varphi_0$, $\chi = t$ перейдет в один из диаметров единичного круга. Мы доказали, что один из диаметров γ_0 на модели Пуанкаре — геодезическая.

Докажем, что любая дуга окружности, ортогональная абсолюту — геодезическая. Используем лемму 3: надо доказать, что любая окружность указанного вида переводится изометрией в γ_0 . Для этого перейдем к модели на верхней полуплоскости с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Напомним, что существует дробно-линейное преобразование, переводящее единичный круг в верхнюю полуплоскость, — изометрия. При этом граница круга переходит в вещественную ось, диаметр γ_0 — в прямую, ортогональную вещественной оси (рис. 20). Можно считать, что ось OY на верхней полуплоскости является геодезической, поскольку она — образ диаметра γ_0 при изометрии. Итак, любая прямая, ортогональная вещественной оси, — геодезическая, так как сдвиг $z \rightarrow z + \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, — изометрия. Отсюда следует, что любая дуга окружности, выходящая под прямым углом на ось OX , — геодезическая, так как может быть переведена в ось OY дробно-линейным преобразованием: сначала сдвиг $z \rightarrow z + \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, затем $z \rightarrow \frac{-z}{z - a}$, $a \in \mathbf{R}$ (рис. 21). Доказано, что все прямые, ортогональные вещественной оси, и все дуги окружностей, встречающих ось OX под прямым углом, — геодезические. Пусть теперь γ — произвольная геодези-

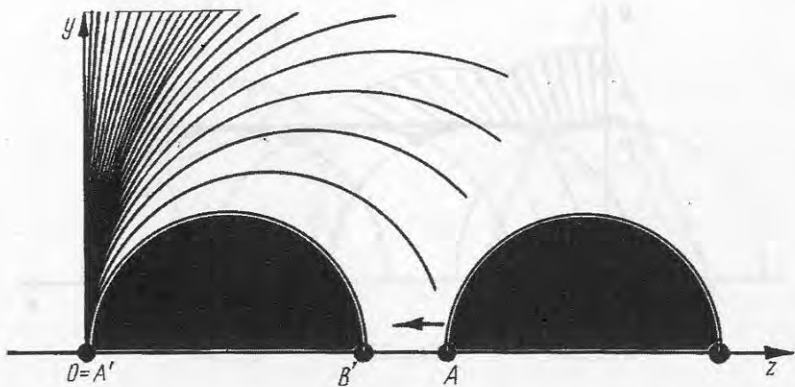


Рис. 21

ческая (на верхней полуплоскости); надо доказать, что она совпадает либо с прямой, ортогональной оси OX , либо с окружностью, ортогональной абсолюту. Возьмем на γ точку P и рассмотрим вектор $\dot{\gamma}$. Проведем через P дугу окружности, встречающую абсолют под прямым углом и имеющую тот же вектор скорости (рис. 22). Как мы уже знаем, γ совпадает с этой дугой.

В качестве приложения изучим, как параллельно переносится вектор на плоскости Лобачевского вдоль траектории $\gamma(t)$, задаваемой на верхней полуплоскости уравнением $y = y_0 = \text{const}$, т. е. γ — прямая, параллельная оси OX . Эта траектория не геодезическая, а потому параллельный перенос вдоль нее не сохраняет касательное поле скоростей. Аппроксимируем γ ломаной геодезической (рис. 23). Качественная картина параллельного переноса **a** показана на рис. 24. Переносимый вектор **a** вращается вокруг своего начала.

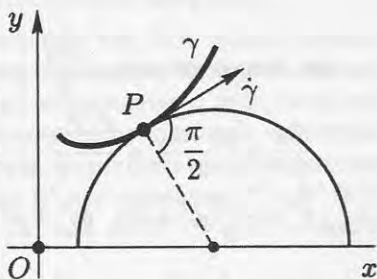


Рис. 22

Замечание. Геодезические на плоскости Лобачевского можно найти по-иному, в явном виде проинтегрировав уравнения геодезических. Это удобно выполнить на верхней полуплоскости. Символы Кристоффеля имеют вид (проверьте!): $\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{y}$; $\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{y}$; $\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{y}$; остальные равны нулю. Уравне-

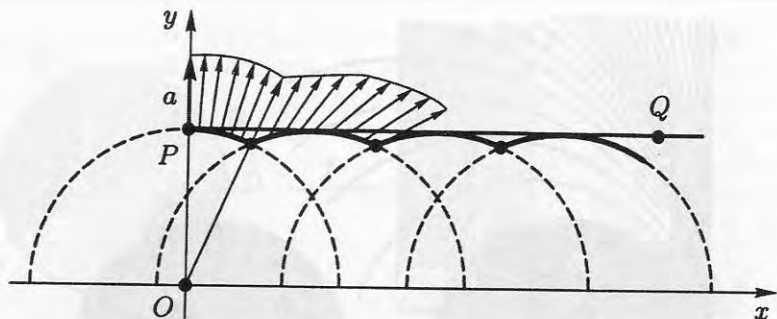


Рис. 23

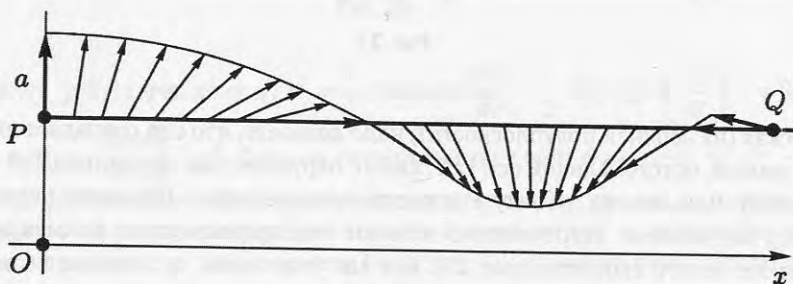


Рис. 24

ния геодезических $\ddot{x} = \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y}$, $\ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}$. Отсюда:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}x - \dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{\frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y} \cdot x - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3} = -\frac{1}{y} \left(\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} + 1 \right) = -\frac{1}{y} (y_x'^2 + 1);$$

$$y'' = -\frac{1}{y} (y_x'^2 + 1); \quad yy'' + y'^2 = -1; \quad (yy')' = -1;$$

$$yy' = -x + C; \quad ydy = (-x + C) dx; \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + Cx + \frac{D}{2};$$

$$x^2 - 2Cx + y^2 = D; \quad (x - C)^2 + y^2 = C^2 + D.$$

Было предположено, что $\dot{x} \neq 0$. Если же $\dot{x} = 0$, то это дает прямые, ортогональные вещественной оси. Если $\dot{x} \neq 0$, то получаем, очевидно, окружности, ортогональные абсолюту.

Задача 1. Осуществить параллельный перенос вектора \mathbf{a} вдоль плоского (не центрального) сечения S^2 (рис. 25).

Замечание. Сформулированная задача может быть решена при помощи теоремы, имеющей самостоятельный интерес. Рассмотрим в \mathbf{R}^3 две поверхности, M^2 и P^2 , касающиеся друг друга вдоль гладкой кривой γ . Объемлющая евклидова метрика индуцирует на M и P римановы метрики. Рассмотрим

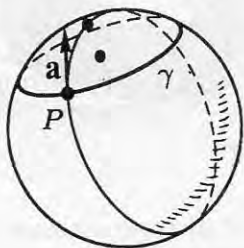


Рис. 25

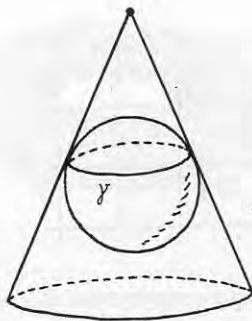


Рис. 25 а

соответствующие аффинные связности $\nabla(M^2)$ и $\nabla(P^2)$. Тогда, оказывается, параллельные переносы касательных векторов вдоль кривой γ , порожденные связностями $\nabla(M)$ и $\nabla(P)$, совпадают. Доказательство этого факта мы опускаем.

В качестве примера вернемся к задаче параллельного переноса на сфере (рис. 25). Рассмотрим конус, касающийся сферы вдоль кривой γ (рис. 25 а). Получаем две поверхности: M^2 — сфера, P^2 — конус, касающиеся друг друга вдоль кривой γ . Следовательно, параллельный перенос касательного вектора к сфере вдоль γ совпадает с его параллельным переносом на конусе. А эта последняя задача уже была решена нами выше.

Пример 6. Пусть $M^2 = T^2$ — двумерный тор. Его можно превратить в риманово многообразие с локально евклидовой метрикой. Введем на каждой из окружностей $S^1(\varphi)$ и $S^1(\psi)$ координаты φ и ψ ; тогда координаты (φ, ψ) , $0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi$ будут координатами на торе, в которых метрика примет вид: $d\varphi^2 + d\psi^2$. Эта метрика может быть представлена как индуцированная евклидовой метрикой из \mathbf{R}^4 при вложении T^2 в $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{C}^2$ по формуле: $(\varphi, \psi) \rightarrow (e^{i\varphi}, e^{i\psi}) \in \mathbf{C}^2$. Так как $ds(\mathbf{R}^4) = dzd\bar{z} + dwd\bar{w}$, то $ds^2(T^2) = d\varphi^2 + d\psi^2$.

Итак, поскольку в евклидовой метрике $\Gamma_{jk}^i = 0$, то геодезические на торе — это образы прямых на плоскости $\mathbf{R}^2(\varphi, \psi)$ при факторизации $f: \mathbf{R}^2(\varphi, \psi) \rightarrow T^2(\varphi, \psi)$, $f(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) \bmod 2\pi$, т. е. $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (рис. 26). Других геодезических на торе нет. Геодезические разбиваются на два класса: замкнутые и незамкнутые. Геодезические на торе удобно изображать прямыми на $\mathbf{R}^2(\varphi, \psi)$ с отмеченной решеткой $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = (2\pi m, 2\pi n)$; $m, n \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим пучок прямых, выходящих из точки 0 на $\mathbf{R}^2(\varphi, \psi)$ и выясним: какие геодезические являются образами этих прямых. Ясно, что геодезическая, проходящая на торе через точку $(0, 0)$, замкнута тогда и только тогда, когда соответствующая ей прямая-прообраз встречает какую-либо «целую» точку: $(2\pi m, 2\pi n)$; $m, n \in \mathbf{Z}$. Отсюда: геодезическая

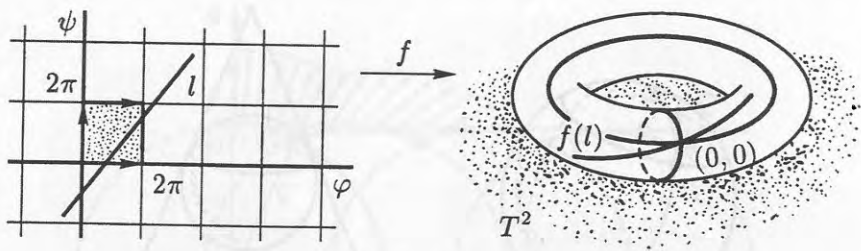


Рис. 26

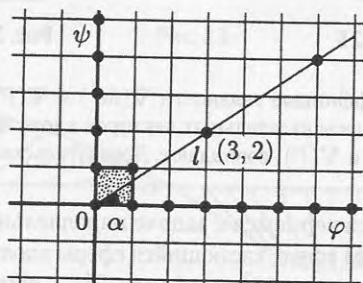


Рис. 27

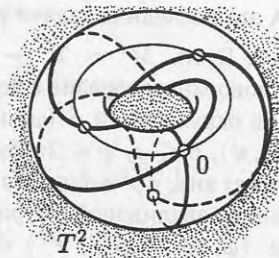
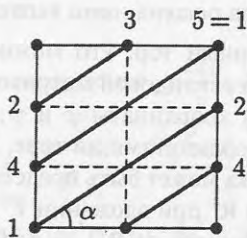


Рис. 28

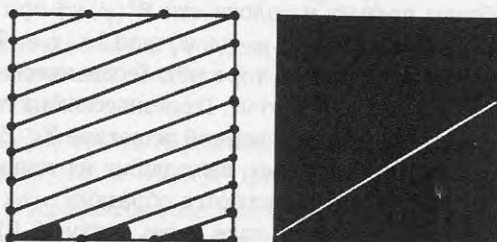


Рис. 29

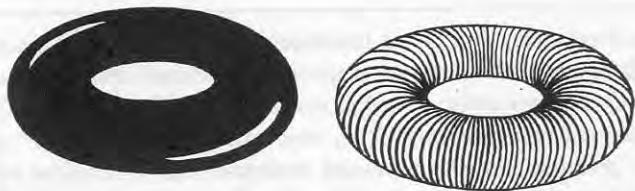


Рис. 30

на T^2 , проходящая через $(0, 0)$, незамкнута (гомеоморфна прямой) тогда и только тогда, когда соответствующая прямая не содержит «целых» точек, кроме точки $(0, 0)$. Выразим это в терминах тангенса угла наклона прямой к оси OX : геодезическая замкнута тогда и только тогда (гомеоморфна окружности), когда $\operatorname{tg} \alpha = X/Y$ (где $\mathbf{l} = (X, Y)$ — направляющий вектор прямой l (рис. 27)) — рационален; следовательно, геодезическая незамкнута, если $\operatorname{tg} \alpha$ иррационален. На рис. 27 показана прямая, проходящая через точку $(2\pi \cdot 3, 2\pi \cdot 2)$; после факторизации мы получим на квадрате $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \psi \leq 2\pi$ набор отрезков-образов этой прямой (рис. 28). На рис. 28 показана также траектория, возникающая на торе после склейки фундаментального многоугольника в соответствии с действием группы $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. На рис. 29 показана геодезическая, где $\operatorname{tg} \alpha = n/m$ (рационален) и геодезическая с иррациональным тангенсом. В последнем случае отрезки прямой всюду плотны на квадрате (сколь угодно близко от любой точки проходит отрезок прямой l после ее факторизации). Получающаяся траектория на торе порождает иррациональную обмотку тора — замыканием этой траектории является весь тор (рис. 30).

9.4. Общие свойства геодезических

Сформулируем теорему, в которой соберем как уже известные нам свойства геодезических, так и другие, некоторые из которых мы здесь доказывать не будем.

Теорема 2. Пусть на гладком многообразии M^n задана аффинная связность ∇ (наличие римановой метрики пока не предполагается). Тогда:

- 1) Из любой точки $P \in M^n$ в направлении любого касательного вектора $\mathbf{a} \in T_P M^n$ выходит ровно одна геодезическая $\gamma(t)$ такая, что $\gamma(0) = P$ и $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{a}$.
- 2) При фиксированных начальных данных (точка P и вектор \mathbf{a}) параметр t на геодезической $\gamma(t)$ (где $\gamma(0) = P$ и $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{a}$) определяется однозначно.

- 3) Если две точки, P и Q , на римановом M^n достаточно близки, то существует и единственна «короткая» геодезическая, соединяющая P и Q . Более точно: у любой точки $x \in M^n$ существует такая открытая окрестность $U(x)$, что любая пара точек P и Q из $U(x)$ соединяется единственной геодезической γ , целиком лежащей в $U(x)$ (рис. 30 а).
- 4) (Теорема Хопфа—Ринова.) На компактном связном замкнутом гладком многообразии любая пара точек соединяется геодезической (быть может, не единственной).
- 5) Пусть многообразие M^n риманово и связность ∇ симметрична и согласована с метрикой. Тогда параметр t на геодезической с начальными данными $\gamma(0) = P$ и $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{a}$, где $|\mathbf{a}| = 1$, совпадает с натуральным параметром s (длина дуги), отсчитываемым от точки P .
- 6) На римановом многообразии геодезические являются локально минимальными кривыми. То есть для любых двух достаточно близких точек P и Q на γ «короткий» отрезок геодезической γ , соединяющий точки P и Q , имеет наименьшую длину в классе всех гладких кривых, соединяющих точки P и Q .

Замечание.

- 1) В теореме Хопфа—Ринова (см. пункт 4) нельзя отказаться от компактности многообразия M^n . На рис. 30 б показан пример: две точки P и Q на $M^2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{\text{точка}\}$ (плоскость с выброшенной точкой) нельзя соединить геодезической. Дело в том, что на плоскости геодезические — это прямые линии. Если точка выброшена на прямой, проходящей через точки P и Q , то на $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{\text{точка}\}$ все кривые, соединяющие P и Q , не являются геодезическими.
- 2) На компактном многообразии точки P и Q могут иногда соединяться многими различными геодезическими, например северный и южный полюсы сферы S^n (рис. 30 в). Здесь таких геодезических бесконечно много.
- 3) Кроме единственной «короткой» геодезической, соединяющей близкие точки P и Q , могут существовать «длинные» геодезические, соединяющие P и Q , и выходящие из пределов малой окрестности точек P и Q (рис. 30 г, где показаны геодезические на сфере).
- 4) Пункт 3 теоремы мы докажем ниже: см. лемму 4.

Применим геодезические к конкретным геометрическим вопросам.



Рис. 30 а



Рис. 30 б

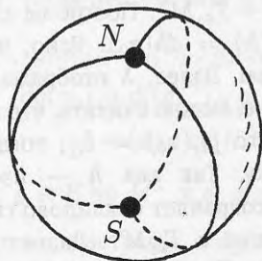


Рис. 30 в



Рис. 30 г