Лекция 7

7. Связность и ковариантное дифференцирование

7.1. Определение и свойства аффинной связности

До сих пор мы рассматривали только алгебраические операции над тензорами; операцию дифференцирования мы пока не затрагивали. Это — не случайность; сейчас мы объясним причины нашей осторожности.

Необходимость дифференцировать тензорные поля возникает в большом числе прикладных задач (см., например, определение дивергенции векторного поля). Первым кандидатом на эту операцию является обычное дифференцирование компонент тензоров в криволинейных координатах.

Рассмотрим, для простоты, ковариантное поле $T_{i_1,\ldots,i_k}$. Фиксируем криволинейную систему $x^1,\ldots,x^n$ и построим набор функций $P_{\alpha;\,i_1,\ldots,i_k} = \dfrac{\partial T_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^\alpha}$, т. е. рассмотрим частные производные (в обычном смысле) от компонент тензорного поля. Выполним эту операцию в каждой системе координат; т. е. сопоставим в каждой системе набору компонент $T_{i'_1,\ldots,i'_k}$ новый набор: $P_{\alpha';\,i'_1,\ldots,i'_k} = \dfrac{\partial T_{i'_1,\ldots,i'_k}}{\partial x^{\alpha'}}$. Вопрос: образуют ли эти наборы тензорное поле P? Другими словами, будут ли эти наборы преобразовываться друг в друга при замене координат по тензорному закону? Проверим это. При переходе от (x) к (x') возникает преобразование:

$$P_{\alpha';\,i'_1\ldots i'_k} = \frac{\partial T_{i'_1\ldots i'_k}}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}T_{i_1\ldots i_k}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(T_{i_1\ldots i_k})\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} + T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x_{i'_k}}\right) =$$
$$= P_{\alpha;\,i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} + T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x_{i'_k}}\right).$$

Итак,

$$P_{\alpha' i'_1\ldots i'_k} = P_{\alpha i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} + S_{\alpha' i'_1\ldots i'_k}(T,x,x'),$$

где

$$S_{\alpha' i'_1\ldots i'_k} = T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}\right).$$

При замене $(x)\to(x')$ общего вида выражение $S_{\alpha' i'_1\ldots i'_k}$, вообще говоря, отлично от нуля, т. е. $P_{\alpha i_1\ldots i_k}$ преобразуются не по тензорному закону. Итак, операция обычного дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ — не тензорная операция; она переводит тензорное поле не в тензорное поле. Из полученной формулы также видно, в каких предположениях операция $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ является тензорной: она будет таковой относительно линейных замен $(x)\to(x')$; если замена линейна, то $S_{\alpha';\,i'_1\ldots i'_k}\equiv 0$. Для того, чтобы еще больше «дискредитировать» операцию $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ с тензорной точки зрения, рассмотрим векторное поле T^i, отнесенное к криволинейной системе (x), и попытаемся определить для него дивергенцию по формуле: $\operatorname{div}(\mathbf{T}) = \sum\limits_i \dfrac{\partial T^i}{\partial x^i}$, «списав» ее с определения дивергенции в евклидовой системе координат. Будет ли это выражение скаляром, т. е. будет ли оно сохраняться при произвольной замене $(x) \to (x')$? Проверим равенство: $\operatorname{div}(\mathbf{T})_{(x)} = \operatorname{div}(\mathbf{T})_{(x')}$, где (x) и (x') — произвольные системы. Получаем:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{T})_{(x')} &= \sum_{i'} \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T^i \right) = \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + T^i \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i} = \\ &= \sum_i \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + R(\mathbf{T}, x, x') = \operatorname{div}(\mathbf{T})_{(x)} + R(\mathbf{T}, x, x'),\end{aligned}$$

где $R(\mathbf{T}, x, x') = T^i \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \cdot \dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i}$. При произвольной замене, величина $R(\mathbf{T}, x, x')$ отлична от нуля, т. е. предложенное нами определение дивергенции не инвариантно. Из явной формулы для $R(T, x, x')$ видно, что $R = 0$, например, при линейных заменах. Итак, по отношению к нелинейным заменам, операция $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ не является тензорной операцией.

Наша цель: научиться инвариантно дифференцировать тензорные поля в произвольных системах координат. Это необходимо уметь делать уже хотя бы потому, что на гладких многообразиях локальные координаты «почти всегда» криволинейны. Итак, нужно найти операцию (обозначим ее через ∇ — «набла») со следующими свойствами (будем пока считать, что $M^n = \mathbf{R}^n$).

1) В декартовых координатах в $\mathbf{R}^n$ операция ∇ должна совпадать с обычным дифференцированием $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i} \right\}$.
2) Операция ∇ должна быть тензорной операцией, т. е. если T — тензорное поле на $\mathbf{R}^n$ (отнесенное к криволинейным координатам), то и ∇T должно быть тензорным полем.

Начнем с примеров. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ векторное поле T^i; пусть (x) — декартова система координат, (x') — произвольная система. Рассмотрим ∇ и запишем требования 1) и 2), наложенные на ∇. Тогда в системе (x) имеем: $(\nabla T)^i_j = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^j}$; при переходе к (x') должно быть: $(\nabla T)^{i'}_{j'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} (\nabla T)^i_j$. Перед нами стоит задача: найти явный вид ∇, т. е. вычислить компоненты $(\nabla T)^{i'}_{j'}$ в произвольной системе координат.

Имеем:

$$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}T^{k'}\right) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^j} +$$

$$+ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}T^{k'}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) = \delta^{i'}_{k'}\delta^{\alpha'}_{j'}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}} + T^{k'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}};$$

$$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'}\Gamma^{i'}_{j'k'}; \quad \Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.$$

Итак, возникли некоторые функции $\Gamma^{i'}_{j'k'}$, измеряющие отклонение ∇ от операции обычного (евклидова) дифференцирования. Мы нашли действие ∇ на векторных полях.

Рассмотрим теперь в $\mathbf{R}^n$ ковекторное поле T_i. Для отыскания явного вида ∇ на T_i, следует снова решить систему уравнений: $(\nabla T)_{ij} = \dfrac{\partial T_i}{\partial x_j}$; $(\nabla T)_{i'j'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(\nabla T)_{ij}$. Имеем:

$$(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}T_{k'}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}T_{k'}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \delta^{k'}_{i'}\delta^{\alpha'}_{j'}\frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{\alpha'}} + T_{k'}\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'}\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'};$$

где $\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'} = \dfrac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\partial x^i}\cdot\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\cdot\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$. Итак, $(\nabla T)_{i'j'} = \dfrac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'}\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'}$; где $\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'}$ — функции, измеряющие отклонение ∇ от обычного дифференцирования на ковекторных полях.

Лемма 1. *Имеет место равенство* $\widetilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}$.

Доказательство. Очевидное тождество $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\cdot\dfrac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = \delta^{i'}_{k'}$.

Дифференцируя его по $x^{p'}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{p'}\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{p''}\partial x^{i''}}\cdot\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}} = 0,$$

т. е. $\Gamma^{i'}_{p'k'} + \widetilde{\Gamma}^{i'}_{p'k'} = 0$. Лемма доказана. □

Итак, действие ∇ на векторные и ковекторные поля (в криволинейных координатах в $\mathbf{R}^n$) имеет вид:

$$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'}\Gamma^{i'}_{k'j'}; \quad (\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} - T_{k'}\Gamma^{k'}_{i'j'}.$$

Теперь рассмотрим действие ∇ на операторных полях, т. е. на полях типа $(1,1)$. Имеем:

$$(\nabla T)^{i}_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k}(T^i_j);$$

$$(\nabla T)^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j}T^{\alpha'}_{p'}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j}\frac{\partial T^{\alpha'}_{p'}}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k} +$$

$$+ T^{\alpha'}_{p'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{q'}\partial x^{\alpha'}}\cdot\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} +$$

$$+ T^{\alpha'}_{p'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^k\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}}(T^{i'}_{j'}) + T^{p'}_{j'}\Gamma^{i'}_{p'k'} - T^{i'}_{p'}\Gamma^{p'}_{j'k'}.$$

Итак, мы нашли действие ∇ на T^i_j.

Теорема 1. *Пусть $M^n = \mathbf{R}^n$, (x) — декартовы координаты, (x') — произвольные криволинейные координаты. Тогда в $\mathbf{R}^n$ существует тензорная операция ∇, задаваемая на произвольном тензорном поле $T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_p}$ формулой:*

$$(\nabla T)^{i'_1\ldots i'_k}_{j'_1\ldots j'_p;\alpha'} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}(T^{i'_1\ldots i'_k}_{j'_1\ldots j'_p}) + \sum_{s=1}^{k} T^{i'_1\ldots i'_s=q'\ldots i'_k}_{j'_1\ldots j'_p}\Gamma^{i'_s}_{q'\alpha'} - \sum_{s=1}^{p} T^{i'_1\ldots i'_k}_{j'_1\ldots j'_s=q'\ldots j'_p}\Gamma^{q'}_{j'_s\alpha'},$$

где функции $\Gamma^{i'}_{j'q'}$ преобразуются при замене $(x') \to (x'')$ так:

$$\Gamma^{i''}_{j''k''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\Gamma^{i'}_{j'k'} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}.$$

Доказательство. Явный вид ∇ на поле $T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_p}$ устанавливается дословным повторением проделанных выше вычислений для случая векторных, ковекторных, и операторных полей, повторенных столько раз, каков ранг поля $T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_p}$. Выписывание формул оставляется читателю, как обязательное упражнение. Изучим закон преобразования $\Gamma^{i'}_{j'k'}$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{k'} T^{i'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{p'}\Gamma^{i'}_{p'k'};\\
&\nabla_{k''} T^{i''} = \frac{\partial T^{i''}}{\partial x^{k''}} + T^{p''}\Gamma^{i''}_{p''k''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}T^{i'}\right) +\\
&\quad + \frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}T^{p'}\Gamma^{i''}_{p''k''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\cdot\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{i'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{i'}} +\\
&\quad + T^{p'}\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}\Gamma^{i''}_{p''k''} = \nabla_{k''}T^{i''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\cdot\nabla_{k'}T^{i'} =\\
&\quad = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{p'}\Gamma^{i'}_{p'k'}\right).
\end{aligned}
$$

Сравнивая, получаем:

$$
T^{p'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{p'k'} = T^{p'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}} + T^{p'}\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}\Gamma^{i''}_{p''k''}.
$$

Так как это тождество должно иметь место для любого поля T^i, то

$$
\Gamma^{i''}_{p''k''} = \Gamma^{i'}_{p'k'}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}.
$$

В силу леммы 1

$$
\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}\cdot\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\cdot\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} = -\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{p''}\partial x^{k''}}\cdot\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = -\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{p''}\partial x^{k''}}\cdot\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}.
$$

Теорема доказана. □

Мы доказали теорему существования «тензорного дифференцирования», правда, сделали это только для случая, когда $M^n = \mathbf{R}^n$, т. е. снабжено декартовыми координатами. Это позволило нам в явном виде вычислить $\Gamma^{i'}_{j'k'}$, измеряющие отклонение ∇ от евклидова дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x^i}$, а именно:

$$
\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} = -\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.
$$

Мы существенно использовали то, что в $\mathbf{R}^n$ существуют выделенные, привилегированные координаты — декартовы, в которых операция ∇ совпала с обычным дифференцированием. Перейдем теперь к рассмотрению произвольных гладких многообразий. Новую операцию ∇ зададим аксиоматически, положив в основу определения вычисленные выше свойства ∇ на $\mathbf{R}^n$.

Определение 1. Будем говорить, что на гладком многообразии M^n задана операция ковариантного дифференцирования ∇, если для каждого гладкого атласа в каждой карте задан набор гладких функций Γ^i_{jk}, преобразующихся при замене координат по закону:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.$$

Тогда ∇ задается формулой:

$$(\nabla T)^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_p;\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_p}\right) + \sum_{s=1}^{k} T^{i_1\ldots;i_s=q;\ldots i_k}_{j_1\ldots j_p}\Gamma^{i_s}_{q\alpha} -$$
$$-\sum_{s=1}^{p} T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots;j_s=q;\ldots j_p}\Gamma^{q}_{j_s\alpha}.$$

Существование таких M^n, на которых можно ввести ∇, доказано нами выше: можно положить $M^n = \mathbf{R}^n$; тогда Γ^i_{jk} задаются полученными нами выше формулами. Важно, что набор Γ^i_{jk} не образует тензора! Эти функции называются *символами Кристоффеля*. Их закон преобразования становится тензорным, например, в том случае, когда замена $(x) \to (x')$ линейна. В определении ∇ система (x) (не штрихованная) уже не является декартовой системой, так как события развиваются уже на произвольном M^n. Иногда говорят, что символы Кристоффеля (или ∇) задают на M^n аффинную связность.

Определение 2. *Тензором кручения аффинной связности* Γ^i_{jk} называется тензор, задаваемый в каждой системе координат равенством: $\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$.

Лемма 2. *Набор функций* Ω^i_{jk} *действительно образует тензор.*

Доказательство. Так как при замене координат Γ^i_{jk} преобразуются по закону:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}},$$

то альтернируя $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ по нижним индексам, получаем, в силу симметрии «нетензорного добавка» по j' и k' формулу

$$\Omega^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \Omega^{i}_{jk}. \qquad \square$$

Определение 3. Связность (или ковариантное дифференцирование) ∇ называется *симметричной*, если тензор кручения равен нулю.