Лекция 8

7.2. Аксиоматическое задание ковариантного дифференцирования

Связность, введенная нами в $\mathbf{R}^n$, была симметричной; это следует из формул, задающих ∇ в терминах частных производных. На произвольном M^n символы Кристоффеля уже не обязаны иметь вид вторых частных производных от координат — такая формула возникает тогда, когда на M^n существуют локально евклидовы координаты. Если фиксирована система координат, то ∇ представляется в виде совокупности операций ∇_k — ковариантных дифференцирований по отдельным координатам $\left(\text{аналоги частных дифференцирований } \dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)$.

Предложение 1. *Ковариантное дифференцирование* (*связность*) ∇ *удовлетворяет соотношениям:*

1) *операция* $\nabla = \{\nabla_k\}$ — *линейна;*
2) *для произвольного тензорного поля* $T^{(i)}_{(j)}$ *набор функций* $\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = (\nabla T)^{(i)}_{k;(j)}$ *образует тензорное поле;*
3) *если тензорное поле — скалярное (т. е. гладкая функция* f *на* M^n*), то:*
$$\nabla f = \{\nabla_k f\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^k}\right\} = \operatorname{grad} f;$$
4) *операция* ∇ *на векторных полях* T^i *имеет вид:*
$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha k}.$$
Операция ∇ *на ковекторных полях* T_i *имеет вид:*
$$\nabla_k T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_\alpha \Gamma^\alpha_{ik};$$
5) *операция* ∇ *удовлетворяет формуле Лейбница:*
$$\nabla_k\big\{T^{(i)}_{(j)} \cdot P^{(\alpha)}_{(\beta)}\big\} = \big(\nabla_k T^{(i)}_{(j)}\big) \cdot P^{(\alpha)}_{(\beta)} + T^{(i)}_{(j)} \cdot \big(\nabla_k P^{(\alpha)}_{(\beta)}\big),$$
где $T^{(i)}_{(j)}$ *и* $P^{(\alpha)}_{(\beta)}$ — *произвольные тензорные поля.*

Доказательство. Свойства 1)–4) сразу следуют из определения ∇. Осталось доказать 5). Рассмотрим простейший случай: одно из полей $T^{(i)}_{(j)}$, $P^{(\alpha)}_{(\beta)}$ — скалярное. Тогда 5) вытекает из формулы Лейбница для скалярных функций. Пусть теперь поля T и P — векторные поля T^i, P^j. Имеем:

$$\nabla_k(T^i \cdot P^j) = \frac{\partial}{\partial x^k}(T^i \cdot P^j) + T^\alpha P^j \Gamma^i_{\alpha k} + T^i P^\alpha \Gamma^j_{\alpha k} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} T^i\right) P^j + T^i \frac{\partial}{\partial x^k}(P^j) + T^\alpha P^j \Gamma^i_{\alpha k} + T^i P^\alpha \Gamma^j_{\alpha k} =$$

$$= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha k}\right) P^j + T^i \left(\frac{\partial P^j}{\partial x^k} + P^\alpha \Gamma^j_{\alpha k}\right) = (\nabla_k T^i) P^j + T^i (\nabla_k P^j).$$

Доказательство для произвольных полей P и T является повторением предыдущего рассуждения после замены индексов i, j на мультииндексы (i), (j) и применением формулы, определяющей ∇. Выписывание формул оставляем читателю как обязательное упражнение. $\square$

Теорема 2. *Пусть на M^n задана операция $\nabla = \{\nabla_k\}$, удовлетворяющая* 1–5 *(см. Предложение 1). Тогда для произвольного тензорного поля $T^{(i)}_{(j)}$ имеет место тождество:*

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \nabla_k T^{i_1\ldots i_\alpha}_{j_1\ldots j_p} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}(T^{i_1\ldots i_\alpha}_{j_1\ldots j_p}) + \sum_{q=1}^{\alpha} T^{i_1\ldots;i_q=r;\ldots i_\alpha}_{j_1\ldots j_p} \Gamma^{i_q}_{rk} - \sum_{s=1}^{p} T^{i_1\ldots i_\alpha}_{j_1\ldots;j_s=\omega;\ldots j_p} \Gamma^{\omega}_{j_s k},$$

т. е. ∇ — ковариантное дифференцирование в смысле нашего определения (см. выше). Алгебраические свойства 1)–5) *однозначно задают операцию ∇, т. е. ее можно вводить аксиоматически с помощью свойств* 1)–5).

Доказательство. Действие ∇ на скалярных функциях и на тензорах ранга 1 задано согласно 1)–4). Осталось найти ∇_k на тензорах произвольного типа. Докажем лемму: любое тензорное поле разлагается в линейную комбинацию (с гладкими коэффициентами) произведений полей первого ранга. В самом деле, любое тензорное поле есть полилинейное отображение.

$$T = a^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} : (T_*)^q \times (T^*)^k \to \mathbf{R},$$

где $\mathbf{e}_{i_\alpha}$, e^{i_α} — поля 1-го ранга. Это определение инвариантно, и разложение возникает при фиксировании произвольной координатной системы (в другой системе разложение изменится). Здесь $a^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_q}$ — гладкие функции. Фиксируем какую-либо систему $x^1, \ldots, x^n$ и пусть $\{T^{\alpha}_{i_s}\}$ (где i_s — фиксировано) — набор компонент тензора $\mathbf{e}_{i_s}$; соответственно $T^{j_s}_{\beta}$ (где j_s фиксировано) — набор компонент e^{j_s}. Записав T в этой системе, получаем:

$$T = a^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_q} T^{\alpha_1}_{i_1} \ldots T^{\alpha_k}_{i_k} T^{j_1}_{\beta_1} \ldots T^{j_q}_{\beta_q} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}\right) \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_q};$$

т. е.

$$T = T^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_q} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}\right) \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_q},$$

где

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_q} = a^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_q} T^{\alpha_1}_{i_1} \ldots T^{\alpha_k}_{i_k} T^{j_1}_{\beta_1} \ldots T^{j_q}_{\beta_q}.$$

Любое полилинейное отображение полностью определяется коэффициентами относительно базиса. Вернемся к доказательству формулы действия ∇ на $T^{(i)}_{(j)}$. Для простоты рассмотрим случай 2-го ранга (для произвольного поля выкладки аналогичны). В силу линейности ∇ формулу 5) достаточно проверить на мономах $T_{ij} = \alpha(x) T_i P_j$, где $\alpha(x)$ — гладкая функция. Вычислим $\nabla_k(T_{ij})$ в предположении, что $\nabla_k(T_i)$ уже известны (см. 4)). По формуле Лейбница 5) имеем:

$$\begin{aligned}
\nabla_k(T_{ij}) &= \nabla_k(\alpha(x) T_i P_j) = \\
&= \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} T_i P_j + \alpha \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_p \Gamma^p_{ik}\right) P_j + \alpha T_i \left(\frac{\partial P_j}{\partial x^k} - P_q \Gamma^q_{jk}\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}(\alpha T_i P_j) - \alpha \Gamma^p_{ik} T_p P_j - \alpha \Gamma^p_{jk} T_i P_q = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}(T_{ij}) - \Gamma^p_{ik} T_{pj} - \Gamma^q_{jk} T_{iq},
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Определение 4. Пусть ∇ — аффинная связность на M^n. Локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ называются *евклидовыми* для ∇, если в них $\Gamma^i_{jk}(x) = 0$.

Такие координаты могут и не существовать, например, если ∇ не симметрична. В самом деле, если ∇ несимметрична, то Ω^i_{jk} отличен от нуля.

Если бы существовали координаты, в которых $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$, то в этой же системе обратился бы в нуль и Ω^i_{jk}, а тогда он был бы тождественным нулем в любой системе в силу тензорности.

Важно, что понятие ковариантного дифференцирования (т. е. аффинной связности) не использует понятия римановой метрики, мы пользовались только наличием гладкой структуры на M^n. Поэтому, риманова метрика и связность — это две различные структуры на M^n. В частности, евклидовы координаты для аффинной связности и евклидовы координаты для метрики g_{ij} (т. е. такие, в которых $g_{ij} = \delta_{ij}$), это — разные понятия. Итак, в общем случае риманова метрика и ковариантное дифференцирование не определяют друг друга.

Пусть на M^n фиксирована метрика g_{ij}. Тогда из множества всех аффинных симметричных связностей можно выделить одну (и только одну!) связность, «согласованную» с этой метрикой и полностью определяемую ею. Это — важный класс связностей, называемых римановыми связностями.

8. Римановы связности

Пусть g_{ij} — метрика, а $\nabla = \{\Gamma^i_{jk}\}$ — аффинная связность на M^n.

Определение 1. Аффинная симметричная связность $\nabla = \{\Gamma^i_{jk}\}$ называется *согласованной с метрикой* g_{ij} (или называется *римановой связностью*), если $\nabla(g_{ij}) \equiv 0$.

В силу тензорности ∇ тождество $\{\nabla_k(g_{ij}) = 0\}$, оказавшись выполненным в одной системе координат, будет выполнено и во всех других системах. Итак, относительно римановой связности, тензор g_{ij} — «постоянен» в том смысле, что его ковариантная производная равна нулю. Отсюда следует, что для любого тензорного поля $T^{(p)}_{(q)}$ имеем $\nabla_k\big(g_{ij}T^{(p)}_{(q)}\big) \equiv$ $\equiv g_{ij}\nabla_k\big(T^{(p)}_{(q)}\big)$, см. формулу Лейбница 5). В частности, ∇ коммутирует с операцией поднятия и опускания индексов. Докажем существование и единственность римановой связности.

Теорема 1. *Пусть g_{ij} — метрика на M^n. Тогда существует и единственна симметричная аффинная связность, согласованная с g_{ij}, причем:*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right).$$

Доказательство. Предположим, что существование доказано. Покажем единственность связности. Согласно определению: $\nabla_k(g_{ij}) = 0$. Так как ∇ задается Γ^i_{jk}, то достаточно доказать, что из этой системы однозначно находятся Γ^i_{jk} как функции g_{ij} и $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$. Имеем: $\nabla_k g_{ij} = 0$, $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{ik} + g_{\alpha i}\Gamma^\alpha_{jk}$. Циклически переставляя индексы, получаем:

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ - \end{array} \left\{ \begin{array}{l|l} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk} & \quad (ijk) \\ \dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij} & \quad (kij) \\ \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{k;ji} + \Gamma_{j;ki} & \quad (jki) \end{array} \right.$$

где $\Gamma_{i;kj} = g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{kj}$. Складывая первые два тождества и вычитая из суммы третье, получаем:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{i;jk} = 2g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{jk}.$$

(Напомним: $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.) Далее,

$$\Gamma^\alpha_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right).$$

Мы воспользовались правилом решения системы: $g_{\alpha\beta}T^\alpha = Q_\beta$. Так как $g_{\alpha\beta}$ — невырожденный тензор, то существует обратный тензор $g^{\alpha\beta}$, такой, что $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$, отсюда:

$$g^{\beta\gamma}g_{\alpha\beta}T^\alpha = g^{\beta\gamma}Q_\beta; \quad \delta^\gamma_\alpha T^\alpha = g^{\beta\gamma}Q_\beta; \quad T^\alpha = g^{\beta\alpha}Q_\beta.$$

Мы получили формулы, выражающие Γ^α_{jk} через g_{ij} и его производные. Тем самым если решение исходной системы существует, то оно единственно. Для доказательства существования достаточно определить Γ^i_{jk} с помощью полученных выше формул. Повторяя выкладки в обратном порядке, получаем: $\nabla_k(g_{ij}) \equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Пусть на M^n существует система координат $x^1, \ldots, x^n$, в которой $g_{ij} = \delta_{ij}$. Существование такой системы эквивалентно существованию системы, в которой (g_{ij}) становится постоянной матрицей (не зависящей от точки внутри некоторой окрестности). Тогда путем линейной замены можно привести эту матрицу (во всех точках окрестности одновременно) к виду δ_{ij}. Итак, систему координат можно называть евклидовой, если в ней матрица метрического тензора постоянна. Учитывая это замечание, вернемся к анализу римановой связности. Локальная система координат евклидова с точки зрения связности тогда и только тогда, когда в этой системе $\{\Gamma^i_{jk} \equiv 0\}$ (в некоторой окрестности).

Утверждение 1. *Система координат евклидова с точки зрения римановой связности, согласованной с g_{ij}, тогда и только тогда, когда эта система евклидова с точки зрения g_{ij} (т. е. g_{ij} локально постоянен).*

Доказательство. В самом деле, если g_{ij} локально постоянен, то, в силу теоремы 1: $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$, т. е. эта система — евклидова и относительно римановой связности ∇. Обратно: если $\Gamma^i_{jk} = 0$, то в силу теоремы 1: $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{jk} + g_{\alpha i}\Gamma^\alpha_{jk} = 0$, т. е. g_{ij} постоянен в этой системе координат, что и требовалось. □

Рассмотрим гладкую гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, заданную графиком: $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$; Пусть $P_0 \in V^{n-1}$ — произвольная точка. Пусть $T_{P_0}(V^{n-1})$ параллельна плоскости $\mathbf{R}^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1})$, т. е. $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x^i} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Мы уже вычисляли вид g_{ij} в точке P_0 относительно такой специальной системы координат. Имеем: $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}$. Отсюда: $\left.\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_{P_0} = 0$, т. е. $\Gamma^i_{jk}(P_0) = 0$, где ∇ — риманова связность, согласованная с g_{ij}. Равенство нулю Γ^i_{jk} обеспечивается, вообще говоря, только в точке P_0, в ее окрестности Γ^i_{jk} уже не обязаны быть нулевыми.

9. Параллельный перенос. Геодезические

9.1. Предварительные замечания

Рассмотрим гладкое многообразие (не обязательно риманово). Во многих конкретных задачах возникает проблема сравнения векторов, приложенных к различным точкам; например, требуется сравнить два касательных вектора, расположенных в разных касательных пространствах. В случае произвольного M^n эта задача сравнения сложна по той причине, что T_xM^n и T_yM^n различны и существует много способов их отождествления. В некоторых частных случаях, например, когда $M^n = \mathbf{R}^n$, возникает естественная операция параллельного переноса, позволяющая сравнивать векторы, приложенные в разных точках. Формально эту процедуру (для $M^n = \mathbf{R}^n$) можно определить так. Рассмотрим пару точек P и Q и пусть $\mathbf{a}$ — вектор в точке P; рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t)$, такую, что $\gamma(0) = P$ и $\gamma(1) = Q$; осуществим параллельный перенос $\mathbf{a}$ вдоль $\gamma(t)$ так, чтобы начало вектора скользило по $\gamma(t)$, и $\mathbf{a}$ переносился бы вдоль γ, оставаясь параллельным самому себе. Эта операция порождает вдоль γ векторное поле $a(t)$, имеющее постоянные (по t) компоненты, равные

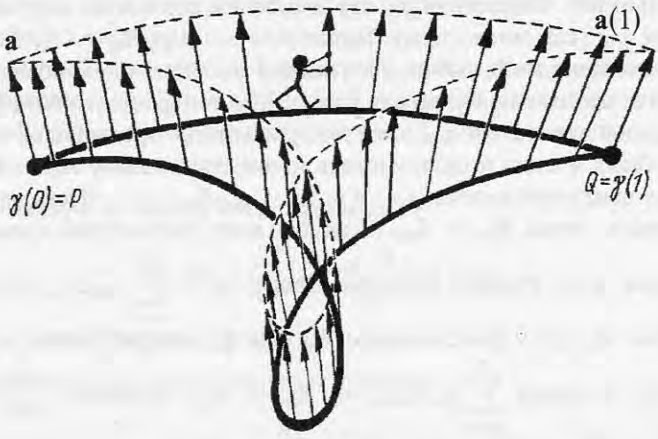

Рис. 11

значению компонент $\mathbf{a}$ в начальный момент. В частности, производные по t от компонент поля $\mathbf{a}(t)$ равны нулю. Отметим, что вектор $\mathbf{a}(1)$, приложенный в точке Q, не зависит от того, вдоль какой кривой γ был осуществлен перенос; можно сказать, что операция параллельного переноса в $\mathbf{R}^n$ не зависит от пути (рис. 11).

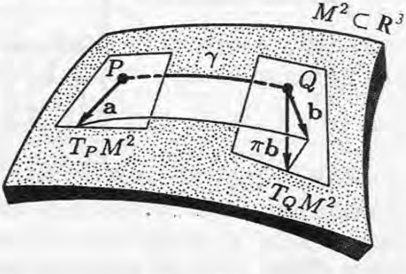

Рис. 12

Однако при переходе к произвольному M^n эта простая схема разрушается. Это связано в первую очередь с тем, что M нельзя покрыть одной картой, т. е. ввести единую систему координат, общую для всех точек. Сначала предположим, что M^2 гладко вложено в $\mathbf{R}^3$ и пусть P, $Q \in \in M^2$ — пара достаточно близких точек на M^2. Пусть $\mathbf{a} \in T_P M^2$ и γ — кривая из P в Q. Можно предложить такое правило параллельного переноса на M^2: рассмотреть $\mathbf{a}$ как вектор из $\mathbf{R}^3$ и осуществить вдоль γ обычный «трехмерный» перенос; тогда $\mathbf{a}$ перейдет в $\mathbf{b}$ в точке Q, однако $\mathbf{b}$ уже не обязан принадлежать $T_Q M^2$. Этот недостаток можно устранить, ортогонально спроектировав $\mathbf{b}$ на $T_Q M^2$ и назвав (по определению) проекцию $\pi\mathbf{b}$ результатом параллельного переноса из P в Q вектора $\mathbf{a}$ вдоль γ (рис. 12). Эта операция не зависит от пути переноса. Однако у нее есть недостаток: операция определена только в малой окрестности точки P; если мы захотим осуществить перенос $\mathbf{a}$ «на далекое расстояние», то может оказаться, что вектор $\pi\mathbf{b}$, который мы объявили «параллельным $\mathbf{a}$», окажется нулевым. Например, это произойдет на S^2 (рис. 13), если мы осуществим перенос вдоль половины меридиана PQ. Есть много соображений, по которым операцию параллельного переноса, дающую в результате переноса нулевой вектор, следует отвергнуть. Впрочем, можно было бы поступить более аккуратно: двигаться по γ бесконечно малыми шагами и после каждого такого шага осуществлять ортогональное проектирование получившегося вектора на $T_{\gamma(t)} M^2$. Оказывается, что такую операцию можно корректно определить, после чего она действительно задаст некоторый «параллельный перенос» на $M^2 \subset \mathbf{R}^3$. Мы не будем более детально изучать этот вопрос, так как здесь используется факт вложения M^2 в $\mathbf{R}^3$; хотелось бы выработать

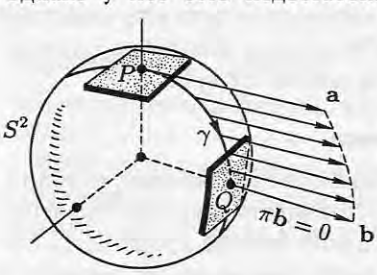

Рис. 13

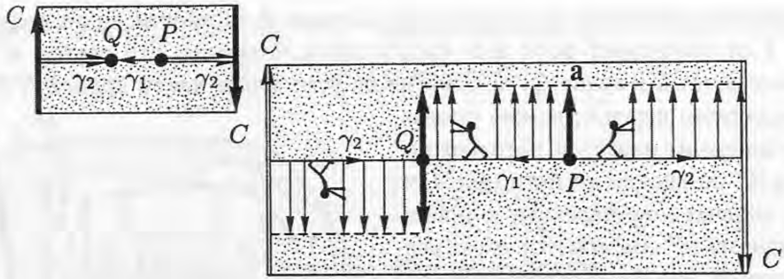

Рис. 14

такое общее понятие параллельного переноса, которое не апеллировало бы к конкретному вложению M^n в $\mathbf{R}^N$.

Обратим внимание читателя, что при определении параллельного переноса мы вынуждены фиксировать гладкую кривую, вдоль которой нужно осуществить перенос. Появление кривой — естественно; иначе непонятно, какой смысл можно вложить в слова: «перенести вектор из точки P в точку Q». Грубо говоря, для «переноса» вектора следует «взять его в руки» и двигаться по M^n, прочерчивая при этом некоторую траекторию. Представим теперь, что мы движемся внутри какого-то M^n, «неся в руках» вектор $\mathbf{a}$. Apriori неясно: зависит или нет результат этого переноса от пути, по которому мы двигались. Может оказаться, что зависит. Пример: параллельный перенос вдоль центральной оси листа Мебиуса (рис. 14). В данном случае зависимость результата переноса от пути есть следствие неориентируемости M^2, однако и на ориентируемом многообразии ниоткуда не следует, что операция переноса не зависит от пути.

9.2. Уравнение параллельного переноса

Если вспомнить определение производной по направлению, то видно, что определение связано с возможностью сравнивать значения тензорного поля в близких точках, находящихся в одной системе координат, а потому задание, например, ковариантного дифференцирования, указывает на возможность определения бесконечно малых сдвигов. Положим поэтому в основу определения параллельного переноса на M^n операцию ∇.

Пусть P, Q — две произвольные точки на M^n, соединенные гладкой (или кусочно-гладкой) траекторией $\gamma(t)$, такой, что $\gamma(0) = P$ и $\gamma(1) = Q$; пусть $\dot\gamma$ — поле скоростей вдоль $\gamma(t)$; если задана система координат $x^1, \ldots, x^n$, то компоненты этого поля обозначим через $\{\xi^k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть на M^n задана аффинная связность, задаваемая в системе координат набором частных дифференцирований $\nabla = \{\nabla_k\}$. Определим ковариантную производную тензорного поля $T = \left\{T^{(\alpha)}_{(\beta)}\right\}$ вдоль векторного поля $\dot\gamma$

формулой: $\nabla_{\dot\gamma}(T) = \left\{\nabla_{\dot\gamma}T^{(\alpha)}_{(\beta)}\right\}$. Условно будем писать: $\nabla_{\dot\gamma} = \xi^k\nabla_k$. Эту операцию назовем *ковариантным дифференцированием вдоль кривой*.

Определение 1. Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая и пусть вдоль нее задано гладкое поле $\mathbf{T} = \{T^i\}$. Это поле будем называть *параллельным вдоль $\gamma(t)$ относительно связности ∇, если $\nabla_{\dot\gamma}(\mathbf{T}) \equiv 0$.*

В силу определения $\nabla_{\dot\gamma} = \xi^k\nabla_k$ можно сказать, что поле $\mathbf{T}$, «параллельное вдоль $\gamma(t)$», имеет ковариантно постоянные координаты вдоль $\gamma(t)$. Это — аналогия с евклидовым случаем, так как наше определение параллельности превращается для $\nabla = \left\{\nabla_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ и для $M^n = \mathbf{R}^n$ в обычное определение параллельного переноса.

Фиксируем координаты $x^1, \ldots, x^n$ и запишем условие параллельности поля $\mathbf{T}$. Имеем:

$$\nabla_{\dot\gamma}(T^i) = \xi^k\nabla_k T^i = 0; \quad \xi^k = \frac{dx^k(t)}{dt},$$

$$\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)); \quad \frac{dx^k}{dt}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^p\Gamma^i_{pk}\right) = 0;$$

$$\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^p\frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{pk} = \frac{dT^i}{dt} + T^p\Gamma^i_{pk}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Определение 2. Уравнение $\dfrac{dT^i}{dt} + T^p\Gamma^i_{pk}\dfrac{dx^k}{dt} = 0$ называется *уравнением параллельного переноса вдоль кривой $\gamma(t)$.*

Изменив γ, мы изменим и уравнение параллельного переноса. Уравнение переноса — это уравнение на компоненты параллельного поля T^i (речь идет о системе из n уравнений первого порядка). Так как $\gamma(t)$ задана, то функции $\dfrac{dx^k(t)}{dt}$ известны. Перейдем к конкретной задаче параллельного переноса вектора.

Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая, идущая из P в Q, и пусть $\mathbf{a} = \{a^i\} \in T_PM^n$ — вектор, заданный в P. Наша цель: построить в точке Q новый вектор $\mathbf{b} \in T_QM^n$, который было бы естественно назвать «параллельным вектору $\mathbf{a}$». Рассмотрим вдоль γ уравнение параллельного переноса; в этом уравнении функции Γ^i_{pk} и $\dfrac{dx^i(t)}{dt}$ считаются известными; надо найти неизвестные функции $\{T^i(t)\}$ — компоненты параллельного поля $\mathbf{T}(t)$. Следует найти такие $\{T^i(t)\}$, чтобы в начальный момент выполнялось условие: $T^i(0) = a^i$. Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, решение системы $\dfrac{dT^i}{dt} + T^p\Gamma^i_{pk}\dfrac{dx^k}{dt} = 0$ существует, единственно и продолжается вплоть до Q.

Определение 3. Вектор $\mathbf{b} = \mathbf{T}(1) \in T_Q M^n$, возникающий в Q, называется *параллельным* вектору $\mathbf{a} \in T_P M^n$ вдоль кривой $\gamma(t)$, $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$.

Ясно, что $\mathbf{b}$ зависит, вообще говоря, от γ, вдоль которой осуществлялся перенос. Если $M^n = \mathbf{R}^n$, то $\mathbf{b}$ параллелен $\mathbf{a}$ в обычном смысле, если в качестве ∇ взять евклидову связность: $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$.

Рассмотрим свойства параллельного переноса на римановом M^n. Пусть ∇ — риманова связность.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P M^n$ *— произвольные векторы, и* $\gamma(t)$ *— гладкая кривая из* P *в* Q. *Рассмотрим параллельный перенос* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *вдоль* $\gamma(t)$. *Тогда он сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. если* $\mathbf{a}(t)$ *и* $\mathbf{b}(t)$ *— параллельные поля вдоль* $\gamma(t)$, $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}$, *то* $\dfrac{d}{dt}\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)\rangle \equiv 0$, *где* $\langle\ ,\ \rangle$ *— скалярное произведение в* $T_{\gamma(t)}M^n$, *порожденное* g_{ij}.

Доказательство. Включим $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в параллельные поля: $\mathbf{T} = \mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{R} = \mathbf{b}(t)$, $\mathbf{T}(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{b}$. Рассмотрим функцию $f(t) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{R}\rangle_{\gamma(t)} = (g_{ij}T^iR^j)(t)$, т. е. скалярное произведение вдоль $\gamma(t)$. Дифференцируя, получаем:

$$
\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} &= \nabla_{\dot\gamma} f(t) = \xi^k \nabla_k f = \xi^k \nabla_k (g_{ij}T^iR^j) = \\
&= \xi^k g_{ij} \nabla_k (T^iR^j) = \xi^k g_{ij} (\nabla_k T^i) R^j + \xi^k g_{ij} T^i (\nabla_k R^j) = \\
&= g_{ij} R^j (\xi^k \nabla_k T^i) + g_{ij} T^i (\xi^k \nabla_k R^j) = \\
&= g_{ij} R^j (\nabla_{\dot\gamma} T^i) + g_{ij} T^i (\nabla_{\dot\gamma} R^j) \equiv 0,
\end{aligned}
$$

так как $\nabla_{\dot\gamma}(\mathbf{T}) = \nabla_{\dot\gamma}(\mathbf{R}) = 0$. □

Верно и обратное: *если на римановом* M^n *дана симметричная аффинная связность, в которой параллельный перенос вдоль любой кривой сохраняет скалярное произведение, то эта связность — риманова.* В самом деле, обращаясь к доказательству теоремы 1, получаем: $\xi^k T^i R^j (\nabla_k g_{ij}) \equiv 0$, т. е. $\nabla_k g_{ij} \equiv 0$.

Хотя мы осуществляли перенос вдоль гладких кривых, однако не составляет труда определить его и вдоль кусочно-гладких кривых. В самом деле, пусть на $\gamma(t)$ есть изолированная точка излома, справа и слева от которой кривая гладкая с ненулевым вектором скорости (рис. 15). Перенося вдоль $\gamma(t)$ вектор $\mathbf{a}$, подойдем к A и получим в ней вектор $\mathbf{b}$, параллельный $\mathbf{a}$. Примем $\mathbf{b}$ за начальное положение нового параллельного поля уже вдоль участка AB и повторим процесс.

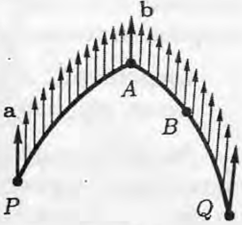

Рис. 15